Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 1, с. 116–125

Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств голоморфных в поликруге функций

Ф.А. Шамоян

Брянский государственный университета им. И.Г. Петровского
ул. Бежицкая, 14, Брянск, 241036, Россия
E-mail:root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2002 г.
Представлена И.В. Островским

Найдена характеризация тех мер μ в единичном поликруге, для которых оператор дифференцирования отображает весовые анизотропные пространства голоморфных функций со смешанной нормой в пространства Лебега $L^q(\mu)$.

Знайдено характеризацію тих мір μ в одиничному полікрузі, для яких оператор диференціювання відображає вагові анізотропні простори голоморфних функцій зі змішаною нормою у простори Лебега $L^q(\mu)$.

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots , z_n), |z_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$ — единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве C^n, T^n — его остов $\vec{p} = (p_1, \dots , p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $j = \overline{1, n}$; $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots , \omega_n(t))$, $t \in (0, 1)$, где $\omega_j(t)$ — положительные суммируемые функции на $(0, 1)$. Обозначим через $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ множество всех голоморфных в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})} =$$

$$\left(\int\limits_U \left[\dots \left(\int\limits_U |f(z_1, \dots , z_n)|^{p_1} \omega_1(1 - |z_1|) dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \omega_n(1 - |z_n|) dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty,$$

где m_2 — плоская мера Лебега на $U = U^1$. Пусть далее $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots , \mu_n)$, где μ_j — борелевские неотрицательные конечные меры на $U, L^{\vec{p}}(\vec{\mu})$ — соответствующее пространство со смешанной нормой (см. [1, 2]), т.е. пространство всех измеримых функций на U^n, для которых

Mathematics Subject Classification 2000: 30E20.
Работа поддержана грантом РФФИ(№ 01-01-00992).

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(\vec{\mu})} =$$

$$\left(\int\limits_U\left[\dots\left(\int\limits_U\left(\int\limits_U|f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)|^{p_1}d\mu_1(\xi_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\mu_2(\xi_2)\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}d\mu_n(\xi_n)\right)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

В этой статье мы получим полную характеризацию тех мер $\vec{\mu}_j$, $j=\overline{1,n}$, для которых оператор $D^m f(z_1,\dots,z_n) = \frac{\partial^{|m|}f(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_1^{m_1}\partial z_2^{m_2}\dots\partial z_n^{m_n}}$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n$, отображает $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в $L^{\vec{p}}(\vec{\mu})$, где $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{q}=(q_1,\dots,q_n)$, $0<p_j\le q_j$, $j=\overline{1,n}$. Кроме того, мы получим описание мер ν на U^n, для которых оператор D^m отображает $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в $L^q(\nu)$, где $0<p_j\le q$, $j=\overline{1,n}$. В связи с полученными результатами напомним, что при $n=1$, $m=0$, в классах Харди $H^p(U)$ соответствующее описание получено в классической работе Л. Карлесона [3], а в случае пространства Харди $H^p(B^n)$ в шаре — Л. Хермандером в [4]. Отметим также работу автора [5], где рассмотрено пространство Харди $H^p(U^n)$, предполагалось $\vec{m}=(m_1,\dots,m_n)$, $m_j\ne 0$, $j=\overline{1,n}$. Случай весовых пространств Бергмана исследован в работе [6].

§ 1. Формулировка основных разультатов и доказательство вспомогательных утверждений

Пусть S — множество всех измеримых и положительных функций из $L^1(0,1)$, для которых существуют числа m_ω, q_ω, причем m_ω, $q_\omega\in(0,1]$, такие, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega, r\in(0,1], \lambda\in[q_\omega,1]. \tag{1}$$

Определенные на $(0,+\infty)$ функции указанного типа подробно изучены в [7]. Для формулировки основных результатов статьи введем также следующие обозначения. Пусть $l\in[0,1), \theta\in[-\pi,\pi]$.

$$\Omega_l(\theta) = \left\{z\in U: 1-l\le|z|<1, |arg z-\theta|\le\frac{l}{2}\right\}. \tag{2}$$

Если $\vec{l}=(l_1,\dots,l_n)\in I^n$, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)\in Q^n$, где $I^n=[0,1)^n$, $Q^n=[-\pi,\pi]^n$, то

$$\Omega_{\vec{l}}(\theta) = \Omega_{l_1}(\theta_1)\times\Omega_{l_2}(\theta_2)\times\dots\times\Omega_{l_n}(\theta_n). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, $\vec{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\omega_j\in S'$, μ_j — борелевские неотрицательные меры на U, $j=\overline{1,n}$, $m=(m_1,\dots,m_n)\in Z_+^n$, $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{q}=(q_1,\dots,q_n)\in R_+^n$, причем $0<p_j\le q_j$, $j=\overline{1,n}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1)$\|f\|_{L^{\vec{q}}(\vec{\mu})} \le C(\vec{\mu})\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}$;

2)$\mu_j(\Omega_l(\theta)) \le C(\mu_j) l^{2\frac{q_j}{p_j}+m_j q_j} (\omega_j(l))^{\frac{q_j}{p_j}}$, $l \in (0,1)$, $\theta \in Q$, $j = \overline{1,n}$. (4)

В случае мер ν, заданных на U^n, справедлив следующий результат:

Теорема 2. *Пусть $p_j \le q < +\infty$, $j = \overline{1,n}$ ν — неотрицательная борелевская мера на U^n, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $j = \overline{1,n}$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in Z^n_+$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\left(\int\limits_{U^n} |D^m f(z)|^q d\nu(z) \right)^{\frac{1}{q}} \le C(\nu)\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}$;

2) $\nu(\Omega_{\vec{l}}(\vec{\theta})) \le C(\nu) \prod_{j=1}^n l^{2\frac{q}{p_j}+qm_j} (\omega_j(l_j))^{\frac{q}{p_j}}$, $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n) \in I^n$,
$\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in Q^n$.

Для доказательства теорем 1 и 2 потребуются некоторые вспомогательные результаты, для доказательства которых введем обозначения.
Пусть $k = (k_1, \dots, k_n) \in Z^n_+$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in Z^n$, причем $-2^{k_j} \le l_j \le 2^{k_j} - 1$,

$$\Delta_{k_j,l_j} = \left\{ z \in U : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \le |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}}, \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \le arg z_j < \frac{\pi(l_j+1)}{2^{k_j}} \right\},$$

$\Delta_{k,l} = \Delta_{k_1,l_1} \times \dots \times \Delta_{k_n,l_n}$, следующие леммы установлены в [8].

Лемма 1. *Пусть $f \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega}), 0 < p_j < +\infty, \omega_j \in S, j = \overline{1,n}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty} \sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1} \left(\max_{\xi_n \in \Delta_{k_n,l_n}} \left(\dots \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{l_2=-2^{k_2}}^{2^{k_2}-1} \max_{\xi_2 \in \Delta_{k_2,l_2}} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1} \right.\right.\right.\right.$$

$$\times \left(\max_{\xi_1 \in \Delta_{k_1,l_1}} \left(|f(\xi_1, \dots, \xi_n)|^{p_1} \right) \omega_1 \left(|\Delta_{k_1,l_1}|^{\frac{1}{2}} \right) |\Delta_{k_1,l_1}| \right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$

$$\left.\left.\left.\left. \times\, \omega_2 \left(|\Delta_{k_2,l_2}|^{\frac{1}{2}} \right) |\Delta_{k_2,l_2}| \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \omega_n \left(|\Delta_{k_n,l_n}|^{\frac{1}{2}} \right) |\Delta_{k_n,l_n}| \right)$$

$$\le C(\vec{\omega}, \vec{p}) \|f\|^{p_n}_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})},$$

где $|\Delta_{k_j,l_j}|$ — плоская мера прямоугольника Δ_{k_j,l_j}, $j = \overline{1,n}$.

Лемма 2. *В условиях предыдущей леммы справедлива оценка*

$$|f(z)| \le C \frac{\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}}{\big(1-|z|\big)^{\frac{2}{p}}\big(\omega(1-|z|)\big)^{\frac{1}{p}}}, \quad z \in U^n,$$

$$(1-|z|)^{\frac{2}{p}}(\omega(1-|z|))^{\frac{1}{p}} = \prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|)^{\frac{2}{p_j}}(\omega_j(1-|z_j|))^{\frac{1}{p_j}},\ z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n.$$

В дальнейшем потребуется интегральное представление класса $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$. С этой целью заметим, что если $\omega_j \in S$, то ω_j допускает представление $\omega_j(t) = \exp\left(\eta(t) + \int\limits_t^1 \frac{\varepsilon_j(u)}{u} du\right)$, $t \in (0,1)$, где η и ε — ограниченные измеримые функции на $(0,1)$, при этом $\frac{\ln m_{\omega_j}}{\ln \frac{1}{q_{\omega_j}}} \le \varepsilon_j(u) \le \frac{\ln M_{\omega_j}}{\ln \frac{1}{q_{\omega_j}}}$, где m_{ω_j}, M_{ω_j}, q_{ω_j} — числа, соответствующие функциям ω_j в оценках (1) (см. [7]). Положим $\alpha_{\omega_j} = \frac{\ln \frac{1}{m_{\omega_j}}}{\ln \frac{1}{q_{\omega_j}}}$, $\beta_{\omega_j} = \frac{\ln M_{\omega_j}}{\ln \frac{1}{q_{\omega_j}}}$, при этом, не ограничивая общность, предположим, что $\eta(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$. Введем также ядра $D_\alpha(\xi,z)$, одномерные аналоги которых были введены М.М. Джрбашяном в работе [9]: $D_\alpha(\xi,z) = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j+1}{\pi} \cdot \frac{(1-|\xi_j|^2)^\alpha}{(1-\overline{\xi}_j z_j)^{\alpha+2}}$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $j=\overline{1,n}$.

Лемма 3. *Пусть*

$$f \in A^{\vec{p}}(\vec{\omega}), \quad \vec{\omega} = (\omega_1,\dots,\omega_n), \quad \alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+2}{p_j} - 1, \quad j=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Тогда справедливо представление

$$f(z) = \int\limits_{U^n} D_\alpha(\xi,z) f(\xi)\, dm_{2n}(\xi), \quad z \in U^n. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что если $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, то $\omega_j(t) \ge t^{\alpha_{\omega_j}}$, $t \in (0,1)$. Используя лемму 2, получаем

$$|f(z_1,\dots,z_n)| \le \frac{C\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}}{\prod\limits_{j=1}^n \big(1-|z_j|\big)^{\frac{2}{p_j}}\big(1-|z_j|\big)^{\frac{\alpha_{\omega_j}}{p_j}}}, \quad z \in U^n.$$

Отсюда ввиду (5) получим, что пространство $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ вложено в $A^1(\vec{\alpha})$, где $A^1(\vec{\alpha})$ совпадает с классом $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ при $\omega_j(t) = t^{\alpha_j}$, $j=\overline{1,n}$ и $\vec{p} = (1,1,\dots,1)$.

Используя результат [8], получим, что f допускает представление (6). Лемма доказана. Следующая лемма установлена в [10].

Лемма 4. *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+2}{p_j} - 1$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда оператор*

$$T_\alpha(f)(z) = \int\limits_{D^n} |D_\alpha(\xi, z)||f(z)|dm_{2n}(\xi), \ z \in D^n, \tag{7}$$

отображает пространство $A^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *в* $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, *где, как обычно,* $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *означает класс* $L^{\vec{p}}(\vec{\mu})$, *при* $d\mu_j = \omega_j(1-|\xi|)dm_2(\xi_j)$, $\xi_j \in U$, $j = \overline{1,n}$.

Лемма 5. *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $\omega_j \in S$, $j = \overline{1,n}$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in Z_+^n$. *Тогда справедлива оценка*

$$\Bigg(\int\limits_U \omega_n(1-|\xi_n|)(1-|\xi_n|)^{m_n p_n}\Bigg[\dots\Bigg(\int\limits_U \omega_2(1-|\xi_2|)(1-|\xi_2|)^{m_2 p_2}$$
$$\times \int\limits_U |D^m f(\xi_1, \dots, \xi_n)|^{p_1}\omega_1(1-|\xi_1|)(1-|\xi_1|)^{m_1 p_1}\, dm_2(\xi_1)\Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}}$$
$$\times\, dm_2(\xi_2)\Bigg)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots\Bigg]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dm_2(\xi_n)\Bigg)^{\frac{1}{p_n}} \le C(m, \vec{\omega})\|f\|_{A^{\vec{p}}(\vec{\omega})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму при $n = 2$, т.к. при $n > 2$ проходят аналогичные рассуждения. Пусть $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+2}{p_j} - 1$, $j = 1, 2$, тогда по лемме 3 f допускает интегральное представление

$$f(z_1, z_2) = C(\alpha)\int\limits_{U^2} \frac{\left(1-|\xi_1|^2\right)^{\alpha_1}\left(1-|\xi_2|^2\right)^{\alpha_2}}{\left(1-\overline{\xi_1}z_1\right)^{\alpha_1+2}\left(1-\overline{\xi_2}z_2\right)^{\alpha_2+2}} f(\xi_1, \xi_2)\, dm_4(\xi),$$

$$C(\alpha) = \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{\pi^2}.$$

Следовательно,

$$D^{m_1+m_2} f(z_1, z_2)$$
$$= C(\alpha, m)\int\limits_{U^2} \frac{\left(1-|\xi_1|^2\right)^{\alpha_1}\left(1-|\xi_2|^2\right)^{\alpha_2}\overline{\xi_1}^{m_1}\overline{\xi_2}^{m_2}}{\left(1-\overline{\xi_1}z_1\right)^{\alpha_1+m_1+2}\left(1-\overline{\xi_2}z_2\right)^{\alpha_2+m_2+2}} f(\xi_1, \xi_2) dm_4(\xi). \tag{8}$$

Поэтому

$$\left(1-|z_1|^2\right)^{m_1}\left(1-|z_2|^2\right)^{m_2} D^m f(z_1, z_2)$$

$$\leq C(\alpha,m)\int\limits_{U^2}\frac{\left(1-|\xi_1|^2\right)^{\alpha_1}\left(1-|\xi_2|^2\right)^{\alpha_2}}{|1-\xi_1 z_1|^{\alpha_1+2}|1-\xi_2 z_2|^{\alpha_2+2}}|f(\xi_1,\xi_2)|dm_4(\xi_1,\xi_2). \qquad (9)$$

Используя лемму 4, получаем утверждение леммы 5.

§ 2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1 мы проведем для $n=2$, т.к. при $n>2$ проходят аналогичные рассуждения. Сначала заметим, что импликация 2)⇒1) проверяется стандартным образом с использованием функции $e_z(\xi)=\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1-\xi_j z_j\right)^{\beta_j+1}}$, $z=(z_1,\dots,z_n)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in U^n$ при достаточно больших β_j (см., напр., [1, 5]).

Поэтому перейдем к установлению импликации 1)⇒2). Разлагая единичный круг в виде объединения диадических прямоугольников, получим

$$I(z_2)=\left(\int\limits_U|D^m f(z_1,z_2)|^{q_1}d\mu_1(z_1)\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}\max_{z_1\in\Delta_{k_1,l_1}}\left(|D^m f(z_1,z_2)|^{q_1}\left(1-|z_1|\right)^{m_1q_1+\frac{2q_1}{p_1}}\left(\omega_1(1-|z_1|)^{\frac{q_1}{p_1}}\right)\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Учитывая, что $\frac{p_1}{q_1}\leq 1$, получаем

$$I(z_2)\leq$$

$$\left[\sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}\max_{z_1\in\Delta_{k_1,l_1}}\left(|D^m f(z_1,z_2)|^{p_1}\left(1-|z_1|\right)^{p_1}\left(1-|z_1|\right)^{m_1p_1+2}\omega_1(1-|z_1|)\right)\right]^{\frac{1}{p_1}}.$$

Теперь, применяя лемму 1 к функции $D^m f(z_1,z_2)$, при фиксированном $z_2\in U$ приходим к оценке

$$I(z_2)\leq\left(\int\limits_U|D^m f(z_1,z_2)|^{p_1}\omega_1(1-|z_1|)(1-|z_1|)^{m_1p_1}dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Возводя в степень q_2 обе части последнего неравенства и проинтегрировав по мере μ_2, получим

$$\left(\int\limits_U(I(z_2))^{q_2}d\mu_2(z_2)\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\leq C\left(\int\limits_U\left(\int\limits_U|D^m f(z_1,z_2)|^{q_1}\omega_1(1-|z_1|)(1-|z_1|)^{m_1p_1}\,dm_2(z_1)\right)^{\frac{q_2}{q_1}}d\mu_2(z_2)\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Снова разобьем круг на диадические прямоугольники и учтем (4):

$$\left(\int\limits_U (I(z_2))^{q_2} d\mu_2(z_2)\right)^{\frac{1}{q_2}} \le C\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\sum_{l_2=-2^{k_2}}^{2^{k_2}-1}\right.$$

$$\left.\times \max_{z_2\in\Delta_{k_2,l_2}}\left(\int\limits_U |D^m f(z_1,z_2)|^{p_1}\omega_1(1-|z_1|)(1-|z_1|)^{m_1p_1}dm_2(z_1)\right)^{\frac{q_2}{p_1}}\mu(\Delta_{k_2,l_2})\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\le C_2\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\sum_{l_2=-2^{k_2}}^{2^{k_2}-1}\max_{z_2\in\Delta_{k_2,l_2}}\left(\int\limits_U |D^m f(z_1,z_2)|^{p_1}\omega_1(1-|z_1|)(1-|z_1|)^{m_1p_1}\,dm_2(z_1)\right)^{\frac{q_2}{p_1}}\right.$$

$$\left.\times\left[\omega_2(1-|z_2|)\right]^{\frac{q_2}{p_2}}(1-|z_2|)^{m_2q_2+\frac{2q_2}{p_2}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Учитывая равенство $\frac{1}{q_2}=\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{1}{p_2}$ и $\frac{p_2}{q_2}\le 1$, приходим к оценке

$$\left(\int\limits_U (I(z_2))^{q_2} d\mu_2(z_2)\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\le C_2\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\sum_{l_2=-2^{k_2}}^{2^{k_2}-1}\max_{z_2\in\Delta_{k_2,l_2}}\left(\left(\int\limits_U |D^m f(z_1,z_2)|^{p_1}\omega_1(1-|z_1|)(1-|z_1|)^{m_1p_1}dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\omega_2(1-|z_2|)(1-|z_2|)^{2+p_2m_2}\right)\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Для доказательства теоремы остается применить леммы 1 и 5. Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 2. Как и в теореме 1, импликация 2)⇒1) проверяется стандартным образом, поэтому ее доказательство опускается.

Перейдем к доказательству 1)⇒2). Снова докажем теорему при $n=2$, поскольку при $n>2$ проходят аналогичные рассуждения. Сначала предположим,что $q\ge p_1\ge p_2(*)$. Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, имеем

$$I=\left(\int\limits_{U^2}|D^m f(z_1,z_2)|^q d\nu(z)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\left(\int\limits_{U^2}|D^m f(z_1,z_2)|^q\left(\omega_1(1-|z_1|)\right)^{\frac{q}{p_1}}\left(\omega_2(1-|z_2|)\right)^{\frac{q}{p_2}}(1-|z_1|)^{m_1q_1+\frac{2q}{p_1}-2}\right.$$

$$\times(1-|z_2|)^{m_2q+\frac{2q}{p_2}-2}\,dm_4(z_1,z_2)\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая, что $p_1\le q$, получаем

$$I\le C\Bigg(\int\limits_U\big(\omega_2(1-|z_2|)\big)^{\frac{p_1}{p_2}}(1-|z_2|)^{m_2p_1+\frac{2p_1}{p_2}-2}$$

$$\times\Bigg[\int\limits_U|D^mf(z_1,z_2)|^q\big(\omega_1(1-|z_1|)\big)^{\frac{q}{p_1}}(1-|z_1|)^{m_1q+\frac{2q}{p_1}-2}\,dm_2(z_1)\Bigg]^{\frac{p_1}{q}}\,dm_2(z_2)\Bigg)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Снова применяя аналогичные рассуждения к внутреннему интегралу, приходим к оценке

$$I\le C\Bigg(\int\limits_U\big(\omega_2(1-|z_2|)\big)^{\frac{p_1}{p_2}}(1-|z_2|)^{m_2p_1+\frac{2p_1}{p_2}-2}$$

$$\times\Bigg[\int\limits_U|D^mf(z_1,z_2)|^{p_1}\big(\omega_1(1-|z_1|)\big)(1-|z_1|)^{m_1p_1}\,dm_2(z_1)\Bigg]dm_2(z_2)\Bigg)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Учитывая, что $\frac{p_2}{p_1}\le 1$, как и выше, получаем

$$I\le C\Bigg(\int\limits_U\big(\omega_2(1-|z_2|)\big)(1-|z_2|)^{m_2p_2}$$

$$\times\Bigg[\int\limits_U|D^mf(z_1,z_2)|^{p_1}\big(\omega_1(1-|z_1|)\big)(1-|z_1|)^{m_1p_1}dm_2(z_1)\Bigg]^{\frac{p_2}{p_1}}\,dm_2(z_2)\Bigg)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Остается применить лемму 5. Теорема доказана при условии (*).

Перейдем к случаю $q\ge p_2\ge p_1(**)$.

Вначале заметим, что если $(z_{k_1,l_1},z_{k_2,l_2})\in\Delta_{k_1,l_1,k_2,l_2}$, то

$$|D^mf(z_{k_1,l_1},z_{k_2,l_2})|^q$$

$$\le\frac{C}{\big(1-|z_{k_1,l_1}|\big)^{m_1q+\frac{2q}{p_1}}\big(1-|z_{k_2,l_2}|\big)^{m_2q}}\Bigg(\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z_{k_2,l_2})|^{p_1}dm_2(\xi_1)\Bigg)^{\frac{q}{p_1}},$$

где $\Delta^*_{k_1,l_1}$ — расширение Δ_{k_1,l_1} в два раза с тем же центром, $z_{k_2,l_2}\in\Delta^*_{k_1,l_1}$. Поэтому, как и при доказательстве первой части:

$$I=\Bigg(\int\limits_{U^2}|D^mf(z_1,z_2)|^q\,d\nu(z_1,z_2)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\le\Bigg(\sum_{k_2,l_2}\sum_{k_1,l_1}|D^mf(z_{k_1,l_1},z_{k_2,l_2})|^q\nu(\Delta_{k_1,l_1,k_2,l_2})\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_1\Biggl(\sum_{k_2,l_2}\sum_{k_1,l_1}\bigl(\omega_1(1-|z_{k_1,l_1}|)\bigr)^{\frac{q}{p_1}}(1-|z_{k_2,l_2}|)^{\frac{2q}{p_2}}\bigl(\omega_2(1-|z_{k_2,l_2}|)\bigr)^{\frac{q}{p_2}}$$

$$\times\Biggl[\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z_{k_2,l_2})|^{p_1}\,dm_2(\xi_1)\Biggr]^{\frac{q}{p_1}}\Biggr)^{\frac{1}{q}}\leq C_2\Biggl(\sum_{k_2,l_2}\sum_{k_1,l_1}(1-|z_{k_2,l_2}|)^{\frac{2q}{p_2}}\bigl(\omega_2(1-|z_{k_2,l_2}|)\bigr)^{\frac{q}{p_2}}$$

$$\times\Biggl[\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z_{k_2,l_2})|^{p_1}\bigl(\omega(1-|\xi_1|)\bigr)\,dm_2(\xi_1)\Biggr]^{\frac{q}{p_1}}\Biggr)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство (**), отсюда получаем

$$I^{p_2}\leq C_2^{p_2}\Biggl(\sum_{k_2,l_2}\sum_{k_1,l_1}(1-|z_{k_2,l_2}|)^2\bigl(\omega_2(1-|z_{k_2,l_2}|)\bigr)$$

$$\times\Biggl[\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z'_{k_2,l_2})|^{p_1}\bigl(\omega_1(1-|\xi_1|)\bigr)dm_2(\xi_1)\Biggr]^{\frac{p_2}{p_1}}\Biggr).$$

Теперь применим лемму 5. Имеем

$$I^{p_2}\leq C_2^{p_2}\int\limits_U\Biggl(\sum_{k_1,l_1}\Biggl[\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z_2)|^{p_1}\bigl(\omega_1(1-|\xi_1|)\bigr)\,dm_2(\xi_1)\Biggr]^{\frac{p_2}{p_1}}\Biggr)\bigl(\omega_2(1-|\xi_2|)\bigr)\,dm_2(\xi_2). \tag{10}$$

По условию (**) $\frac{p_2}{p_1}=\alpha\geq 1$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k^\alpha\leq\Bigl(\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\Bigr)^\alpha$ при всех $b_k\geq 0$, $k\in\mathbf{N}$. Поэтому из (10) получаем

$$I^{p_2}\leq C_2^{p_2}\int\limits_U\Biggl(\sum_{k_1,l_1}\int\limits_{\Delta^*_{k_1,l_1}}|f(\xi_1,z_2)|^{p_1}\bigl(\omega_1(1-|\xi_1|)\bigr)\,dm_2(\xi_1)\Biggr)^{\frac{p_2}{p_1}}\bigl(\omega_2(1-|\xi_2|)\bigr)\,dm_2(\xi_2)$$

$$\leq C_3\int\limits_U\Biggl(\int\limits_U|f(z_1,z_2)|^{p_1}\bigl(\omega_1(1-|z_1|)\bigr)\,dm_2(z_1)\Biggr)^{\frac{p_2}{p_1}}\bigl(\omega_2(1-|z_2|)\bigr)dm_2(z_2).$$

Теорема доказана полностью.

Список литературы

[1] *A. Benechek and R. Panzone*, The spaces L^p with mixed norm. — *Duke Math. J.* (1961), v. 28, No. 3, p. 301–324.

[2] *О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский*, Интегральные представления функций и теоремы вложения. Наука, Москва (1969).

[3] *L. Carleson*, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. — *Ann. Math.* (1962), v. 76, p. 547–559.

[4] *L. Hörmander*, L^p estimate for (pluri-)subharmonic functions. — *Math. Scand.* (1967), v. 20, № 1, p. 65–78.

[5] *Ф.А. Шамоян*, Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n), 0 < p < +\infty$. — *Мат. сб.* (1978), т. 107, № 3, с. 446–466.

[6] *В.Л. Олейник*, Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций. — *Зап. науч. сем. ЛОМИ* (1974), т. 47, с. 120–137.

[7] *Е. Сенета*, Правильно меняющиеся функции. Наука, Москва (1985).

[8] *Ф.А. Шамоян*, Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций. — *Сиб. мат. журн.* (1990), т. 31, № 2, с. 199–215.

[9] *М. Джрбашян*, К проблеме представимости аналитических функций. — *Сообщ. ин-та математики и механики АН АрмССР* (1948), вып. 2, с. 3–30.

[10] *Ф.А. Шамоян, О.В. Ярославцева*, Непрерывные проекторы, двойственность и диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой. — *Иссл. по линейным операторам и теории функций ПОМИ* (1997), т. 247, с. 267–275.

Embedding theorems for weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in polydisk

F.A. Shamoyan

We received the characterization of those measures μ in the unit poludisk for which the differentiated operator is mapping the weighted anisotropic spaces of holomorphic functions with mixed norm into Lebesgue spaces $L^q(\mu)$.