Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 4, с. 481–489

Об интеграле Вебера–Шафхейтлина

И.С. Белов

Харьковский национальный технический университет "ХПИ"
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина
E-mail:Bigor@kpi.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 24 сентября 2002 г.
Представлена Г.М. Фельдманом

Пусть L^p_λ — пространство функций на полуоси с нормой $\| f \|^p_{p,\lambda}= \int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda} dx$. В работе рассмотрены операторы A_μ мультипликативной свертки с функцией Бесселя $A_\mu f(x) = \int_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{-\lambda} dt$ и установлены их следующие свойства. Операторы A_μ, $\mu \geq 0$, ограничены в $L^2(\lambda)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. A_μ, $\mu > 0$, ограничены в L^p_λ, $1 \leq p \leq \infty$, но A_0 не ограничен в L^p_1, $1 \leq p \leq \infty$. Операторы A_μ не ограничены в L^p_λ, $p \neq 2$, $-1 \leq \lambda < 1$. При определенных соотношениях между величинами (μ, ν, λ, p) произведения $A_\nu A_\mu$ ограничены в L^p_λ.

Нехай L^p_λ — простір функцій на піввісі з нормою $\| f \|^p_{p,\lambda}= \int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda} dx$. В роботі розглянуто оператори A_μ мультиплікативної згортки з функцією Беселя $A_\mu f(x) = \int_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{-\lambda} dt$ та встановлено такі їх властивості. Оператори A_μ, $\mu \geq 0$, обмежені у $L^2(\lambda)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. A_μ, $\mu > 0$, обмежені у L^p_λ, $1 \leq p \leq \infty$, але A_0 необмежений у L^p_1, $1 \leq p \leq \infty$. Оператори A_μ не обмежені у L^p_λ, $p \neq 2$, $-1 \leq \lambda < 1$. При певних співвідношеннях між величинами (μ, ν, λ, p) добутки $A_\nu A_\mu$ обмежені у L^p_λ.

Пусть G — локально компактная абелева группа, $Tf(x) = \int_D K(x-y) f(y) dy$ — оператор свертки, ограниченный в пространстве $L^p(G)$. Такие операторы при $p = 1, 2, \infty$ допускают простое описание, в то же время доказательство ограниченности оператора T в случае несуммируемого ядра $\int_G |K(x)| dx = \infty$ и прмежуточных значений p сопряжено со значительными техническими трудностями. Получены широкие достаточные условия ограниченности операторов свертки в $L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, включающие оператор Гильберта $Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)dy}{x-y}$ и операторы Кальдерона–Зигмунда [1]. Они обобщались на мультипликаторы в пространстве L^p с весом [2]. В работе рассматривается оператор свертки с функцией Бесселя в пространстве $L^p(G)$

Mathematics Subject Classification 2000: 44A35, 26B99.

с весом для мультипликативной группы положительных вещественных чисел $G = R^+$.

Пусть L^p_λ — пространство функций на полуоси, суммируемых в p-й степени со степенным весом λ, $-1 \le \lambda \le 1$:

$$\| f \|^p_{p,\lambda} = \left[\int\limits_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda} dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Введем операторы мультипликативной свертки с функцией Бесселя J_μ, $\mu \ge 0$:

$$A_\mu f(x) = \int\limits_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{-\lambda} dt,$$

определенные на плотном подпространстве L^p_λ (при $\lambda = -1$ получаются операторы Фурье–Бесселя).

Теорема 1. *Операторы A_μ, $\mu > 0$, ограничены в $L^2(\lambda)$, $-1 \le \lambda \le 1$.*

Доказательство. Если $\lambda = 1$, достаточно проверить, что преобразование Меллина ядра $\hat{J}_\mu(w) = \int_0^\infty J_\mu(x) x^{iw} \frac{dx}{x}$ ограничено. Это вытекает из формулы Вебера [3, с. 428]

$$\int\limits_0^\infty J_\mu(t) t^{\nu-\mu} \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{2^{-\nu+1}\Gamma(\mu - \frac{\nu}{2} + 1)}$$

при $\nu = \mu + iw$. Действительно, по формуле Стирлинга

$$\left| \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\mu - \frac{\nu}{2} + 1)} \right| = \left| \frac{\Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{iw}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2} - \frac{iw}{2} + 1)} \right| = O\left(\frac{[\frac{\mu}{2}^2 + \frac{w^2}{4}]^{\frac{\mu}{4}}}{\left[\left(\frac{\mu+2}{2} \right)^2 + \frac{w^2}{4} \right]^{\frac{\mu+2}{4}}} \right) = O(1).$$

Общий случай сводится к рассмотренному переходом к функциям

$$\tilde{J}_\mu(t) = J_\mu(t) t^{\frac{1-\lambda}{2}}, \quad \tilde{f}(t) = f(t) t^{\frac{1-\lambda}{2}}.$$

При этом $\| f(t) \|^2_{2,\lambda} = \int_0^\infty |f(t)|^2 t^{-\lambda} dt = \int_0^\infty |\tilde{f}(t)| t^{-1} dt = \| \tilde{f}(t) \|^2_2$, и для оператора A_μ имеем

$$A_\mu f(x) = \int\limits_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{-\lambda} dt = \int\limits_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{1-\lambda} \frac{dt}{t} = \frac{1}{x^{\frac{1-\lambda}{2}}} \int\limits_0^\infty \tilde{J}_\mu(xt) \tilde{f}(t) \frac{dt}{t},$$

$$\begin{aligned} \| A_\mu f(x) \|_{2,\lambda}^2 &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{x^{\frac{1-\lambda}{2}}} \int_0^\infty \tilde{J}_\mu^(xt) \tilde{f}(t) \frac{dt}{t} \right|^2 x^{-\lambda} dx \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \tilde{J}_\mu(xt) \tilde{f}(t) \frac{dt}{t} \right|^2 x^{-1} dx = \| \tilde{A}_\mu \tilde{f}(x) \|_{2,1}^2 \ . \end{aligned}$$

Ограниченность преобразования Меллина ядра $\tilde{J}_\mu$ также без труда вытекает из формулы Вебера. Теорема доказана.

Теорема 2. *Операторы A_μ, $\mu > 0$, ограничены в L^p_λ, $1 \le p \le \infty$, а оператор A_0 не ограничен в L^p_1, $1 \le p \le \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из асимптотики функций Бесселя в нуле и на бесконечности следует, что при $\mu > 0$ операторы A_μ имеют суммируемое ядро и, следовательно, ограничены. Используя интеграл [4, с. 554]

$$\int_0^\infty J_0(xt) \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = a^{-1} e^{-ax}, \quad Re(a) > 0,$$

легко проверить, что для $f(t) = \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \in L^p_1$, $1 \le p \le \infty$, ее образ $A_0 f$ имеет в нуле неинтегрируемую особенность. Теорема доказана.

Пусть $L_{2,\alpha}$ — пространство функций на полуоси, суммируемых в квадрате с логарифмическим весом α

$$\| f \|_{2,\alpha}^2 = \int_0^\infty |f(t)|^2 |\ln(t)|^{-\alpha} \frac{dt}{t},$$

и A_μ — оператор мультипликативной свертки с функцией Бесселя

$$A_\mu f(x) = \int_0^\infty J_\mu(xt) f(t) |\ln(t)|^{-\alpha} \frac{dt}{t}\,.$$

Теорема 3. *При $0 < \alpha \le 2$ операторы A_μ, $\mu > 0$, действуют из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,-\alpha}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Делая подстановки $s = e^x$, $t = e^y$, $f_\alpha(z) = f(e^z|z|^{-\alpha})$, получаем обычный оператор свертки (мультипликатор) A_μ на оси со степенным весом α:

$$A_\mu f_\alpha(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J_\mu(e^{x+y}) f_\alpha(y)dy,$$

$$\| f_\alpha \|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_\alpha(x)|^2 |x|^\alpha dx = \int\limits_{0}^{\infty} |f(t)|^2 |\ln(t)|^{-\alpha} \frac{dt}{t} = \| f \|_2^2 .$$

Преобразование Фурье ядра $J_\mu(e^x)$ совпадает с преобразованием Меллина $\hat{J}_\mu(w) = \int_0^\infty J_\mu(x) x^{iw} \frac{dx}{x}$ ядра $J_\mu(t)$.

Лемма 1. *При $\nu > 0$ справедлива оценка* $\left| \frac{d}{dw} \hat{J}_\mu(w) \right| < \frac{C}{|w|}$.

Доказательство. Действительно, по формуле Вебера

$$\left| \frac{d}{dw} \hat{J}_\mu(w) \right| = \left| \frac{d}{dw} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2})}{2^{-\nu - iw + 1} \Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2} + 1)} \right| = \left| \frac{d}{dw} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2})}{2^{-\nu - iw} (\nu - iw) \Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2})} \right| .$$

Так как $\left| \Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2}) \right| = \left| \Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2}) \right|$, достаточно получить оценку для логарифмической производной $\left| \frac{d}{dw} \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2})} \right|$. Используя формулу Гаусса для логарифмической производной гамма-функции [5, с. 114]

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \Big) dt,$$

имеем

$$\left| \frac{d}{dw} \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2})} \right| = \left| \frac{d}{dw} \ln \Gamma(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2}) - \frac{d}{dw} \ln \Gamma(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2}) \right|$$

$$= \left| \int\limits_0^\infty (\frac{e^{-(\frac{\nu}{2} - i\frac{w}{2})t}}{1 - e^{-t}}) - \frac{e^{-(\frac{\nu}{2} + i\frac{w}{2})t}}{1 - e^{-t}}) dt \right| = 2 \left| \int\limits_0^\infty \frac{e^{\frac{\nu}{2}t} sin \frac{w}{2} t}{1 - e^{-t}} dt \right|$$

$$= 2 \left| \int\limits_0^\infty e^{\frac{\nu}{2}t} sin \frac{w}{2} t \sum_{k=0}^\infty e^{-kt} dt \right| = 2 \left| \sum_{k=0}^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(\frac{\nu}{2} + k)t} sin \frac{w}{2} t dt \right|$$

$$= w \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(\frac{w}{2})^2 + (k + \frac{\nu}{2})^2} < Cw \int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{w}{2})^2 + x^2} = O(1).$$

Лемма доказана.

Из оценки леммы 1 следует, что для $\hat{J}_\nu(w)$ выполнено условие Хермандера

$$sup_{w>0} \int\limits_{w<x<2w} \left| \frac{d}{dx} \hat{J}_\nu(x) \right|^2 dx < C.$$

Отсюда по теореме Макенхаупта–Видена–Юнга о мультипликаторах в L^2_α [2, с. 175] $\tilde{A}_\mu$ ограничен в L^2_α, $0 \le \alpha \le 2$. Возвращаясь в $L_{2,\alpha}$, получаем требуемую оценку

$$\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^\infty J_\mu(st) f(t) |\ln(t)|^{-\alpha} \frac{dt}{t} \right|^2 |\ln(s)|^\alpha \frac{ds}{s} < C \int\limits_0^\infty |f(t)|^2 \ln(t)|^{-\alpha} \frac{dt}{t}.$$

Теорема доказана.

Представляет интерес вопрос об ограниченности операторов A_μ в пространстве $L_{2,\alpha}$.

Теорема 4. *Операторы A_μ не ограничены в L^p_λ, $p \neq 2$, $1 \le \lambda < 1$.*

Доказательство достаточно провести для $p < 2$. Рассмотрим операторы A_μ на функциях $f_a(t) = t^\lambda e^{-at}$. Используя интеграл Липшица [3, с. 422]

$$\int\limits_0^\infty J_\nu(bt) e^{-at} dt = \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)^\nu}{b^\nu \sqrt{a^2+b^2}},$$

легко проверить, что $\| A_\mu f_a \|_p^p = C_1 a^{1-p-\lambda}$, $a \to \infty$; $\| f_a \|_p^p = C_2 a^{-1-\lambda(p-1)}$, $a \to \infty$. Поэтому отношение

$$\frac{\| A_\mu f_a \|_p^p}{\| f_a \|_p^p} = C a^{(2-p)(1-\lambda)} \to \infty, \quad a \to \infty.$$

Теорема доказана.

По-видимому, справедливо следующее

Предположение. *Произведения $A_\nu A_\mu$ ограниченны в пространствах L^p_λ при*

$$\mu, \nu > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad -1 \le \lambda < 1.$$

Мы докажем это предположение при некоторых соотношениях между величинами (μ,ν,λ,p). Имеем для оператора $A_\nu A_\mu$

$$A_\nu A_\mu f(x)=\int\limits_0^\infty J_\nu(xy)y^{-\lambda}dy\int\limits_0^\infty J_\mu(yt)f(t)t^{-\lambda}dt$$

$$=\int\limits_0^\infty f(t)t^{-\lambda}dt\int\limits_0^\infty J_\nu(xy)J_\mu(yt)y^{-\lambda}dy=\int\limits_0^\infty K(x,t)f(t)t^{-\lambda}dt,$$

где ядро $K(x,t)=\int\limits_0^\infty J_\nu(xy)J_\mu(yt)y^{-\lambda}dy$ есть разрывный интеграл Вебера–Шафхейтлина при $\lambda>-1$.

Известно [3, с. 436], что $K(x,t)$ равно

$$\begin{cases}\frac{t^\mu\Gamma(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2})}{2^\lambda x^{\mu-\lambda+1}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2})}F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2},\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\mu+1,\frac{t^2}{x^2}\right), & t<x,\\ \frac{x^\mu\Gamma(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2})}{2^\lambda t^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2})}F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2},\frac{\mu-\nu-\lambda+1}{2};\nu+1,\frac{x^2}{t^2}\right), & t>x,\end{cases}\tag{1}$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma,z)$ — гипергеометрическая функция. Нас будут интересовать тройки (μ,ν,λ), при которых ядро $K(x,t)\ge 0$.

Лемма 2. *Для троек (μ,ν,λ), удовлетворяющих условиям:*

$$\mu\ge\nu\ge\frac{\mu}{3}\ge 0,\tag{2}$$

$$\frac{\nu-\mu+1}{2}=\begin{cases}\delta & \nu+\mu+1>0\\ -n-\delta & \nu+\mu+1<0\end{cases}\qquad \delta_1=min(\delta,1-\delta),$$

$$0<|\lambda|<2\delta_1,\tag{3}$$

ядро $K(x,t)\ge 0$.

Доказательство. При выполнении неравенств

$$\begin{cases}3\mu+\lambda+1>\nu\\ 3\nu+\lambda+1>\mu\end{cases},$$

следующих из (2), для гипергометрической функции в (1) справедливо интегральное представление [5, с. 97]

$$F(\alpha,\beta;\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt.$$

Поэтому для неотрицательности ядра достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} \Gamma\Big(\dfrac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}\Big)>0 \\ \Gamma\Big(\dfrac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu-\nu-\lambda+1}{2}\Big)>0 \end{cases}.$$

Второе из этих неравенств выполнено, т.к. $\mu \geq \nu$, а первое неравенство следует из (3). Лемма 2 доказана. Отметим, в частности, что при $\frac{\mu-\nu}{2} \in \mathbf{Z}$ допустимы все λ $|\lambda| < 1$.

Лемма 3. *Для* $(\mu,\nu,0)$ $\quad \mu-\nu = 2k+1 > 0$ *ядро* $K(x,t) \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы Вебера–Шафхейтлина (1) следует, что $K(x,t) = 0$ при $t < x$ и $K(x,t) \geq 0$ при $t > x$, т.к. все параметры F положительны.

Заметим, что при $\nu = \mu - 1$

$$K(x,t) = \begin{cases} 0 & t<x \\ \dfrac{x^{\mu-1}}{t^{\mu}} & t>x \end{cases}$$

[3, с. 444] и получается ядро, рассмотренное в [6, с. 295].

Будем далее рассматривать только тройки (μ,ν,λ), для которых выполнены условия лемм 2, 3. Для них ядро $K(x,t) \geq 0$. Пусть дополнительно для сходимости в нуле интегралов, предсавляющих ниже константы c_1 и c_2, выполнены условия

$$\begin{cases} \nu > \lambda - \frac{1}{p'}, & \nu > 0, \\ \lambda < \frac{1}{p}, & \nu = 0 \end{cases}$$

и для $p > 2$

$$\frac{1}{p} > -\lambda - \frac{1}{2}\,.$$

Теорема 5. *Операторы* $A_\nu A_\mu$ *ограничены в пространстве* L^p_λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $K(x,t)$ однородно степени $\lambda-1$. Это позволяет оценить $(A_\nu A_\mu f, g)$ аналогично доказательству неравенства Харди [6, с. 276], считая f и g неотрицательными ввиду неотрицательности $K(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
(A_\nu A_\mu f, g) &= \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty K(x,t) f(t) t^{-\lambda} dt x^{-\lambda} dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty K(x,t) g(x) f(t) t^{-\lambda} dt x^{-\lambda} dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty g(x) K^{\frac{1}{p'}}(x,t) \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{pp'}} f(t) K^{\frac{1}{p}}(x,t) \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{pp'}} t^{-\lambda} dt x^{-\lambda} dx \\
&\leq \left[\int_0^\infty g^{p'}(x) x^{-\lambda} dx \int_0^\infty K(x,t) \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{p}} t^{-\lambda} dt\right]^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad \times \left[\int_0^\infty f^p(t) t^{-\lambda} dt \int_0^\infty K(x,t) \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{p'}} x^{-\lambda} dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_1 c_2 \left[\int_0^\infty g^{p'}(x) x^{-\lambda} dx\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^\infty f^p(t) t^{-\lambda} dt\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

При этом

$$
\begin{aligned}
c_1^{p'} &= \int_0^\infty K(1,u) u^{-\frac{1}{p}} u^{-\lambda} du = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{p}-\lambda} \int_0^\infty J_\nu(y) J_\mu(yu) y^{-\lambda} dy du \\
&= \int_0^\infty y^{-\lambda} J_\nu(y) dy \int_0^\infty J_\mu(yu) u^{-\frac{1}{p}-\lambda} du \int_0^\infty J_\nu(y) y^{-\frac{1}{p'}} dy \int_0^\infty J_\mu(v) v^{-\frac{1}{p}-\lambda} dv.
\end{aligned}
$$

Аналогично,

$$
c_2^p = \int_0^\infty J_\mu(y) y^{-\frac{1}{p}} dy \int_0^\infty J_\nu(v) v^{-\frac{1}{p'}-\lambda} dv,
$$

и теорема доказана.

Список литературы

[1] *Е.М. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва (1973).

[2] *B. Muckenhoupt, R. Wheeden, and W. Young*, L^2 multipliers with power weights. — *Adv. Math.* (1982), v. 49, p. 170–216.

[3] *Г.Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций. Изд-во иностр. лит., Москва (1949).

[4] *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*, Таблицы интегралов. Физматгиз, Москва (1963).

[5] *Э.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон*, Курс современного анализа, ч. 2. Физматгиз, Москва (1963).

[6] *Г.Г. Харди, Д. Литлвуд, Г. Полиа*, Неравенства. Изд-во иностр. лит., Москва (1948).

About integral of Weber–Shafheitlin

I.S. Belov

Let L^p_λ be the function space at half-line with the norm $\| f \|^p_{p,\lambda} = \int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda} dx$. In the work the operators A_μ of multiplicative convolution with Bessel function $A_\mu f(x) = \int_0^\infty J_\mu(xt) f(t) t^{-\lambda} dt$ are considered and their following propeties are proved. The operators A_μ, $\mu \geq 0$, are bounded on $L^2(\lambda)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. A_μ, $\mu > 0$, are bounded on L^p_λ, $1 \leq p \leq \infty$, but A_0 is unbounded on L^p_1, $1 \leq p \leq \infty$. The operators A_μ are unbounded on L^p_λ $p \neq 2$, $1 \leq \lambda < 1$. With some relations between values (μ, ν, λ, p) the products $A_\nu A_\mu$ are bounded on L^p_λ.