Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 3, с. 411–423

Обратная задача рассеяния на полуоси для системы с треугольным матричным потенциалом

Е.И. Бондаренко

Харьковская государственная академия железнодорожного транспорта
пл. Фейербаха, 7, Харьков, 61050, Украина
E-mail:bond@kart.edu.ua

Ф.С. Рофе-Бекетов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:rofebeketov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 24 марта 2003 г.

Решена обратная задача рассеяния на полуоси для системы дифференциальных уравнений с треугольным матричным потенциалом.

Розв'язано обернену задачу розсіяння на півосі для системи диференціальних рівнянь з трикутним матричним потенціалом.

Глубокоуважаемому и дорогому Владимиру Александровичу Марченко с наилучшими пожеланиями в честь его восьмидесятилетия

Рассматривается задача рассеяния для систем уравнений Шредингера на полуоси с верхнетреугольным матричным потенциалом $V(x) = (v_{rd}(x))_1^n$: $v_{rd}(x) \equiv 0,\ r > d$, с вещественной главной диагональю $\operatorname{Im} v_{rr}(x) \equiv 0,\ r = 1, \dots, n$; с условием $Y(0,k) = 0$:

$$l[Y] \equiv -Y'' + V(x)Y = k^2 Y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

где, как и в [1, 2],

$$\int_0^\infty x|V(x)|\mathrm{dx} < \infty. \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 47A40, 81U40.

Кроме (1), рассматриваем также левое или $\sim$-уравнение:

$$\widetilde{l}[\widetilde{Z}] \equiv -\widetilde{Z}'' + \widetilde{Z}V(x) = k^2\widetilde{Z}, \quad 0 < x < \infty. \tag{3}$$

Решения $E(x,k)$, $\widetilde{E}(x,k)$ уравнений (1), (3) с асимптотикой

$$E(x,k) \sim e^{ikx}I, \quad \widetilde{E}(x,k) \sim e^{ikx}I, \quad x \to \infty, \ \operatorname{Im} k \geq 0, \tag{4}$$

где I — единичная матрица, называем решением (соответственно левым или $\sim$-решением) Йоста, $E(k) = E(0,k)$, $\widetilde{E}(k) = \widetilde{E}(0,k)$ называем матрицей и $\sim$-матрицей-функцией Йоста. Известны представления

$$E(x,k) = Ie^{ikx} + \int\limits_x^\infty K(x,t)e^{ikt}\mathrm{dt}, \ \widetilde{E}(x,k) = Ie^{ikx} + \int\limits_x^\infty \widetilde{K}(x,t)e^{ikt}\mathrm{dt}, \ \mathrm{Im} k \geq 0, \tag{5}$$

с помощью операторов преобразования [1, 2], где

$$V(x) = -2dK(x,x)/dx = -2d\widetilde{K}(x,x)/dx. \tag{6}$$

Обозначим $G(x,k)$, $\widetilde{G}(x,k)$ решения (1), соответственно (3), при условиях

$$G(0,k) = 0, \ G'(0,k) = I; \quad \widetilde{G}(0,k) = 0, \ \widetilde{G}'(0,k) = I, \ k \in \mathbf{C}. \tag{7}$$

Наряду с решениями Йоста (4) нам понадобятся решения

$$E^\wedge(x,k) \sim e^{-ikx}I, \quad \widetilde{E}^\wedge(x,k) \sim e^{-ikx}I, \quad x \to \infty, \ \operatorname{Im} k \geq 0, \ k \neq 0, \tag{8}$$

образующие с $E(x,k)$ и соответственно с $\widetilde{E}(x,k)$ фундаментальные системы при $k \neq 0$. Матричное решение $E^\wedge(x,k)$ построено и исследовано в [2], решение $\widetilde{E}^\wedge(x,k)$ строим аналогично. Однако, в отличие от решений Йоста, решения (8) своей асимптотикой не определяются однозначно при $\operatorname{Im} k > 0$. Но если фиксировано одно из решений (8), например, $E^\wedge(x,k)$, то второе определится однозначно дополнительным условием

$$W\{\widetilde{E}^\wedge(x,k), E^\wedge(x,k)\} \equiv \widetilde{E}^\wedge(x,k)\tfrac{d}{dx}E^\wedge(x,k) - \tfrac{d}{dx}\widetilde{E}^\wedge(x,k)E^\wedge(x,k) = 0,$$
$$\operatorname{Im} k \geq 0, \ k \neq 0.$$

Для каждого $\rho_0 > 0$ решения (8) можно выбрать аналитическими по k при $|k| > \rho_0$, $\operatorname{Im} k > 0$. (См. также [3, 4].) Наконец, обозначим при $k \in \mathbf{R}$

$$\begin{gathered} U(x,k) = E(x,k) - E(x,-k)S(-k) = 2ikG(x,k)\widetilde{E}^{-1}(-k), \\ \widetilde{U}(y,-k) = \widetilde{E}(y,-k) - S(k)\widetilde{E}(y,k) = -2ikE^{-1}(k)\widetilde{G}(y,-k). \end{gathered} \tag{9}$$

Для них $U(0,k)=\widetilde{U}(0,k)=0$, а

$$S(k)=E^{-1}(k)E(-k)=\widetilde{E}(-k)\widetilde{E}^{-1}(k) \tag{10}$$

есть матрица рассеяния. При $\operatorname{Im} k>0$ вводим матричные нормировочные полиномы по формулам* (ср. [4] для скалярного случая):

$$Z_j(t)=ie^{-ik_jt}\mathrm{Res}_{k_j}\{e^{ikt}E^{-1}(k)E^{\wedge}(k)\}=ie^{-ik_jt}\mathrm{Res}_{k_j}\{e^{ikt}\widetilde{E}^{\wedge}(k)\widetilde{E}^{-1}(k)\}. \tag{11}$$

Собственные числа задачи (1) $k_j^2,\ j=1,\dots,p$ совпадают с собственными числами задачи (3) и совокупностью собственных чисел скалярных задач рассеяния для вещественных диагональных элементов матричного потенциала $V(x)$, т.к. они являются корнями детерминанта

$$\det E(k)=e_{11}(k)\dots e_{nn}(k),\ \operatorname{Im} k\geq 0, \tag{12}$$

где $e_{ll}(k)$ — функции Йоста вещественных скалярных задач. Поэтому количество p собственных чисел конечно и $k_j^2<0$. (Мы предполагаем отсутствие виртуального уровня.)

Лемма 1. (Ср. [5, лемма 2]). *Данные рассеяния (ДР), т.е. величины*

$$\{S(k),k\in\mathbf{R};\ k_j^2,Z_j(t)\,j=\overline{1,p}\}, \tag{13}$$

для задач (1) и (3) рассматриваемого вида совпадают. В частности, геометрические кратности собственных чисел совпадают: $\dim\operatorname{Ker} E(k_j)=\dim\operatorname{Ker}\widetilde{E}(k_j)$, *полюсы матриц* $E^{-1}(k)$ *и* $\widetilde{E}^{-1}(k)$ *в одинаковых точках* k_j, $\operatorname{Im}k_j>0$, *имеют одинаковую кратность.*

Лемма 2. *Для рассматриваемой задачи (1), (2) справедливо равенство Парсеваля при произвольных матрицах-функциях* $\Phi(t),\ \Psi(t)\ \in L^2(0,\infty)$*:*

$$\begin{gathered}\int_0^\infty\Phi(t)\Psi(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty U(\Phi,k)\widetilde{U}(\Psi,-k)\mathrm{dk}\\+\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=0}^{P_j}\sum_{l=0}^{P_j-r}\frac{1}{i^ri^lr!l!}\frac{d^r}{dk^r}(E(\Phi,k))_{k=k_j}\frac{d^{l+r}}{dt^{l+r}}(Z_j(t))_{t=0}\frac{d^l}{dk^l}(\widetilde{E}(\Psi,k))_{k=k_j},\end{gathered} \tag{14}$$

где P_j *— степень полинома* $Z_j(t)$, $E(\Phi,k)=\int_0^\infty\Phi(t)E(t,k)\mathrm{dt}$,

$\widetilde{E}(\Psi,k)=\int_0^\infty\widetilde{E}(t,k)\Psi(t)\mathrm{dt}$, $U(\Phi,k)=\mathrm{l.i.m.}_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\Phi(t)U(t,k)\mathrm{dt}$,

$\widetilde{U}(\Psi,k)=\mathrm{l.i.m.}_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\widetilde{U}(t,k)\Psi(t)\mathrm{dt}$, l.i.m. *означает сходимость в среднем квадратичном.*

* Можно показать, что $Z_j(t)$ не зависит от выбора $E^{\wedge}(k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится методом контурного интегрирования (ср. [5, лемма 3]). Вместо P_j в (14) всегда можно взять $n-1$.

Лемма 3. (Обобщение леммы Ньютона и Йоста). *Пусть* $A(z)$ — *квадратная матрица-функция, регулярная в круге* $|z|<1$ *и такая, что* $\det A(0)=0$, $\det A(z)\neq 0$ *при* $0<|z|<1$. *Обратная матрица* $A^{-1}(z)$ *имеет в точке* $z=0$ *полюс порядка* k *в том и только том случае, если:*

1^0. *Из равенств* $A(0)a_1=0$, $A(0)a_2+A'(0)a_1=0, \dots\ A(0)a_{k+1}+A'(0)a_k+\dots+\frac{1}{k!}A^{(k)}(0)a_1=0$, *где* $a_1,\ a_2,\dots,a_{k+1}$ — *какие-нибудь постоянные векторы, следует* $a_1=0$;

2^0. *Из меньшего, чем* $k+1$ *числа равенств вида* 1^0 *не следует* $a_1=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о является обобщением доказательства леммы 2.2.1 [2].

Теорема 1. *Для того чтобы величины (13) были ДР задачи (1), (2) с верхнетреугольным матричным* $n\times n$ *потенциалом (вещественным на диагонали и без виртуального уровня), необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $S(k)$, $Z_j(t)$ *были* $n\times n$ *верхнетреугольными,* $S(k)=S^{-1}(-k)$, $k_j^2<0$, $p<\infty$, *и выполнялись следующие условия* **a–d**.

a) *Условия* $\mathrm{I_S}, \mathrm{II_S}$ *из [2]:*

$\mathrm{I_S}$. *Матрица* $I-S(k)$ *есть преобразование Фурье матрицы*

$$F_S(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(I-S(k))e^{ikt}\mathrm{dk}, \tag{15}$$

причем элементы матрицы $F_S(t)$ *суммируемы на оси* $(-\infty,\infty)$, *а потому* $S(k)$ *непрерывна.*

$\mathrm{II_S}$. *При всех* $t>0$ *существует производная* $F'_S(t)$ *и* $\int\limits_0^\infty t|F'_S(t)|dt<\infty$.

b) *Справедливы формулы Левинсона для каждого набора диагональных элементов матриц (13)*

$$\frac{1}{2\pi i}\ln s_{rr}\Big|_{+\infty}^{+0}=\sum_{j=1}^{p}\operatorname{sign} z_{rr}^{[j]},\ r=1,\dots,n,$$

где $|s_{rr}(k)|=1$, $s_{rr}(0)=1$, $z_{rr}^{[j]}$ *являются неотрицательными константами.*

c) *Степени элементов* $z_{rd}^{[j]}(t)$ *матричного полинома* $Z_j(t)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\deg z_{rd}^{[j]}(t)\le\sum_{l=r}^{d}\operatorname{sign} z_{ll}^{[j]}-1,\ 1\le r\le d\le n. \tag{16}$$

(Степень тождественно нулевого элемента полагаем отрицательной.)

d) *Если* $z_{rr}^{[j]} = 0$, *то* r*-й столбец* $\widehat{z}_r^{[j]}(t)$ *матрицы* $Z_j(t)$ *есть линейная комбинация предыдущих столбцов, а* r*-я строка* $\overrightarrow{z}_r^{[j]}(t)$ *является линейной комбинацией последующих строк, т.е. при некоторых константах* $\alpha_{l,r}^{[j]},\ \beta_{l,r}^{[j]} \in \mathbf{C}$

$$\widehat{z}_r^{[j]}(t) = \sum_{l=1}^{r-1} \alpha_{l,r}^{[j]} \widehat{z}_l^{[j]}(t), \quad \overrightarrow{z}_r^{[j]}(t) = \sum_{l=r+1}^{n} \beta_{l,r}^{[j]} \overrightarrow{z}_l^{[j]}(t). \tag{17}$$

Производная каждого столбца матрицы $Z_j(t)$ *есть линейная комбинация предыдущих столбцов, а каждой строки — линейная комбинация последующих строк, т.е. при некоторых константах* $\gamma_{l,r}^{[j]},\ \delta_{l,r}^{[j]} \in \mathbf{C}$

$$\frac{d}{dt}\widehat{z}_r^{[j]}(t) = \sum_{l=1}^{r-1} \gamma_{l,r}^{[j]} \widehat{z}_l^{[j]}(t), \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{z}_r^{[j]}(t) = \sum_{l=r+1}^{n} \delta_{l,r}^{[j]} \overrightarrow{z}_l^{[j]}(t). \tag{18}$$

Эквивалентно условие **d** *формулируется в матричной форме так: при некоторых постоянных верхнетреугольных нильпотентных матрицах* A_j, B_j, C_j, D_j $\frac{d}{dt}Z_j(t) = Z_j(t)A_j = B_jZ_j(t)$, *а также* $\mathrm{diag}\{1-\mathrm{sign}\, z_{rr}^{[j]}\}_{r=1}^{n} Z_j(t) = Z_j(t)C_j$, $Z_j(t)\mathrm{diag}\{1-\mathrm{sign}\, z_{rr}^{[j]}\}_{r=1}^{n} = D_jZ_j(t)$. *(Матрицы* $A_j - D_j$ *определены, вообще говоря, не единственным образом.)*

З а м е ч а н и е 1. Условие **d** достаточно потребовать только для строк матрицы $Z_j(t)$, тогда для столбцов оно будет выполнено автоматически, и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о замечания 1 проводим, учитывая, что на диагонали $Z_j(t)$ стоят константы.

З а м е ч а н и е 2. Следующее условие вытекает из условия **d**, но не эквивалентно ему*. Для любой матрицы $Z_j([r,d],t)$ порядка $(d-r+1)\times(d-r+1)$, $d=1,\dots,n$, состоящей из элементов матриц $Z_j(t)$, которые стоят на пересечении строк и столбцов с номерами $r,\ r+1,\dots d$ $(1\le r\le d\le n)$, справедливы равенства**

$$\mathrm{rg}\ Z_j([r,d],t) = \mathrm{rg}\ \mathrm{diag}\ Z_j([r,d],t) = \mathrm{rg}\ \mathrm{diag}\ Z_j([r,d],0),\ j=1,\dots,p. \tag{19}$$

Это условие эквивалентно требованию, что нулевому собственному числу в любой из матриц $Z_j([r,d],t)$ отвечает простая жорданова структура, или, что эквивалентно,

$$\mathrm{Ker}\ Z_j([r,d],t) \cap \mathrm{Ran}\ Z_j([r,d],t) = \{0\},$$

* Однако при $n=2$ условие **d** можно заменить на (19), учитывая **c**.

**Аналогичные обозначения применяем для любых матриц и векторов. Кроме того, обозначаем $\mathrm{diag}\ A = \mathrm{diag}\ \{a_{11},\dots,a_{nn}\}$ — диагональную часть матрицы $A=(a_{rs})_1^n$.

которое, таким образом, является необходимым свойством нормировочных матричных полиномов рассматриваемой задачи рассеяния.

Доказательство замечания 2 (формулы (19)) проводится по индукции. Для столбцов, например, переход от $n-1$ к n совершается очевидным образом при $z_{nn}^{[j]} \neq 0$, а в случае $z_{nn}^{[j]} = 0$ непосредственно следует из **d**. Для строк вместо $z_{nn}^{[j]}$ рассматриваются значения $z_{11}^{[j]}$.

Доказательство теоремы 1. Докажем *необходимость* условий теоремы 1. Прежде всего заметим, что ядро $K(x,y)$ оператора преобразования должно удовлетворять уравнению Марченко

$$K(x,y) + F(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)F(t+y)\mathrm{dt} = 0, \tag{20}$$

где (см. (15))

$$F(t) = F_S(t) + \sum_{j=1}^p Z_j(t)e^{ik_jt}. \tag{21}$$

Это уравнение выводится контурным интегрированием совершенно аналогично эрмитову случаю (см. [2, (гл. III)] и также [4] для скалярного несамосопряженного случая). Заметим также, что если потенциал задачи $V(x)$ имеет верхнетреугольный вид, то в силу построения оператор преобразования $K(x,t)$ [2, (с. 21)] имеет верхнетреугольный вид, а значит, ДР тоже имеют верхнетреугольный вид. Равенство $S(k) = S^{-1}(-k)$, $k \in \mathbf{R}$ следует непосредственно из (10), где матрица Йоста в силу определения (5) — верхнетреугольняя. Отрицательность собственных чисел k_j^2 и конечность их числа следуют из (12). Докажем условия **a** и **b**. Для каждого набора диагональных элементов (13) условия I_S и II_S [2], а также формулы Левинсона выполнены, как для скалярных вещественных задач [1]. Условие I_S для внедиагональной части матрицы $S(k)$ в нашем случае выводим повторением части доказательства теоремы 2.3.1 [2] с учетом (12): $\det E(k) \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$. Условие II_S для внедиагонального элемента $S(k)$ выводим аналогично доказательству теоремы 3.2.1 [2] с учетом равенства (21), где $Z_j(t)$ — матричные полиномы не выше $n-1$ степени в силу условия **c**, которое следует из определения нормировочного полинома (11), т.к. $E^{-1}(k)$ может иметь при $k = k_j$ полюс порядка не более, чем $n - \mathrm{rg\ diag}\ E(k_j) = \mathrm{rg\ diag}\ Z_j(t) = \sum\limits_{l=1}^n \mathrm{sign}\, z_{ll}$. Аналогичные равенства для матриц вида $Z_j([r,d],t)$ приводят к (16). Необходимость **c** доказана.

Зафиксируем теперь $j =\in [1,p]$ и для простоты записи положим $Z(t) := Z_j(t)$; $m := m_j = \mathrm{rg\,diag}\, Z_j(t)$; $P := P_j = \deg\ Z_j(t)$. Докажем необходимость условия **d** математической индукцией по размерности n. Справедливость условия **d** при $n=2$ проверяем непосредственно с учетом определения (11) для нормировочных полиномов.

Пусть теперь условие **d** верно для всех нормировочных полиномов-матриц размера не больше $n-1$. Докажем его для строк нормировочных полиномов-матриц размера n. Пусть $z_{11}=0$. Имеем

$$Z(t) = ie^{-ik_jt}\mathrm{Res}_{k_j}\{e^{ikt}E^{-1}(k)E^{\wedge}(k)\}$$
$$= ie^{-ik_jt}\mathrm{Res}_{k_j}\{e^{ikt}\begin{pmatrix} \frac{e_{11}^{\wedge}(k)}{e_{11}(k)} & \frac{\overrightarrow{e}_1^{\wedge 0}(k)}{e_{11}(k)} - \frac{\overrightarrow{e}_1^{(}k)}{e_{11}(k)}E^{-1}([2,n],k)E^{\wedge}([2,n],k) \\ 0 & E^{-1}([2,n],k)E^{\wedge}([2,n],k) \end{pmatrix}\} \tag{22}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{z}_1^0(t) \\ 0 & Z([2,n],t) \end{pmatrix},$$

где вектор-строки $\overrightarrow{e}_1^0(k) = (e_{12}(k),\dots,e_{1n}(k))$, $\overrightarrow{e}_1^{\wedge 0}(k) = (e_{12}^{\wedge}(k),\dots,e_{1n}^{\wedge}(k))$ состоят из $(n-1)$ элементов матриц $E(k)$, $E^{\wedge}(k)$, определенных в (4), (8), $\overrightarrow{z}_1^0(t) = -ie^{-ik_jt}\mathrm{Res}_{k_j}\{e^{ikt}\frac{\overrightarrow{e}_1^0(k)}{e_{11}(k)}E^{-1}([2,n],k)E^{\wedge}([2,n],k)\}$, следует, что $e_{11}(k_j) \neq 0$, т.к. $e_{11}(k_j)$ и $e_{11}^{\wedge}(k_j)$ не могут одновременно обращаться в нуль, а потому при $e_{11}(k_j)=0$ было бы $z_{11}\neq 0$.

Докажем второе из равенств (17) при $r=1$, $z_{11}=0$. Учитывая, что $P\leq m$ в силу (16), мы можем всегда искать вычет в точке k_j, как если бы там был полюс порядка m, при этом используя при дифференцировании по k формулу Лейбница. Поэтому, т.к. из условия **c** теоремы 1 следует, что $\deg \overrightarrow{z}_r \leq n-r$, имеем, учитывая, что $\overrightarrow{z}_1^0(t)$ есть вычет от линейной комбинации (с переменными коэффициентами) строк матрицы $E^{-1}([2,n],k)E^{\wedge}([2,n],k)$:

$$\overrightarrow{z}_1(t) = \sum_{r=2}^{n} a_{0r}^{(1)}\overrightarrow{z}_r(t) + \sum_{r=2}^{n-1} a_{1r}^{(1)}\overrightarrow{z}'_r(t) + \ldots + \sum_{r=2}^{n-m+1} a_{m-1,r}^{(1)}\overrightarrow{z}_r^{(m-1)}(t), \tag{23}$$

где положено $a_{sr}^{(1)} = -\frac{1}{i^s s!}\frac{d^s}{dk^s}(\frac{e_{1r}(k)}{e_{11}(k)})_{k_j}$, т.е. в случае $z_{11}=0$, $\overrightarrow{z}_1(t)$ оказывается линейной комбинацией с постоянными константами последующих строк и их всевозможных производных по t. Аналогичные формулы имеем для любой строки $\overrightarrow{z}_q(t)$, если $z_{qq}=0$. Они, как и (23), являются предварительными результатами для доказательства (17).

Рассмотрим теперь те $q\in[1,n]$, при которых $z_{qq}\neq 0$. В этом случае $e_{qq}(k_j)=0$, $\dot{e}_{qq}(k_j)\neq 0$ (см. [1, лемма 3.1.6]). Аналогично $\overrightarrow{z}_1^0(t)$ из (22) введем $\overrightarrow{z}_q^0(t)$ по формуле $\overrightarrow{z}_q(t) = (0,\dots,\,0,\,z_{qq},\,\overrightarrow{z}_q^0(t))$, где $\overrightarrow{z}_q^0(t) = i\frac{\overrightarrow{e}_q^{\wedge 0}}{\dot{e}_{qq}} - ie^{-ik_jt}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dk^{m-1}}\{(k-k_j)^m\frac{\overrightarrow{e}_q^0(k)}{e_{qq}(k)}E^{-1}([q+1,n],k)E^{\wedge}([q+1,n],k)e^{ikt}\}_{k_j}$, $\overrightarrow{e}_q^0(k) = \overrightarrow{e}_q([q+1,n],k)$. Снова используя формулу Лейбница и обозначая

$b^{(q)}_{sr} = -\frac{1}{i^s s!}\frac{d^s}{dk^s}(\frac{e_{qr}(k)}{e_{qq}(k)})_{k_j}$, имеем для $q \in \overline{1, n-1} : z_{qq} \neq 0$:

$$\overrightarrow{z}'_q(t) = \sum_{r=q+1}^{n} b^{(q)}_{0r}\overrightarrow{z}_r(t) + \sum_{r=q+1}^{n-1} b^{(q)}_{1r}\overrightarrow{z}'_r(t) + \ldots + \sum_{r=q+1}^{n-m+2} b^{(q)}_{m-2,r}\overrightarrow{z}^{(m-2)}_r(t). \tag{24}$$

Аналогичные равенства при $z_{qq} = 0$ получаем дифференцированием по t формулы (23) и аналогичных формул для $\overrightarrow{z}_q(t)$ вместо $\overrightarrow{z}_1(t)$. Таким образом, при всех $q = \overline{1, n-1}$ и соответствующем выборе констант γ, имеем, учитывая, что $\overrightarrow{z}'_n(t) \equiv 0$:

$$\overrightarrow{z}'_q(t) = \sum_{r=q+1}^{n} \gamma^{(q)}_{0r}\overrightarrow{z}_r(t) + \sum_{r=q+1}^{n-1} \gamma^{(q)}_{1r}\overrightarrow{z}'_r(t) + \ldots + \sum_{r=q+1}^{n-m+1} \gamma^{(q)}_{m-1,r}\overrightarrow{z}^{m-1}_r(t).$$

Отсюда получаем последовательно $\overrightarrow{z}'_{n-1}(t) = \gamma^{(n-1)}_{0n}\overrightarrow{z}_n(t)$, а поэтому $\overrightarrow{z}'_{n-2}(t) = \gamma^{(n-2)}_{0,n-1}\overrightarrow{z}_{n-1}(t) + \gamma^{(n-2)}_{0n}\overrightarrow{z}_n(t) + \gamma^{(n-2)}_{1,n-1}\overrightarrow{z}'_{n-1}(t) = \sum\limits_{r=n-1}^{n} \beta_{r,n-2}\overrightarrow{z}_r(t)$. Отсюда $\overrightarrow{z}''_{n-2}(t) = \sum\limits_{r=n-1}^{n} \beta_{r,n-2}\overrightarrow{z}'_r(t) = \beta_{n-1,n-2}\gamma^{(n-1)}_{0n}\overrightarrow{z}_n(t)$, и потому $\overrightarrow{z}'_{n-3}(t) = \gamma^{(n-3)}_{0,n-2}\overrightarrow{z}_{n-2}(t) + \gamma^{(n-3)}_{0,n-1}\overrightarrow{z}_{n-1}(t) + \gamma^{(n-3)}_{1,n-2}\overrightarrow{z}'_{n-2}(t) + \gamma^{(n-3)}_{1,n-1}\overrightarrow{z}'_{n-1}(t)$ $+\gamma^{(n-3)}_{2,n-2}\overrightarrow{z}''_{n-2}(t) = \sum\limits_{r=n-2}^{n} \beta_{r,n-3}\overrightarrow{z}_r(t)$, а следовательно, $\overrightarrow{z}''_{n-3}(t) = \sum\limits_{r=n-2}^{n} \beta_{r,n-3}$ $\overrightarrow{z}'_r(t) = \sum\limits_{r=n-2}^{n-1} \beta_{r,n-3}\overrightarrow{z}'_r(t) = \sum\limits_{r=n-1}^{n} \mathrm{c}_{r,n-3}\overrightarrow{z}_r(t)$. Продолжая эту циклическую процедуру, получим, что *производная любого порядка от любой строки нормировочного матричного полинома является линейной комбинацией последующих строк.* Этим доказана необходимость (18).

Отсюда же и из (23) получаем необходимость при $z_{11} = 0$ условия (17) для $r = 1$ и аналогично для любого r, если $z_{rr} = 0$. Необходимость условий теоремы 1 доказана.

Докажем *достаточность.* Из условий **a** и **b** теоремы 1 следует, что диагональные величины (13) являются ДР вещественных скалярных задач [1]. Решение $K(x, y)$ уравнения Марченко, построенного по величинам (13), имеет верхнетреугольный вид, существует и единственно в силу верхнетреугольного вида величин (13) и разрешимости диагональных задач. Значит, потенциал $V(x) = -2dK(x, x)/dx$ и решение Йоста $E(x, k)$ (5) имеют верхнетреугольный вид. Покажем теперь индукцией по n, что

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{1}{i^r r!}\frac{d^r}{dk^r}E(k_j)Z^{(n-1-m+r)}_j(0) = 0, \quad m = \overline{0, n-1}; \tag{25}$$

$$U(0,k)=E(k)-E(-k)S(-k)=0,\quad k\in\mathrm{R},\tag{26}$$

где $U(x,k)$ определено по найденным $E(x,\pm k)$ в соответствии с (9).

Известно [1], что при $n=1$ равенства (25), (26) выполнены. Покажем теперь, что если (25), (26) верны для матриц размера меньше n, то (25), (26) верны и для матриц $n\times n$, откуда будет следовать, что (13) являются ДР. Итак, учитывая условие **c** теоремы 1, имеем из (25) для $\{S([1,q],k);\ k_j^2,$ $Z_j([1,q],t)\}$ при $q=1,2,\dots,n-1$, что

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{i^r r!}\frac{d^r}{dk^r}\overrightarrow{e}_1(k_j)(\widehat{z}_q^{[j]})_j^{(q-1-m+r)}(0)=0,\quad m=\overline{0,q-1},\quad q=\overline{1,n-1},\tag{27}$$

где $\overrightarrow{e}_1(k)=(e_{11}(k),\dots,e_{1n}(k))$; $\widehat{z}_q^{[j]}(t)=(z_{1q}^{[j]}(t),\dots,z_{qq}^{[j]},0,\dots,0)^T$.

Осталось показать, что (27) верно и при $q=n$. Мы ограничиваемся строкой $\overrightarrow{e}_1(k_j)$ вместо матрицы $E(k_j)$, т.к. остальные строки без их первых элементов $e_{r1}=0,\ r=2,\dots,n$, входят в матрицу $E([2,n],k_j)$, а по предположению индукции (25) верно для матриц $E([2,n],k_j)$ и $Z_j([2,n],t)$.

Рассмотрим два случая (при заданном j):

1) $z_{nn}^{[j]}=0$. Тогда из условия **c** следует, что $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\widehat{z}_n^{[j]}(0)=0$, а из **c** и **d** (17) и последовательных производных до порядка $(n-2)$ от равенства (17) для столбцов, а также из (27) при всех $q\in[1,n-1]$, получаем (27) при $q=n$, а значит, верность равенств (25) установлена в этом случае.

2) $z_{nn}^{[j]}\neq 0$. Тогда из условий **c** и **d**, учитывая равенство (18) для столбцов и его последовательные производные до порядка $n-1$ и (27) с $q=1,\dots,n-1$, получаем для системы вида (27) с $q=n$ справедливость $(n-1)$ первых равенств.

Докажем теперь последнее из равенств системы (27), взятой при $q=n$. Обозначим $K_D(x,y)$ и $F_D(t)$ — диагональные части матриц $K(x,y)$ и $F(t)$. Они отвечают диагоналям матриц (13), а эти диагонали, как уже отмечалось, являются ДР в силу теории скалярной задачи рассеяния [1]. Обозначим эти диагональные ДР так:

$$\{S_D(k)=\mathrm{diag}\ S(k),k\in\mathbf{R};\ k_j^2<0,\ Z_D^{[j]}=\mathrm{diag}\ Z_j(t)\,j=1,\dots,p\}.\tag{28}$$

При $x=0$ для

$$K^0(0,y):=K(0,y)-K_D(0,y)\tag{29}$$

имеем, вычитая уравнения Марченко задач (13) и (28) одно из другого,

$$K^0(0,y)+\int_0^\infty K^0(0,t)F_D(t+y)\mathrm{dt}=-F^0(y)-\int_0^\infty K(0,t)F^0(t+y)\mathrm{dt},$$

где

$$F^0(t) \equiv F(t) - F_D(t) = F_S^0(t) + \sum_{j=1}^{p} [Z_j^0(0) e^{ik_j t} + Z_j'(0) t e^{ik_j t} + \ldots + Z_j^{(n-1)}(0) \tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{ik_j t}],$$
$$Z_j^0(0) = Z_j(0) - Z_D^{[j]},$$
$$F_S^0(t) = -\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^0(k) e^{ikt} \mathrm{dk},$$
$$S^0(k) = S(k) - S_D(k).$$

Из этого, учитывая представление (5) и то, что в силу предположения индукции справедливы первые $n-1$ из равенств (25), получаем

$$K^0(0,y) + \int_0^{\infty} K^0(0,t) F_D(t+y) \mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) S^0(k) e^{iky} \mathrm{dk} - \sum_{j=1}^{p} [E(k_j) Z_j^0(0)$$

$$+ \frac{1}{i} \dot{E}(k_j) Z_j'(0) + \frac{1}{2! i^2} \ddot{E}(k_j) Z_j''(0) + \ldots + \frac{1}{i^{n-1}(n-1)!} E^{(n\dot{-}1)}(k_j) Z_j^{(n-1)}(0)] e^{ik_j y}.$$

Отсюда, т.к. недиагональные элементы матриц K и K^0 совпадают и, в частности, $k_{1n}^0(0,y) = k_{1n}(0,y)$, следует равенство

$$\begin{aligned} k_{1n}(0,y) + \int_0^{\infty} k_{1n}(0,t) f_{nn}(t+y) \mathrm{dt} = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{e}_1(k) \widehat{s}_n^0(k) e^{iky} \mathrm{dk} \\ - \sum_{j=1}^{p} [\overrightarrow{e}_1(k_j) (\widehat{z}_n^{[j]})^0(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \tfrac{1}{i^r r!} \tfrac{d^r}{dk^r} \overrightarrow{e}_1(k_j) (\widehat{z}_n^{[j]})^{(r)}(0)] e^{ik_j y}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $f_{nn}(y)$ — элемент матрицы $F_D(y)$, $\widehat{s}_n^0(k) = (s_{1n}(k), \ldots, s_{n-1,n}(k),\ 0)^T$, $(\widehat{z}_n^{[j]})^0(0) = (z_{1n}^{[j]}(0), \ldots, z_{n-1,n}^{[j]}(0),\ 0)^T$.

Из (30), где левая часть имеет вид $(I + \mathcal{F}_{nn}) k_{1n}(0,y)$ (здесь I — тождественный оператор, а $\mathcal{F}_{nn} g(y) \equiv \mathcal{F}_{nn}^{[0]} g(y) := \int_0^{\infty} f_{nn}(y+t) g(t) \mathrm{dt},\ 0 < y < \infty$, — оператор Марченко (см. [1, следствие теоремы 3.2.1])), получаем, обозначая $\{\ldots\}$ правую часть (30), что $k_{1n}(0,y) = (I + \mathcal{F}_{nn})^{-1} \{\ldots\}$, а затем, внося $(I + \mathcal{F}_{nn})^{-1}$ под знак интеграла и учитывая (5), находим

$$\begin{aligned} e_{1n}(k_j) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{e}_1(k) \widehat{s}_n^0(k) \tfrac{1}{k^2 - k_j^2} \{e_{nn}'(0,k) e_{nn}(k_j) \\ - e_{nn}(k) e_{nn}'(0,k_j)\} \mathrm{dk} - \sum_{r \neq j} [\overrightarrow{e}_1(k_r) (\widehat{z}_n^{[r]})^0(0) + \tfrac{1}{i} \dot{\overrightarrow{e}}_1(k_r) (\widehat{z}_n^{[r]})'(0) + \ldots \\ + \tfrac{1}{i^{n-1}(n-1)!} (\overrightarrow{e}_1(k_r))^{(n\dot{-}1)} (\widehat{z}_n^{[r]})^{(n-1)}(0)] \tfrac{e_{nn}'(0,k_r) e_{nn}(k_j) - e_{nn}(k_r) e_{nn}'(0,k_j)}{k_r^2 - k_j^2} \\ - [\overrightarrow{e}_1(k_j) (\widehat{z}_n^{[j]})^0(0) + \sum_{s=1}^{n-1} \tfrac{1}{i^s s!} \tfrac{d^s}{dk^s} \overrightarrow{e}_1(k_j) (\widehat{z}_n^{[j]})^{(s)}(0)] (z_{nn}^{[j]})^{-1}, \end{aligned} \tag{31}$$

поскольку, в силу формулы (3.2.16) из [1] : $(I+\mathcal{F}_{nn})^{-1} = (I+\mathcal{K}^*{}_{nn})(I+\mathcal{K}_{nn})$, где $\mathcal{K}^*{}_{nn}g = \int\limits_y^\infty k_{nn}(y,t)g(t)\mathrm{dt}$, $\mathcal{K}_{nn}g = \int\limits_0^y k_{nn}(t,y)g(t)\mathrm{dt}$, имеем

$$\int\limits_0^\infty (I+\mathcal{F}_{nn})^{-1}[e^{iky}]e^{ik_jy}\mathrm{dy} = \int\limits_0^\infty e_{nn}(y,k)e_{nn}(y,k_j)\mathrm{dy}$$

$$= \frac{1}{k^2-k_j^2}\{e'_{nn}(0,k)e_{nn}(k_j) - e_{nn}(k)e'_{nn}(0,k_j)\};$$

$$\int\limits_0^\infty (I+\mathcal{F}_{nn})^{-1}[e^{ik_jy}]e^{ik_jy}\mathrm{dy} = \int\limits_0^\infty e_{nn}(y,k_j)e_{nn}(y,k_j)\mathrm{dy} = (z_{nn}^{[j]})^{-1}.$$

Значит, учитывая, что диагональные элементы (13) суть ДР вещественных скалярных задач, а также, что в (31) $\sum\limits_{r\neq j}[\dots]\frac{e_{nn}(k_r)e'_{nn}(0,k_j)}{k_r^2-k_j^2} = 0$, ибо здесь в каждом слагаемом либо дробь равна нулю, либо $[\dots] = 0$, имеем

$$\begin{aligned} e_{1n}(k_j)z_{nn}^{[j]} = -e'_{nn}(0,k_j)z_{nn}^{[j]}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overrightarrow{e}_1(k)\widehat{s}_n^0(k)e_{nn}(k)\frac{1}{k^2-k_j^2}\mathrm{dk} \\ -[\overrightarrow{e}_1(k_j)(\widehat{z}_n^{[j]})^0(0) + \frac{1}{i}\dot{\overrightarrow{e}}_1(k_j)(\widehat{z}_n^{[j]})'(0) + \dots \\ +\frac{1}{i^{n-1}(n-1)!}(\overrightarrow{e}_1(k_j))^{(n\dot{-}1)}(\widehat{z}_n^{[j]})^{(n-1)}(0)]. \end{aligned} \tag{32}$$

Непосредственно проверяем, что при условиях теоремы 1 подынтегральная функция — нечетная. Поэтому из (32) следует последнее из равенств (27) при $q=n$, и мы получили (25). Докажем (26). Уравнение Марченко в силу (21) и (5) можно записать в виде

$$K(0,y) + F_S(y) + \int\limits_0^\infty K(0,t)F_S(t+y)\mathrm{dt} = -\sum_{j=1}^p [E(k_j)Z_j^0(y)$$

$$+\frac{1}{i}\dot{E}(k_j)Z'_j(y) + \frac{1}{2!i^2}\ddot{E}(k_j)Z''_j(y) + \dots + \frac{1}{i^{n-1}(n-1)!}E^{(n\dot{-}1)}(k_j)Z_j^{(n-1)}(y)]e^{ik_jy}.$$

Учитывая уже доказанные формулы (25), имеем

$$K(0,y) + F_S(y) + \int\limits_0^\infty K(0,t)F_S(t+y)\mathrm{dt} = 0.$$

Следуя доказательству теоремы 5.5.2 [2], получим $U(0,k) := E(k) -E(-k)S(-k) = 0$, $k \in \mathrm{R}$, т.е. $S(k)$ из (13) удовлетворяет равенству (10) и потому действительно является матрицей рассеяния задачи с найденным верхнетреугольным матричным потенциалом (вещественным на диагонали и без виртуального уровня). Далее, в силу верхнетреугольного вида восстановленной по заданным величинам (13) матрицы Йоста имеем (12) и числа k_j^2, $j = \overline{1,p}$, оказываются собственными числами восстановленной по данным (13) задачи рассеяния. В силу (25) заданные $Z_j(t)$ оказываются соответствующими нормировочными полиномами восстановленной по данным (13) задачи рассеяния при учете однозначной разрешимости относительно F уравнения Марченко с ядром $K(x,y)$, которая легко следует из оценки [2, (теорема 1.3.1)] $|K(x,y)| \le c \int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |V(t)|\mathrm{dt}$ и леммы 3.2.1 из [2]. Достаточность условий, а с ними и вся теорема 1 доказаны.

Следующая теорема позволяет в явном виде найти решение ОЗР по данным (13), если известны [1]) решения скалярных ОЗР, отвечающих диагональным элементам (13), или, точнее, если известны операторы $(I + \mathcal{F}_{ll})^{-1}$, обратные к скалярным операторам Марченко [1, с. 191], отвечающие диагональным элементам (13); ($\mathcal{F}_{ll}$ см. (34), $l = 1, \ldots, n$)..

Теорема 2. *Пусть (13) являются ДР задачи рассеяния (1), (2) рассматриваемого вида (без виртуального уровня). Тогда каждый элемент матричного решения $K(x,y)$ уравнения Марченко (20) имеет следующий вид:*

$$k_{md}(x,y) = -(I + \mathcal{F}_{dd})^{-1}\Big[f_{md}(x+\cdot) + \Big(\sum_{r=1}^{d-m} \sum_{m \le m_1 < \ldots < m_r < d} (-1)^r \mathcal{F}_{m_r d}(I +\mathcal{F}_{m_r m_r})^{-1} \ldots (I + \mathcal{F}_{m_2 m_2})^{-1}\mathcal{F}_{m_1 m_2}(I + \mathcal{F}_{m_1 m_1})^{-1}[f_{m m_1}(x + *)]\Big)(\cdot)\Big](y),$$
$$m \le d, \tag{33}$$

где I — тождественный оператор;

$$\mathcal{F}_{m_s m_l}[g](y) \equiv \mathcal{F}^{[x]}_{m_s m_l}[g](y) := \int\limits_x^{\infty} f_{m_s m_l}(t+y)g(t)\ \mathrm{dt}; \tag{34}$$

$f_{m_s m_l}(t+y)$ — элемент матрицы-функции $F(t)$ (21).

Список литературы

[1] *В.А. Марченко*, Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев (1972).

[2] *З.С. Агранович, В.А. Марченко*, Обратная задача теории рассеяния. ХГУ, Харьков (1960).

[3] *М.А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2-е с добавлением В.Э. Лянце. Наука, Москва (1969).

[4] *В.Э. Лянце*, Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. — *Мат. сб* (1967), т. 72, № 4, с. 537–557.

[5] *Е.И. Бондаренко, Ф.С. Рофе-Бекетов*, Фазово–эквивалентные матричные потенциалы. — *Электромагн. волны и электрон. системы* (2000), т. 5, № 3, с. 6–24.

Inverse scattering problem on the semiaxis for the system with the triangle matrix potential

E.I. Bondarenko and F.S. Rofe-Beketov

Inverse scattering problem on the semiaxis is solved for the system of differential equations with the triangle matrix potential.