Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 3, с. 326–334

Дифференциально-геометрический метод и новый класс точных решений уравнений $\vec{n}$-поля

А.Б. Борисов

Институт физики металлов УрО РАН
ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620219, Россия
E-mail:Borisov@imp.uran.ru

Статья поступила в редакцию 19 мая 2003 г.

Предложен новый метод получения широкого класса решений уравнений $\vec{n}$-поля, использующий понятия классической дифференциальной геометрии. Метод основан на преобразовании годографа и интерпретации искомого уравнения, как дифференциальной связи для криволинейной системы координат в евклидовом пространстве. Полученные решения зависят от трех произвольных функций.

Запропоновано новий метод отримання широкого класу розв'язків рівнянь $\vec{n}$-поля, що використовує поняття класичної диференціальної геометрії. Метод грунтується на перетворенні годографа та інтерпретації шуканого рівняння, як диференціального зв'язку для криволінійної системи координат у євклідовому просторі. Отримані розв'язки залежать від трьох довільних функцій.

1. Нелинейная модель $\vec{n}$-поля, имеющая многочисленные физические приложения в теории поля и физике конденсированных сред, описывается уравнениями движения

$$\vec{n} \times (\vec{n}_{tt} - \Delta \vec{n}) = 0 \tag{1}$$

и связью $\vec{n}^2 = 1$ для трех действительных полей $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ в пространстве-времени $x_\mu = (t, \vec{r})$. В терминах полей θ, Φ, параметризующих $\vec{n}$-поле: $\vec{n} = (\sin\theta\cos\Phi, \sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$ уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$\partial_\mu \partial^\mu \theta = 1/2 \sin 2\theta \; \partial_\mu \Phi \, \partial^\mu \Phi, \quad \partial_\mu \left(\sin\theta^{\,2} \partial^\mu \Phi \right) = 0. \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 35J35.

Работа частично поддержана РФФИ № 03-01-00100.

В данной работе находим широкий класс решений этого уравнения с помощью специального подхода, использующего методы классической дифференциальной геометрии. Мы воспользуемся подходящей подстановкой, которая хотя и не охватывает многообразия всех решений (2), но увеличивает число уравнений и редуцирует систему (2) в новую систему с простой геометрической интерпретацией. Для ее решения мы применим преобразование годографа, т.е. изменим роль зависимых и независимых переменных. Однако далее после такой замены, в отличие от стандартного преобразования годографа, мы не совершаем замену производных полей, а определяем как их новые переменные, которые связаны с компонентами метрического тензора, индуцированного таким преобразованием. Тогда искомое уравнение перепишем в терминах компонент метрического тензора. Поскольку независимые переменные вначале были евклидовы или псевдоевклидовы, то тензор кривизны в терминах введенной метрики равен нулю. В итоге получаем самосогласованную систему уравнений для определения компонент метрического тензора, решение которой по формулам классической геометрии позволяет далее найти решение для искомого дифференциального уравнения в виде неявных функций. Покажем, что при определенной ограниченности такой дифференциально-геометрический подход, основанный на вложение нелинейного уравнения в частных производных в определенную дифференциальную связь в евклидовом пространстве, дает широкий класс решений, получение которых другими методами крайне затруднено.

Вначале мы используем обобщение Anzatza, предложенного в [1, 2]. Положим поле Θ локально зависящим $\Theta = \Theta(a)$ от вспомогательного поля $a(t, \vec{r})$. Тогда с помощью непосредственных вычислений нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\theta_{,aa} = 1/2\ sin 2\theta(a), \tag{3}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu a = \partial_\mu \partial^\mu \Phi = 0, \;\; \partial_\mu a\, \partial^\mu a = \partial_\mu \Phi\, \partial^\mu \Phi, \;\; \partial_\mu a\, \partial^\mu \Phi = 0 \tag{4}$$

для полей $\Theta(a)$, a, Φ, следуют уравнения(2). Далее рассмотрим решение уравнения (3) в виде решетки солитонов

$$\cos\Theta = sn(\frac{a}{k}, k), \quad 0 < k < 1. \tag{5}$$

Векторные поля $\partial_\mu a$ и $\partial_\mu \Phi$ являются нормалями к поверхностям $a = const$ и $\Phi = const$, и с геометрической точки зрения решение системы (4) определяет две ортогональные гармонические ($\partial^\mu \partial_\mu a = 0$, $\partial^\mu \partial_\mu \Phi = 0$) координатные поверхности с равными длинами нормалей.

2. Введем комплексное поле $\omega = a + i\Phi$ и запишем систему (4) в виде двух уравнений:

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\omega = 0, \qquad \partial^{\mu}\omega\partial_{\mu}\omega = 0. \tag{6}$$

Отметим, что они обладают замечательным свойством ковариантности к преобразованиям $\omega \to F(\omega)$ с произвольной аналитической функцией F. Выражая из второго уравнения системы (6) поле ω_t

$$\omega_t = \pm\sqrt{\vec{\nabla}\omega\vec{\nabla}\omega}, \tag{7}$$

и подставляя в первое, находим замкнутое уравнение второго порядка (по пространственным производным) для комплексного поля ω

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\nabla}\omega}{\sqrt{\vec{\nabla}\omega\vec{\nabla}\omega}}\right) = 0. \tag{8}$$

Для вещественных значений полей ω левая часть этого уравнения пропорциональна средней кривизне поверхности $\omega(x, y, z) = const$ (см. [3]) и, следовательно, поверхностями уровня этого уравнения являются минимальные поверхности (т.е. поверхности с нулевой средней кривизной), исследованию которых посвящена обширная литература (см., напр., [4, 5] и указанные там ссылки). Мы обсудим решение уравнения (8) при $\omega \in R$, а затем продолжим его в комплексную область.

3. С этой целью вначале используем преобразование годографа. Обозначим $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$ и $x_1 = \omega$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Поменяем роль зависимых и независимых переменных и будем искать

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

как функции x_1, x_2, x_3. На геометрическом языке такая зависимость означает введение криволинейной системы координат с элементом длины $ds^2 = dy_i dy_i = g_{ik}dx_i dx_k$ в евклидово пространство с координатами y_1, y_2, y_3. (Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.) Метрический тензор g_{ik} и ему обратный g_{ik} равны соответственно

$$g_{ik} = \frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_p}{\partial x_k}, \quad g^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_k}{\partial y_p}. \tag{9}$$

Для удобства и полноты изложения приведем необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В криволинейной системе координат в каждой точке $\vec{r} = (y_1, y_2, y_3) = \vec{r}(x)$ определен локальный базис $\vec{e}_i = \vec{r}_{,i}$ $(\vec{r}_{,i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i})$, изменение которого в пространстве в векторном

$$\vec{e}_{i,j} = \Gamma^k_{ij} \quad \vec{e}_k \tag{10}$$

и координатном виде

$$y_{n,i\,,j} = \Gamma^k_{ij} y_{n,k} \tag{11}$$

определяется символами Кристоффеля

$$\Gamma^k_{ij} = 1/2 g^{kn} (g_{in,j} + g_{jn,i} - g_{ij,n}). \tag{12}$$

Условие интегрируемости системы (10) (условие евклидовости пространства) приводит к обращению в нуль

$$R_{prsi} = 0 \tag{13}$$

тензора Римана R_{prsi}:

$$R_{prsi} = \frac{\partial \Gamma_{p,ri}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_{p,rs}}{\partial x_i} + \Gamma^m_{rs}\Gamma_{m,pi} - \Gamma^m_{ri}\Gamma_{m,ps}, \tag{14}$$

где $\Gamma_{m,ps} = g_{mn}\Gamma^n_{ps}$. Наконец, отметим важное соотношение

$$\frac{\partial^2 x_p}{\partial y_i \partial y_j} = -\Gamma^p_{ks} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_j}\,, \tag{15}$$

которое нетрудно вывести с помощью дифференцирования тождества

$$\frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \delta_{pn}$$

по переменной x_j и использования уравнения (11).

4. Сейчас применим методы классической геометрии для решения уравнения (8). Из (9) следует, что производные поля ω определяют компоненты $g^{ik} = (g^{-1})_{ik}$ дважды контравариантного метрического тензора, зависящего от x_1, x_2, x_3:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} H_3^2 + H_1^2 + H_2^2 & H_2 & H_3 \\ H_2 & 1 & 0 \\ H_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $H_i = \dfrac{\partial x_1}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Далее мы будем рассматривать H_α как новые независимые поля и найдем для них соответствующие уравнения. Из (15) сразу следует, что уравнение (8) можно записать как нелинейное уравнение первого порядка:

$$\left(g^{jk} g^{11} - g^{j1} g^{1k}\right) \Gamma^1_{jk} = 0, \tag{17}$$

где Γ^1_{jk} — символы Кристоффеля для метрики (16). Кроме того, из определения x_1, x_2, x_3 и (15) сразу следуют уравнения

$$\Gamma^2_{ik} = 0, \quad \Gamma^3_{ik} = 0. \tag{18}$$

Таким образом, решение уравнения (8) сведено к геометрической задаче — определению системы координат с метрикой (16) в евклидовом пространстве с дополнительными условиями, т.е. решению уравнения (13) для H_1, H_2, H_3 с редукциями (17), (18). Если метрический тензор известен, то зависимость $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, и, следовательно, поле $\omega(x, y, z)$ можно найти интегрированием переопределенной, но линейной системы (11).

Описание ортогональных систем координат в рамках метода обратной задачи рассеяния проведено в [6]. В нашем, более простом случае система уравнений (13, 17, 18) оказывается интегрируемой в квадратурах. Можно показать, что эта система эквивалентна системе четырех нелинейных уравнений первого порядка

$$-H_3 H_{1,2} + H_2 H_{1,3} + H_1(H_3 H_{2,1} - H_2 H_{3,1}) = 0, \tag{19}$$

$$H_3 H_{2,1} - H_2 H_{3,1} + H_{2,3} - H_{3,2} = 0, \tag{20}$$

$$H_2 H_{1,1} - H_1 H_{2,1} + H_{1,2} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} -H_1(H_2^2 + H_3^2)H_{1,2} + H_2(H_1^2 + H_3^2)H_{2,2} - 2H_2^2 H_3 H_{3,2} \\ +(H_1^2 + H_2^2)(H_3^2 H_{2,1} - H_2 H_3 H_{3,1} + H_2 H_{3,3}) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

После замены

$$H_1 = \frac{1}{F_1}, \quad H_2 = \frac{F_2}{F_1}, \quad H_3 = \frac{F_3}{F_1}$$

из уравнений (19–21) следует, что поля H выражаются через вспомогательное поле W:

$$H_1 = \frac{1}{W_{,x_1}}, \quad H_2 = -\frac{W_{,x_2}}{W_{,x_1}}, \quad H_3 = -\frac{W_{,x3}}{W_{,x_1}}. \tag{23}$$

Отсюда согласно определению H_i: $H_i = \dfrac{\partial x_1}{\partial y_i}$, $i = 1, 2, 3$, сразу получаем соотношение $y_1 = W(x_1, x_2, x_3)$, которое определяет решение уравнения (8) в неявном виде как

$$W\left(\omega\left(x, y, z, t\right), y, z, t\right) = x. \tag{24}$$

Подстановка (23) в (22) показывает, что поле W удовлетворяет уравнению

$$\left(1+W_{,y}^{2}\right) W_{,zz}+\left(1+W_{,z}^{2}\right) W_{,yy} -2W_{,y} W_{,z} W_{,yz}=0, \tag{25}$$

совпадающему с уравнением минимальных поверхностей. Решение (24), как и уравнение (8)), инвариантно к произвольным заменам поля (параметра) ω, линиями его уровня и являются минимальные поверхности. Продолжая это решение в комплексную область, мы будем рассматривать (24) как решение уравнения (8) и при комплексных значениях ω. Хотя решение уравнения (25) известно, применение соответствующих формул для нахождения зависимости ω от времени затруднено и удобно использовать следующую процедуру. С помощью дифференцирования (24) по $\vec{r}, t$ выразим производные ω_x, ω_y, ω_z, ω_t через производные поля W и подставим полученный результат в уравнение (7). В результате находим уравнение эйконала

$$W_{,t}^{2}-W_{,y}^{2}-W_{,z}^{2}=1 \tag{26}$$

для временной зависимости поля W.

5. Обсудим совместные решения уравнений (25) и (26), начиная с анализа последнего. Оно имеет решение

$$W=A+tB+yC+z\sqrt{-1+B^{2}-C^{2}}, \tag{27}$$

зависящее от трех произвольных постоянных A, B, C, которое является его полным интегралом. Поскольку (27) удовлетворяет уравнению (26) (плоскость-минимальная поверхность), получаем первый класс решений системы (4) в виде

$$A\left(\omega\right)+tB\left(\omega\right)+yC\left(\omega\right)\pm z\sqrt{-1+B\left(\omega\right)^{2}-C\left(\omega\right)^{2}}=x \tag{28}$$

с произвольными аналитическими функциями $A\left(\omega\right)$, $B\left(\omega\right)$, $C\left(\omega\right)$. Они являются аналогом волны Римана для уравнения Хопфа, допускают прямое обобщение на случай N-мерного пространства. Насколько нам известно, к настоящему времени это наиболее общие решения для релятивистких теорий размерности $D=(3,1)$. При $B\left(\omega\right)=0$, $C\left(\omega\right)=0$ (модель n-поля в пространстве $D=(2,0)$) ω-аналитическая функция $x\pm iz$ и простейшие решения, включая вихревые спирали, описаны в [1]. При $B\left(\omega\right)=0$ (пространство $D=(3,0)$) решения представимы в виде $\omega=F(\pm z\sqrt{-1+B\left(\omega\right)^{2}-C\left(\omega\right)^{2}}+yC\left(\omega\right)-x)$ (F, C — произвольные функции) и неоднозначны в общем случае. Простейшие однозначные решения типа кноидальных и вихревых "ежей" проанализированы в [2]. Удобно записать (28) в виде

$$\omega=F(k^{\mu}(\omega)x_{\mu})$$

через произвольную функцию F и волновые векторы $k^{\mu}(\omega)$, удовлетворяющие уравнению $k^{\mu}(\omega)k_{\mu}(\omega)=0$. Такая форма является прямым, но нетривиальным обобщением простейших решений типа линейной волны $\omega=F(k^{\mu}x_{\mu})$ ($k^{\mu}=const$) системы (6).

Построение второго класса решений проводим с помощью семейства огибающих полного интеграла (метод Лагранжа [7]) следующим образом. Положим A, B, C в (27) зависящими от поля α (и параметра ω) и найдем зависимость $\alpha=\alpha(y,z,t,\omega)$ из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=A^{'}+tB^{'}+yC^{'}+z\frac{B^{'}B+C^{'}C}{\sqrt{-1+B\left(\omega\right)^{2}-C\left(\omega\right)^{2}}}=0, \tag{29}$$

где $A^{'}=\dfrac{\partial A}{\partial\alpha}$ и т.д. Тогда, если α определим из этого уравнения, выражение (27) есть решение уравнения эйконала. Кроме того, подстановка (27) (где $\alpha=\alpha(y,z,t,\omega)$) и выражений для $\alpha_{,y}$, $\alpha_{,z}$, полученных из уравнений (29) после выполнения частного дифференцирования по y, z, в (25) приводит к нелинейному уравнению

$$(1+C^{2})B'^{2}-2BCB'C'+(-1+B^{2})C'^{2}=0. \tag{30}$$

Заменой $C(\alpha)=F(B(\alpha))$ находим явный вид функции $F[B]$ и определяем соотношение

$$C=i\cos(p)-B\sin(p), \tag{31}$$

необходимое для совместности решений уравнений (25) и (26). Произвольная постоянная p зависит от параметра ω. В результате получаем второй класс точных решений, определяемый неявной функцией

$$\begin{gathered}A(\omega,\alpha)+B(\omega,\alpha)(t+z\cos\left[p\left(\omega\right)\right]-y\sin\left[p\left(\omega\right)\right])\\ +i\left(y\cos\left[p\left(\omega\right)\right]+z\sin\left[p\left(\omega\right)\right]\right)=x\end{gathered} \tag{32}$$

с произвольными аналитическими функциями $A(\omega,\alpha))$, $B(\omega,\alpha)$, $p(\omega)$. При произвольно заданном их виде поле $\alpha(y,z,t,\omega)$ находим из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=\left(-t-z\cos\left[p\left(\omega\right)\right]+y\sin\left[p\left(\omega\right)\right]\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,. \tag{33}$$

Отметим, что прообразом точки на сфере ($(\theta,\Phi)=const\rightarrow\omega=const$) в фиксированный момент времени для решений (28) являются прямые, образованные пересечением плоскостей, и произвольное число одномерных кривых для решений (32).

Вырожденным решениям отвечают постоянные значения $B(\omega,\alpha)$. Тогда, как следует из (30), $B=\pm 1$. Анализ показывает при $B=1$ поле $\alpha(y,z,t,\omega)$ зависит от меньшего числа независимых переменных $\alpha(x,y,z,t,\omega)=\alpha(y+iz,\omega)$ и при произвольно заданных $A(\omega,\alpha,B(\omega,\alpha)$ поле $\alpha(y+iz,\omega)$ определяется уравнением $\dfrac{\partial A}{\partial\alpha}=(-y-iz)\dfrac{\partial B}{\partial\alpha}$. Тогда, согласно (28), вырожденное решение имеет простой вид

$$\omega = F[x-t, y+iz] \tag{34}$$

с произвольной функцией F.

6. Итак, мы показали эффективность применения дифференциально-геометрического метода для интегрирования уравнений $\vec{n}$-поля. Оказывается он полезным и при интегрировании трехмерной киральной $SU(2)$. Возникающие при этом новые задачи дифференциальной геометрии и их решение будет изложено в другом месте. Примечательно появление геометрических образов и структур типа минимальных поверхностей при интегрировании этих популярных классических моделей.

Автор признателен В.Е. Захарову, Е.А. Кузнецову, С.В. Манакову, А.В. Михайлову, М. Прохоровой за интерес к работе, плодотворные обсуждения ее результатов и полезные замечания. Выражаю благодарность В.А. Марченко и организаторам конференции "Обратные задачи и нелинейные уравнения", посвященной восьмидесятилетию академика В.А. Марченко, научная деятельность которого оказала на автора неоценимое влияние.

Список литературы

[1] *А.Б. Борисов*, Спиральные вихри в ферромагнетике. — *Докл. РАН*, (2001), т. 379, № 3, с. 319–321.

[2] *А.Б. Борисов*, Трехмерные спиральные структуры в ферромагнетике. — *Письма в ЖЭТФ*, (2002), т. 76, № 2, с. 95–98.

[3] *А.Дж. Мак-Коннел*, Введение в тензорный анализ. Физматгиз, Москва (1962).

[4] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко*, Современная геометрия. Наука, Москва (1979).

[5] *А.А. Тужилин, А.Т. Фоменко*, Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. Наука, Москва (1991).

[6] *V.E. Zakharov*, Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate system and Hamiltonian. Integrable systems of hydrodynamic type,I: Integration of the Lame equations. — *Duke Math. J.* (1998), v. 94, No. 1, p. 103–151.

[7] *Э. Гурса*, Курс математического анализа.Т. 2, ч. 2. Госиздат, Москва, Петроград (1923).

Differential-geometrical method and new class of exact solutions of $\vec{n}$-field equations

A.B. Borisov

The concepts of classical differential geometry have been used to develop a new method for producing a broad class of solutions for equations of $\vec{n}$-field theory. The method is based on hodograph trasformation and subsequent treating the desired equation as a differential connection for a curvilinear coordinate system in a Enclidean space. The solutions produced this way depend on three arbitrary functions.