Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 4, с. 557–568

О вещественных и "симплектических" мероморфных плюс-матрицах-функциях и соответствующих дробно-линейных преобразованиях

Л.А. Симакова

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
ул. Старопортофранковская, 26, Одесса, 65091, Украина
E-mail:varv@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 9 декабря 2002 г.
Представлена И.В. Островским

Основной результат: если дробно-линейное преобразование с мероморфной в единичном круге матрицей коэффициентов $A(z)$ отображает множество голоморфных сжимающих матриц-функций в себя, причем так, что вещественные (симметрические) матрицы-функции переходят в вещественные (симметрические), то существует такая мероморфная скалярная функция $\rho(z)$, что $\rho^{-1}(z)A(z)$ — j-растягивающая вещественная ("симплектическая" или "антисимплектическая") матрица-функция.

Основний результат: якщо дробово-лінійне перетворення з мероморфною в одиничному крузі неособливою матрицею коефіцієнтів $A(z)$ відображає множину голоморфних стискаючих матриць-функцій в себе, причому так, що дійсні (симетричні) матриці-функції переходять у дійсні (симетричні), то існує така мероморфна скалярна функція $\rho(z)$, що $\rho^{-1}(z)A(z)$ є j-розтягуючою дійсною ("симплектичною" або "антисимплектичною") матрицею-функцією.

Введение

Эта статья является продолжением работ автора [1, 2]. В них рассматриваются мероморфные в единичном круге неособенные плюс-матрицы-функции в j-метрике

$$A(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

и соответствующие им дробно-линейные преобразования (ДЛП)

$$\varphi_\varepsilon(z) = [\alpha(z)\varepsilon(z) + \beta(z)][\gamma(z)\varepsilon(z) + \delta(z)]^{-1}, \tag{0.2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 47A56.

переводящие в себя множество голоморфных в круге $|z| < 1$ сжимающих матриц-функций $\varepsilon(z)$ порядка $q \times p$.

В основе исследований лежит центральный результат работ [1,2]:

Теорема 0.1. *Мероморфная неособенная плюс-матрица-функция $A(z)$ коллинеарна мероморфной j-растягивающей матрице-функции, т.е. существует такая мероморфная скалярная функция $\rho(z)$, что $\rho^{-1}(z)A(z)$ — j-растягивающая матрица-функция.*

В применении к ДЛП (0.2) с мероморфной неособенной матрицей коэффициентов она формулируется так:

Теорема 0.2. *Для того чтобы ДЛП (0.2) отображало множество голоморфных сжимающих матриц-функций в себя, необходимо и достаточно, чтобы его матрица коэффициентов была коллинеарна мероморфной j-растягивающей матрице-функции.*

Такие ДЛП возникают при каскадном синтезе пассивных электрических цепей, пассивных линейных стационарных динамических систем, где $\varepsilon(z)$, $\varphi_\varepsilon(z)$, $A(z)$ — передаточные функции систем [3–5, 10, 11]. Физические системы имеют, как правило, вещественные передаточные функции. Для обратимых (по времени) пассивных систем рассеяния $\varepsilon(z), \varphi_\varepsilon(z)$ — симметрические голоморфные сжимающие матрицы-функции, а матрицы прохождения $A(z)$ — симплектические мероморфные j-растягивающие матрицы-функции.

Естественно, возникает вопрос об описании ДЛП (0.2), переводящих в себя множество голоморфных сжимающих вещественных (симметрических) матриц-функций. В настоящей работе доказан следующий основной результат.

Для того чтобы ДЛП (0.2) *отображало множество голоморфных сжимающих матриц-функций в себя, причем так, чтобы вещественные (симметрические) матрицы-функции переходили в вещественные (симметрические), необходимо и достаточно, чтобы его матрица коэффициентов была коллинеарна мероморфной j-растягивающей вещественной ("симплектической" или "антисимплектической") матрице-функции.*

1. Предварительные сведения

В пространстве C^n n-мерных вектор-столбцов ξ с помощью матрицы J ($J^* = J$, $J^2 = I$) введем J-метрику: $[\xi, \eta] = \eta^* J \xi$.

Матрица A называется *плюс-матрицей* в J-метрике, если из неравенства $[\xi, \xi] \geq 0$ следует неравенство $[\mathrm{A}\xi, \mathrm{A}\xi] \geq 0$.

Матрица W называется *J-растягивающей*, если $W^*JW \geq J$.

Очевидно, что матрица A, коллинеарная J-растягивающей матрице W ($A = \rho W$, где ρ — комплексное число), является плюс-матрицей. Верно и обратное [6]:

Неособенная плюс-матрица коллинеарна J-растягивающей.

Пусть $J \neq \pm I_n$. Матрица J унитарно эквивалентна j в (0.1). Если $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — неособенная плюс-матрица в j-метрике, то [7, 8] ее блок δ обратим и соответствующее ДЛП

$$\varphi_A(x) = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \tag{1.1}$$

определено на всем матричном единичном круге K_{qp}, т.е. множестве матриц x порядка $q \times p$, для которых $x^*x \leq I_p$.

Предложение 1.1. *Для того чтобы ДЛП переводило в себя а) матричный единичный круг K_{qp}, б) правую матричную полуплоскость, в) верхнюю матричную полуплоскость, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов этого ДЛП была плюс-матрицей в J-метрике соответственно при*

$$а)\ J = j,\ б)\ J = J_r,\ в)\ J = J_s,\ где\ J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix},\ J_s = \begin{pmatrix} 0 & iI_p \\ -iI_p & 0 \end{pmatrix}.$$

В большинстве вопросов рассмотрение $J = j$ не ограничивает общности.

Матрица A называется *симплектической (антисиплектической)*, если $A^\tau J_s A = J_s$ ($A^\tau J_s A = -J_s$) (τ — транспонирование).

Имеют место [7, 8]:

Предложение 1.2. *Симплектическая плюс-матрица является J-растягивающей матрицей.*

З а м е ч а н и е. Вместо условия симплектичности матрицы A достаточно условия $A^\tau J_s A = \sigma J_s$, $|\sigma| = 1$.

Предложение 1.3. *Для того чтобы ДЛП с неособенной матрицей коэффициентов переводило матричный единичный круг K_{pp} в себя, причем так, чтобы симметрические матрицы переходили в симметрические, необходимо и достаточно, чтобы его матрица коэффициентов была коллинеарна j-растягивающей симплектической матрице.*

Предложение 1.4. *Для того чтобы ДЛП с неособенной матрицей коэффициентов переводило матричный единичный круг K_{pp} в себя, причем так,* *чтобы вещественные симметрические матрицы переходили в вещественные симметрические, необходимо и достаточно, чтобы его матрица коэффициентов была коллинеарна j-растягивающей вещественной симплектической или антисимплектической матрице.*

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и ее блок δ — неособенные. Обозначим

$$a = \alpha - \beta\delta^{-1}\gamma, \quad b = \beta\delta^{-1}, \quad c = -\delta^{-1}\gamma, \quad d = \delta^{-1}. \tag{1.2}$$

Матрица a — также неособенная, т.к. $det\, A = det\, a \cdot det\, \delta$. Перепишем ДЛП (1.1) в виде

$$\varphi_A(x) = ax(I - cx)^{-1}d + b. \tag{1.3}$$

Докажем утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем. Обозначим через $x^{(km)}$ матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента, стоящего в k-й строке и m-м столбце, равного единице.

Предложение 1.5. *Пусть матрицы* $A_s = \begin{pmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{pmatrix}$, $s = 1, 2$, *и их блоки* δ_s *являются неособенными. Если ДЛП*

$$\varphi_{A_s}(x) = (\alpha_s x + \beta_s)(\gamma_s x + \delta_s)^{-1}$$

совпадают на всех матрицах $\pm x^{(km)}$ *и нулевой матрице* ($x = 0$), *то* $A_1 = \rho A_2$, *где* ρ *— некоторый скаляр.*

Доказательство. Согласно (1.3) для указанных матриц x имеем

$$a_1 x(I - c_1 x)^{-1} d_1 + b_1 = a_2 x(I - c_2 x)^{-1} d_2 + b_2 \,.$$

Подставляя $x = 0$, сразу получаем, что $b_1 = b_2$, следовательно,

$$a_1 x(I - c_1 x)^{-1} d_1 = a_2 x(I - c_2 x)^{-1} d_2 \,. \tag{1.4}$$

В (1.4) положим $x = \pm x^{(km)}$ и перейдем к поэлементному рассмотрению:

$$a_{ik}^{(1)}(1 - c_{mk}^{(1)})^{-1} d_{mr}^{(1)} = a_{ik}^{(2)}(1 - c_{mk}^{(2)})^{-1} d_{mr}^{(2)} \,, \tag{1.5}$$

$$a_{ik}^{(1)}(1 + c_{mk}^{(1)})^{-1} d_{mr}^{(1)} = a_{ik}^{(2)}(1 + c_{mk}^{(2)})^{-1} d_{mr}^{(2)} \,.$$

Из неособенности матриц d_s следует, что элементы $a_{ik}^{(s)}$ обращаются в нуль одновременно, то же — для $d_{mr}^{(s)}$. При других значениях индексов

$$(1 - c_{mk}^{(1)})/(1 + c_{mk}^{(1)}) = (1 - c_{mk}^{(2)})/(1 + c_{mk}^{(2)}),$$

следовательно, $c_{mk}^{(1)} = c_{mk}^{(2)}$. Из (1.5) получаем, что отношение $a_{ik}^{(1)}/a_{ik}^{(2)} = d_{mr}^{(2)}/d_{mr}^{(1)}$ не зависит от значений индексов $i, k = 1, 2, \dots, q$ и $m, r = 1, 2, \dots, p$. Обозначим его через ρ. Тогда $a_{ik}^{(1)} = \rho a_{ik}^{(2)}$, $d_{mr}^{(2)} = \rho d_{mr}^{(1)}$, т.е. $a_1 = \rho a_2$, $d_2 = \rho d_1$. Подставляя эти равенства в (1.4), имеем $x(I - c_1 x)^{-1} = x(I - c_2 x)^{-1}$. Снова подставляя $x = x^{(km)}$, получаем $1 - c_{mk}^{(1)} = 1 - c_{mk}^{(2)}$, т.е. $c_{mk}^{(1)} = c_{mk}^{(2)}$ уже без ограничений на значения индексов m, k. Из равенств $d_2 = \rho d_1$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $a_1 = \rho a_2$ вытекает, что $\delta_1 = \rho\delta_2$, $\beta_1 = \rho\beta_2$, $\gamma_1 = \rho\gamma_2$, $\alpha_1 = \rho\alpha_2$, т.е. $A_1 = \rho A_2$.

Нам понадобятся некоторые сведения о *функциях ограниченной характеристики* [9], т.е. функциях, представимых в виде отношения голоморфных ограниченных функций. Пусть $K = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$. Все рассматриваемые (матрицы-) функции будем считать определенными в круге K. Произвольная функция ограниченной характеристики имеет почти всюду на окружности Γ радиальные граничные значения $f(\zeta) = \lim\limits_{r\uparrow 1} f(r\zeta)$. Если $f(z) \not\equiv 0$, то $f(z)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, граничные значения $f(\zeta) \neq 0$ (п.в., $\zeta \in \Gamma$) и $ln|f(\zeta)|$ — суммируемая по Лебегу функция на окружности Γ.

Голоморфная в K функция $h(z)$ называется *внутренней*, если $|h(z)| \le 1$ $(z \in K)$, $|h(\zeta)| = 1$ (п.в., $\zeta \in \Gamma$).

Общий вид внутренних функций представлен формулой $h(z) = \omega b(z) s(z)$, где ω — комплексное число, $|\omega| = 1$; *произведение Бляшке*

$$b(z) = \prod_i \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \quad \Big(|z_i| < 1, \ \sum_i (1 - |z_i|) < \infty\Big), \tag{1.6}$$

$$s(z) = exp\left\{ - \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}, \tag{1.7}$$

где $\mu(\zeta)$ — неотрицательная сингулярная мера на окружности $|\zeta| = 1$.

Голоморфная в K функция $v(z)$ называется *внешней*, если

$$v(z) = \omega\, exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \ln\, k(\zeta)\, |d\zeta| \right\}, \tag{1.8}$$

где $k(\zeta) \ge 0$, $\ln k(\zeta) \in L_1$, ω — комплексное число, $|\omega| = 1$. При этом $|v(\zeta)| = k(\zeta)$ (п.в., $|\zeta| = 1$).

Произвольная голоморфная ограниченная в K функция $f(z)$ однозначно представима в виде произведения ограниченной внешней и внутренней функций. Более широким является класс D, состоящий из произведений внутренних функций на произвольные внешние. Функция ограниченной характеристики однозначно факторизуется в виде

$$f(z) = e^{i\nu} v_f(z) h_f(z) / g_f(z), \tag{1.9}$$

где ν — вещественное число, $v_f(z)$ — внешняя функция, $h_f(z)$ и $g_f(z)$ — взаимно простые внутренние функции.

Матрица-функция называется *мероморфной* (*голоморфной, ограниченной характеристики, класса* $\mathcal{D}$), если таковыми являются ее элементы.

Матрица-функция ограниченной характеристики представима в виде: $A(z) = g_A^{-1}(z) A_{\mathcal{D}}(z)$, где матрица-функция $A_{\mathcal{D}}(z) \in \mathcal{D}$, а внутренняя функция $g_A(z)$ — ***наименьший знаменатель матрицы-функции*** $A(z)$ (наименьшее общее кратное знаменателей ее элеметов (1.9)).

2. Мероморфные плюс-матрицы-функции

Мероморфная матрица-функция называется *неособенной*, если выполняется условие: $\det A(z) \not\equiv 0$.

Под *мероморфной плюс-матрицей-функцией (J-растягивающей матрицей-функцией)* понимается мероморфная матрица-функция, значениями которой в точках голоморфности являются плюс-матрицы (J-растягивающие матрицы). Мероморфная J-растягивающая матрица-функция имеет ограниченную характеристику, т.к. представима в виде дробно-линейного преобразования Потапова–Гинзбурга с постоянными матричными коэффициентами над голоморфной сжимающей матрицей-функцией. Справедлива [2]

Лемма 2.1. *Неособенная мероморфная плюс-матрица-функция* ($J \neq \pm I_n$) *коллинеарна плюс-матрице-функции ограниченной характеристики.*

Следствие. *У мероморфной неособенной плюс-матрицы-функции* ($J \neq \pm I_n$) *отношение любых двух элементов есть функция ограниченной характеристики.*

Для матрицы-функции $A(z)$ ограниченной характеристики вида (0.1) с неособенным блоком $\delta(z)$ по аналогии с (1.2) рассмотрим

$$a(z) = \alpha(z) - \beta(z)\delta^{-1}(z)\gamma(z), \quad b(z) = \beta(z)\delta^{-1}(z),$$
$$c(z) = -\delta^{-1}(z)\gamma(z), \quad d(z) = \delta^{-1}(z).$$

Имеет место [3]

Лемма 2.2. *Для того чтобы матрица-функция* $A(z)$ *была j-растягивающей, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) $A^*(\zeta) j A(\zeta) \geq j$ *(п.в.,* $\zeta \in \Gamma$*), 2)* $a(z), b(z), c(z), d(z) \in \mathcal{D}$.

Этот своеобразный принцип максимума используется, в частности, при доказательстве следующего утверждения [1]:

Теорема 2.1. *Неособенная плюс-матрица-функция ограниченной характеристики коллинеарна J-растягивающей матрице-функции ограниченной характеристики.*

З а м е ч а н и е. Доказательство теоремы дает и описание коэффициента коллинеарности $\rho(z)$. Плюс-матрица-функция $A(z)$ делится на $\rho(z) = \rho_1(z)\cdot\rho_2(z)$, где $\rho_1(z)$ — внешняя функция, обеспечивающая выполнение условия 1) леммы 2.2, а $\rho_2(z)$ — отношение внутренних функций; деление на $\rho_2(z)$, не изменяя граничных значений $A^*(\zeta)jA(\zeta)$, обеспечивает выполнение условия 2) леммы 2.2. При этом $\rho_1(z)$ имеет вид (1.8), где $k(\zeta)$ — произвольная неотрицательная измеримая на окружности Γ функция, для которой

$$(0 \le)\lambda_q(\zeta) \le k^2(\zeta) \le \lambda_{q+1}(\zeta), \tag{2.1}$$

а $\lambda_q(\zeta)$, $\lambda_{q+1}(\zeta)$ — собственные числа матрицы $G(\zeta) = jA^*(\zeta)jA(\zeta)$. Функция $\rho_2(z) = g_d(z)h_a(z)/g_a(z)h_d(z)$, где $g_a(z)$ и $g_d(z)$ — наименьшие знаменатели матриц-функций $a(z)$ и $d(z)$, соответственно, $h_a(z)$ и $h_d(z)$ — произвольные делители матриц-функций $\Big[g_a(z)/g_d(z)\Big]a(z)\,(\in \mathcal{D})$ и $\Big[g_d(z)/g_a(z)\Big]d(z)\,(\in \mathcal{D})$, соответственно.

Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 вытекают теорема 0.1 и

Теорема 2.2. *Неособенная мероморфная вещественная плюс-матрица-функция коллинеарна мероморфной вещественной J-растягивающей матрице-функции ($J \neq \pm I_n$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть мероморфная неособенная плюс-матрица-функция $A_{\text{в}}(z)$ является вещественной: $\overline{A_{\text{в}}(\bar z)} = A_{\text{в}}(z)$. По следствию из леммы 2.1 деление матрицы-функции $A_{\text{в}}(z)$ на ее произвольный элемент приводит к вещественной плюс-матрице-функции ограниченной характеристики $A(z)$. Матрица-функция $G(\zeta) = jA^*(\zeta)jA(\zeta)$ — также вещественная, и для ее собственных чисел $\lambda_i(\zeta)$ (≥ 0) имеем: $\lambda_i(\bar\zeta) = \lambda_i(\zeta)$. Поэтому в (2.1) функцию $k(\zeta)$ можно выбрать так, чтобы $k(\bar\zeta) = k(\zeta)$, и тогда из (1.8)($\omega = 1$) видно, что функция $\rho_1(z)$ — вещественная.

Для вещественной функции $f(z)$ ограниченной характеристики из (1.9) имеем

$$f(z) = \omega v_f(z)b_h(z)s_h(z)/b_g(z)s_g(z) = \bar\omega\overline{v_f(\bar z)}\,\overline{b_h(\bar z)}\,\overline{s_h(\bar z)}\,/\overline{b_g(\bar z)}\,\overline{s_g(\bar z)} = \Big(\overline{f(\bar z)}\Big).$$

Так как взаимно простым произведениям Бляшке $b_h(z)$ и $b_g(z)$ соответствуют взаимно простые $\overline{b_h(\bar z)}$ и $\overline{b_g(\bar z)}$, функции $\overline{s_h(\bar z)}$ и $\overline{s_g(\bar z)}$ вида (1.7) также взаимно просты, $\overline{v_f(\bar z)}$ — внешняя функция и представление $f(z)$ в указанном виде единственно, то $\omega=\pm 1$, а функции $b_h(z)$, $s_h(z)$, $b_g(z)$, $s_g(z)$ и $v_f(z)$ — вещественные. Для матриц-функций $a(z)$, $d(z)$ по вещественным наименьшим знаменателям $g_f(z)=b_g(z)s_g(z)$ их элементов строим вещественные наименьшие знаменатели $g_a(z)$, $g_d(z)$. Тогда функция $\rho_2(z)=g_d(z)/g_a(z)$ — вещественная. В делители $h_a(z)$, $h_d(z)$, наряду с каждым множителем Бляшке, построенным по точке z_i, следует включить множитель, отвечающий точке $\bar z_i$.

3. Дробно-линейные преобразования множества S_{qp} в себя

Через S_{qp} обозначим множество сжимающих голоморфных в круге K матриц-функций порядка $q\times p$. Справедливо

Предложение 3.1. *Если матрица коэффициентов ДЛП (0.2) является неособенной мероморфной плюс-матрицей-функцией в j-метрике, то такое ДЛП определено на всем множестве S_{qp} и отображает его в себя. Если ДЛП (0.2) определено на всем множестве S_{qp} и отображает его в себя, то матрица коэффициентов этого ДЛП является плюс-матрицей-функцией в j-метрике.*

В дальнейшем рассматриваются ДЛП с мероморфными неособенными матрицами коэффициентов. Для приложений представляет интерес

Теорема 3.1. *Для того чтобы ДЛП (0.2) отображало множество S_{qp} в себя, причем так, чтобы вещественные матрицы-функции переходили в вещественные, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов этого преобразования была коллинеарна мероморфной j-растягивающей вещественной матрице-функции.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Обратно, пусть ДЛП (0.2) на множестве вещественных матриц-функций из S_{qp} совпадает с ДЛП

$$\varphi_\varepsilon(z)=[\overline{\alpha(\bar z)}\varepsilon(z)+\overline{\beta(\bar z)}][\overline{\gamma(\bar z)}\varepsilon(z)+\overline{\delta(\bar z)}]^{-1}.$$

По предложению 1.5 $A(z)=\rho(z)\overline{A(\bar z)}$, откуда $\overline{A(\bar z)}=\overline{\rho(\bar z)}A(z)$ или $A(z)=[\overline{\rho(\bar z)}]^{-1}\overline{A(\bar z)}$, следовательно, $\rho(z)=[\overline{\rho(\bar z)}]^{-1}$. По лемме 2.1 можно считать, что ограниченную характеристику имеет матрица-функция $A(z)$, значит, и $\overline{A(\bar z)}$, и $\rho(z)$. Из (1.9)

$$\rho(z)=e^{i\nu}v_\rho(z)h_\rho(z)/g_\rho(z)=e^{i\nu}\overline{g_\rho(\bar z)}/\overline{h_\rho(\bar z)}\,\overline{v_\rho(\bar z)}\ (=[\overline{\rho(\bar z)}]^{-1}),$$

откуда $v_\rho(z)=[\overline{v_\rho(\bar z)}]^{-1}$, $g_\rho(z)=\overline{h_\rho(\bar z)}$. Для факторизации $\rho(z)=\rho_{\text{в}}(z)/\overline{\rho_{\text{в}}(\bar z)}$ заметим, что $e^{i\nu}=e^{i\nu/2}/\overline{e^{i\nu/2}}$, $v_\rho(z)=[v_\rho(z)]^{1/2}/[\overline{v_\rho(\bar z)}]^{1/2}$, $h_\rho(z)/g_\rho(z)=$

$h_\rho(z)/\overline{h_\rho(\bar z)}$, и при $\rho_{\text{в}}(z) = e^{i\nu/2}[v_\rho(z)]^{1/2}h_\rho(z)$ имеем $A(z) = [\rho_{\text{в}}(z)/\overline{\rho_{\text{в}}(\bar z)}]\overline{A(\bar z)}$, т.е. $A_{\text{в}}(z) = \rho_{\text{в}}^{-1}(z)A(z)$ — вещественная плюс-матрица-функция ограниченной характеристики. По теореме 2.2 она коллинеарна вещественной j-растягивающей матрице-функции ограниченной характеристики.

Для аналитического обобщения предложения 1.3 вспомним замечание к предложению 1.2 и выясним, можно ли в равенстве

$$A^\tau(z)J_sA(z) = \sigma_A(z)J_s \tag{3.1}$$

с мероморфной функцией $\sigma_A(z)$ перейти к мероморфному коэффициенту коллинеарности $\rho(z) = \sqrt{\sigma_A(z)}$. Матрица-функция $A_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет (3.1) с $\sigma_1(z) = z$. Так как $\rho(z) = \sqrt{z}$ — не мероморфная функция, то матрица-функция $A_1(z)$ не коллинеарна никакой мероморфной симплектической матрице-функции. Заметим, что матрицы-функции $A_1(z)$ и $A_2(z) = z^{-1}A_1(z)$ — мероморфные j-растягивающие, а $\sigma_1(z) = z = \det A_1(z)$, $\sigma_2(z) = z^{-1} = \det A_2(z)$.

Лемма 3.1. *Если мероморфная неособенная плюс-матрица-функция $A(z)$ удовлетворяет соотношению (3.1), то среди коллинеарных ей мероморфных j-растягивающих матриц-функций можно выбрать такую $W_0(z)$, чтобы в равенстве*

$$W_0^\tau(z)J_sW_0(z) = \sigma_0(z)J_s \tag{3.2}$$

функция $\sigma_0(z)$ была отношением произведений множителей Бляшке, отвечающих различным нулям и полюсам функции $\det W_0(z)$.

Доказательство. Для мероморфной j-растягивающей матрицы-функции $W(z)$ в соотношении

$$W^\tau(z)J_sW(z) = \sigma_W(z)J_s \tag{3.3}$$

функция $\sigma_W(z)$ имеет ограниченную характеристику, т.е. $\sigma_W(z) = e^{i\nu}v_\sigma(z)$ $\times b_h(z)s_h(z)/b_g(z)s_g(z)$. Если произведение Бляшке (1.6) $b(z) = \prod\limits_i B_i(z)$ содержит множитель $B_i(z)$ точно k_i раз, то $b(z) = \prod\limits_i [B_i(z)]^{k_i}$, где все $B_i(z)$ различны. Пусть $k_r = 2n_r$, $k_j = 2n_j + 1$, тогда $b(z) = [\tilde b(z)]^2 b_0(z)$, где $\tilde b(z) = \prod\limits_r [B_r(z)]^{n_r} \cdot \prod\limits_j [B_j(z)]^{n_j}$, а $b_0(z) = \prod\limits_j B_j(z)$. При $\tilde v(z) = [v(z)]^{1/2}$, $\tilde s(z) = [s(z)]^{1/2}$ имеем

$$\sigma_W(z) = [e^{i\nu/2}\tilde v_\sigma(z)\tilde b_h(z)\tilde s_h(z)/\tilde b_g(z)\tilde s_g(z)]^2 b_{h,0}(z)/b_{g,0}(z),$$

где $\tilde b_h(z)$, $\tilde s_h(z)$, $\tilde b_g(z)$, $\tilde s_g(z)$ — внутренние функции, $\tilde v_\sigma(z)$ — внешняя, $b_{h,0}(z)$, $b_{g,0}(z)$ — произведения различных множителей Бляшке. При делении

$W(z)$ на $e^{i\nu/2}\tilde{v}_\sigma(z)$ матрицы-функции $a(z)$ и $d(z)$ не выходят из класса $\mathcal{D}$. Для матрицы-функции $\hat{W}(z) = [e^{i\nu/2}\tilde{v}_\sigma(z)]^{-1}W(z)$ вида (0.1) из равенства $\hat{W}^\tau(z)J_s\hat{W}(z) = \hat{\sigma}(z)J_s$ имеем

$$\beta^\tau(z)\delta(z) = \delta^\tau(z)\beta(z), \quad \delta^\tau(z)\alpha(z) - \beta^\tau(z)\gamma(z) = \hat{\sigma}(z)I_p\,,$$

откуда

$$\alpha(z) - \beta(z)\delta^{-1}(z)\gamma(z) = \hat{\sigma}(z)[\delta^\tau(z)]^{-1},$$

т.е.

$$a(z) = [\tilde{b}_h(z)\tilde{s}_h(z)/\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)]^2[b_{h,0}(z)/b_{g,0}(z)]d^\tau(z)$$

или

$$\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)b_{g,0}(z)a(z) = [b_h(z)s_h(z)/\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)]d^\tau(z).$$

Левая часть этого равенства принадлежит классу $\mathcal{D}$. Так как внутренняя функция $b_h(z)s_h(z)$ взаимно проста с $\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)$, то матрица-функция $d(z)$ делится на $\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)$. Так же и $\tilde{b}_h(z)\tilde{s}_h(z)$ — делители матрицы-функции $a(z)$. Поэтому при делении $\hat{W}(z)$ на $\rho_2(z) = \tilde{b}_h(z)\tilde{s}_h(z)/\tilde{b}_g(z)\tilde{s}_g(z)$ матрицы-функции $a(z)$ и $d(z)$ остаются в классе $\mathcal{D}$.

Матрица-функция $W_0(z) = \rho_2^{-1}(z)\hat{W}(z)$ удовлетворяет (3.2) с $\sigma_0(z) = b_{h,0}(z)/b_{g,0}(z)$, ее граничные значения $W_0(\zeta)$ (п.в., $|\zeta| = 1$) удовлетворяют условиям предложения 1.2 (см. замечание), следовательно, $W_0^*(\zeta)jW_0(\zeta) \geq j$. По лемме 2.2 матрица-функция $W_0(z)$ — j-растягивающая в круге K. Так как $\det\, W_0(z) = \sigma_0^p(z)$, то множества нулей (полюсов) функций $\sigma_0(z)$ и $\det\, W_0(z)$ совпадают.

З а м е ч а н и е. Если j-растягивающая мероморфная матрица-функция $W(z)$ удовлетворяет (3.3), в котором $\sigma_W(z) = \prod\limits_i B_{h,i}(z)/\prod\limits_k B_{g,k}(z)$ — отношение произведений всех различных множителей Бляшке $B_{h,i}(z)$ и $B_{g,k}(z)$, то j-растягивающей мероморфной является всякая матрица-функция $W_{g,k}(z) = B_{g,k}(z)W(z)$ и $W_{h,i}(z) = B_{h,i}^{-1}(z)W(z)$.

Следствием леммы 3.1 является

Предложение 3.2. *Если мероморфная плюс-матрица-функция $A(z)$ удовлетворяет (3.1), где $\sigma_A(z)$ — отношение произведений различных множителей Бляшке, то матрица-функция $A(z)$ — j-растягивающая.*

В самом деле, пусть $\sigma_A(z) = b_h(z)/b_g(z)$ содержит лишь различные множители Бляшке. Рассмотрим $A_1(z) = b_g(z)A(z)$. По лемме 3.1 и замечанию $A_1(z) = \rho(z)W(z)$, где $W(z)$ — мероморфная j-растягивающая матрица-функция, для которой в (3.3) функция $\sigma_W(z)$ — произведение различных множителей Бляшке. Но тогда $\rho^2(z) = b_h(z)b_g(z)/\sigma_W(z)$, откуда $\rho(z) = \pm 1$. Матрица-функция $A_1(z) = \pm W(z)$ — j-растягивающая и соответствующая

$\sigma_{A_1} = \sigma_W = b_h(z)b_g(z)$. По замечанию матрица-функция $A(z) = b_g^{-1}(z)A_1(z)$ — также j-растягивающая.

Предложение 3.2 делает естественным

Определение. Мероморфная матрица-функция $A(z)$ называется *"симплектической" ("антисимплектической")*, если она удовлетворяет (3.1), где $\sigma_A(z)$ $\Big(-\sigma_A(z)\Big)$ — отношение произведений различных множителей Бляшке.

Используя предложение 1.3, лемму 3.1 и замечание к ней, убеждаемся, что справедлива

Теорема 3.2. *Для того чтобы ДЛП (0.2) отображало множество S_{pp} в себя, причем так, чтобы симметрические матрицы-функции переходили в симметрические, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов этого преобразования была коллинеарна мероморфной j-растягивающей "симплектической" матрице-функции $W(z)$; в частности, $W(z)$ можно выбрать так, чтобы:*

1) функция $\det W(z)$ *была голоморфной в круге K, а соответствующая $\sigma_W(z)$ в (3.3) была произведением множителей Бляшке, отвечающих различным нулям функции* $\det W(z)$;

2) либо $\det W(z)$ *не обращался в нуль в круге K, а соответствующая $\sigma_W^{-1}(z)$ была произведением множителей Бляшке, отвечающих различным полюсам функции* $\det W(z)$.

Аналогично доказывается аналитическое обобщение предложения 1.4, а именно:

Теорема 3.3. *Для того чтобы ДЛП (0.2) отображало множество S_{pp} в себя, причем так, чтобы вещественные симметрические матрицы-функции переходили в вещественные симметрические, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов этого преобразования была коллинеарна мероморфной j-растягивающей вещественной "симплектической" или "антисимплектической" матрице-функции $W(z)$, причем $W(z)$ можно выбрать так, чтобы соответствующая $\sigma_W(z)$ в (3.3) обладала (возможно, с точностью до знака) свойствами, отмеченными в теореме 3.2.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность Д.З. Арову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Л.А. Симакова*, О плюс-матрицах-функциях ограниченной характеристики. — *Мат. исследования*, Кишинев (1974), т. 9, вып. 2(32), с. 149–171.

[2] *Л.А. Симакова*, О мероморфных плюс-матрицах-функциях. — *Мат. исследования*, Кишинев (1975), т. 10, вып. 1(35), с. 287–292.

[3] *Д.З. Аров*, Реализация матриц-функций по Дарлингтону. — *Изв. АН СССР*, (1973), т. 37, № 6, с. 1299–1331.

[4] *Д.З. Аров*, Матрица рассеяния и импеданс канонической дифференциальной системы с диссипативным граничным условием, в которой коэффициент является рациональной матрицей-функцией от спектрального параметра. — *Алгебра и анализ*, (2001), т. 13, № 4, с. 26–53.

[5] *А.В. Ефимов, В.П. Потапов*, J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. — *Успехи мат. наук*, (1973), т. 28, вып. 1(169), с. 65–130.

[6] *М.Г. Крейн, Ю.Л. Шмульян*, О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой. — *Мат. исследования*, Кишинев (1966), т. 1, вып. 1, с. 131–161.

[7] *В.П. Потапов*, Дробно-линейные преобразования матриц. В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Наукова думка, Киев (1979), с. 75–97.

[8] *М.Г. Крейн, Ю.Л. Шмульян*, О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами. — *Мат. исследования*, Кишинев (1967), т. 2, вып. 3, с. 64–96.

[9] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970).

[10] *D. Arov and H. Dym*, J-inner matrix function interpolation and inverse problems for canonical systems, III: More on the inverse monodromy problem. — *Integr. Equat. Operator Theory* (2000), v. 36, № 2, p. 127–181.

[11] *J.W. Helton and J.A. Ball*, The cascade decomposition of a given system vs the linear fractional decompositions of its transfer function. — *Integr. Equat. Operator Theory* (1982), v. 5, p. 341–385.

On real and "symplectic" meromorphic plus-matrix-function and corresponding linear fractional transformation

L.A. Simakova

The basic result is: if linear fractional transformation with meromorphic in the unit disk nondegenerate matrix of coefficients $A(z)$ maps the class of holomorphic contractive matrix function into itself so that real (symmetric) matrix functions are transformed into real (symmetric) matrix functions then there exists a meromorphic scalar function $\rho(z)$ such that $\rho^{-1}(z)A(z)$ is j-expansive real ("symplectic" or "antisymplectic") matrix function.