Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 1, с. 67–86

Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$

Н.И. Нессонов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:nessonov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 2 августа 2002 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Статья является третьей и последней частью работы, в которой получено полное описание фактор-представлений группы $GL(\infty)$, определяемых унитарно инвариантными положительно определенными функциями. Здесь приведены необходимые и достаточные условия на параметры КМШ-состояния на группе $GL(\infty)$, при которых соответствующее сферическое представление группы $GL(\infty)\times GL(\infty)$ является стандартным.

Стаття є третьою і останньою частиною роботи, де одержано повний опис фактор-представлень групи $GL(\infty)$, які визначаються унітарно-інваріантними додатньо-визначеними функціями. Тут наведено необхідні та достатні умови на параметри КМШ-станів на групі $GL(\infty)$, при яких відповідні сферичні представлення групи $GL(\infty)\times GL(\infty)$ є стандартними.

5. Модулярный оператор для н.у.и. КМШ-состояний на $G(\mathbb{C})$ и условия стандартности

В предыдущем разделе по н.у.и. КМШ-состоянию φ на $G(\mathbb{C})$ нами построено сферическое неприводимое представление $\Pi_\varphi^{(2)}$ группы $G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})$ (см. (4.4)), которое унитарно эквивалентно согласно теореме 2.13 представлению $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$. По ходу конструкции появился унитарный оператор u_φ, удовлетворяющий условиям леммы 4.8. Далее, опираясь на эти факты, мы определили сферическое неприводимое представление $\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}$ группы $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, являющееся расширением $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$. Принципиально важным есть

Mathematics Subject Classification 2000: 46L55, 46L65.

тот факт, что $\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}$ представляет собой *стандартное* (унитарно эквивалентное представлению $\widetilde{\Pi}^{(2)}$, которое определяется согласно (4.32)) фактор-представление группы $G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty(\mathbb{C})$, построенное по расширению $\hat{\varphi}$ состояния φ на $G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty(\mathbb{C})$. Наконец, в теореме 4.20 приведен список необходимых свойств параметров $(A,\hat{\kappa},\hat{z},u_{\hat{\varphi}})$, вытекающих из того, что $\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}$ является *стандартным.*

Для полноты изложения сформулируем определение *стандартного* представления.

Определение 5.1. *Пусть G — произвольная группа, e — ее единица, Π — унитарное представление группы $G\times G$, действующее в гильбертовом пространстве H с циклическим одновременно для $\Pi(G\times e)$ и $\Pi(e\times G)$ вектором ξ $([\Pi(G\times e)\xi]=[\Pi(e\times G)\xi]=H)$, $\mathcal{J}$ и Δ — соответствующие ξ антиунитарная изометрия и модулярный оператор. Представление Π будем называть стандартным, если $\Pi(g\times h)=\Pi(g\times e)\mathcal{J}\Pi(h\times e)\mathcal{J}\ \ \forall\, g\times h\in G\times G$.*

Основной результат этого раздела

Теорема 5.2. *Пусть $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\frac{\hat{\kappa}(f)+I_{k(\varphi)}}{2}=\begin{bmatrix}I_l & 0\\ X & 0\end{bmatrix}$ такие же, как в теореме 4.20, и $u=\begin{bmatrix}\frac{X}{\sqrt{I+X^2}} & -\frac{I_l}{\sqrt{I+X^2}}\\ -\frac{I_l}{\sqrt{I+X^2}} & -\frac{X}{\sqrt{I+X^2}}\end{bmatrix}$. Представление $\Pi^{\chi,0}_{A,\hat{\kappa}}$ группы $G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})$ тогда и только тогда является стандартным, когда выполняются следующие условия:*

a) $uAu^*=-A,\quad uBu^*=I_{k(\varphi)}-B$;

b) матрица $B^*D\left(I_{k(\varphi)}-B\right)+\left(I_{k(\varphi)}-B^*\right)DB$, где $D=I_{k(\varphi)}+2iA$, невырождена;

c) матрица $\Delta(A,X)=\begin{bmatrix}\frac{X}{\sqrt{I_l+X^2}} & \frac{-I_l}{\sqrt{I_l+X^2}}\\ \frac{-I_l}{\sqrt{I_l+X^2}} & \delta_{22}\end{bmatrix}$,

где $\delta_{22}=\Big\{X+2\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]^{-1}\left[I_l-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)X\right]\Big\}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и у с л о в и й т е о р е м ы 5.2. В первую очередь напомним, что необходимость условия *b)* установлена в лемме 4.12. Далее заметим, что согласно результатам разд. 4 (см. теорему 4.20) $\Pi^{\chi,0}_{A,\hat{\kappa}}$ расширяется до представления $\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}$ группы $G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty(\mathbb{C})$. Обоснование свойств *a)* и *c)* использует вид действия модулярного оператора на линейных формах, вычислением которого мы займемся.

Пусть e — единица группы $G(\mathbb{C})$, $m_1,\, m_2 \in M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$; $\widehat{m_1} = (e, m_1) \times (e, 0_l)$, $\widehat{m_2} = (e, 0_l) \times (e, m_2)$. Обозначим через $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{l})}$ $\left(\mathfrak{K}^{(\mathfrak{r})}\right)$ коммутативную w^*-алгебру, порожденную операторами $\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(\widehat{m_1}\right)$ $\left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(\widehat{m_2}\right)\right)$, которые действуют в $L^2\Big(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\Big)$. Пусть $\mathcal{M}(f) \in \mathfrak{K}^{(\mathfrak{l})}$ определяется умножением на функцию $f \in L^\infty\Big(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\Big)$.

Тогда $S\left(\mathcal{M}(f)\right)\xi_0 = \mathcal{M}(f)^*\xi_0 = \mathcal{M}(\bar{f})\xi_0$, где черта означает комплексное сопряжение, а ξ_0 определяется функцией, тождественно равной единице.

Далее $S = \mathcal{J}_{\hat{\varphi}}\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}$, где $\mathcal{J}_{\hat{\varphi}}$ и $\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}$ — антиунитарная изометрия и модулярный оператор соответственно для алгебры

$$\left\{\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times (e, 0_l)\right)\right\}'',$$

построенные по циклическому отделяющему вектору ξ_0 (см. теорему 4.20, *b)–d)*). Но для $u_{\hat{\varphi}} = \begin{bmatrix} -\frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} \\ \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} \end{bmatrix}$ $\left(\mathcal{J}_{\hat{\varphi}}(\mathcal{M}(f)\xi_0)\right)(\lambda) = \bar{f}(u_{\hat{\varphi}}\lambda)$ (см. теорему 4.20, *e)*). Следовательно,

$$\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}(f)\xi_0)\right)(\lambda) = f(u_{\hat{\varphi}}\lambda).$$

Опираясь на это соотношение, учитывая вид представления $\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}$ и утверждение теоремы 4.20, *b)*, получаем

$$\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(\widehat{m_1}\right)\xi_0\right)\right)(\lambda) = \exp\left\{i\Re Tr\left[\hat{z}Bu_{\hat{\varphi}}\lambda m_1\right]\right\}. \tag{5.1}$$

Пусть $\xi^p_{m_1}(\lambda) = \left\{\Re Tr\left[\hat{z}B\lambda m_1\right]\right\}^p$. Представляя $\lambda \in \Lambda_{k(\varphi)}$ в виде $\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix}$ и опираясь на соотношение $\hat{z}B = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$, имеем $\xi^l_{m_1}(\lambda) = \left\{\Re Tr\left[\lambda_1 m_1\right]\right\}^l$. Отсюда и из соотношения (5.1) вытекает

$$\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi^l_{m_1}\right)(\lambda) = \left\{\Re Tr\left[\left(-\frac{v'X}{\sqrt{I_l+X^2}}\lambda_1 + \frac{v'}{\sqrt{I_l+X^2}}\lambda_2\right)\cdot m_1\right]\right\}^l. \tag{5.2}$$

Пусть λ_{pj} — матричный элемент матрицы Λ, ξ_{pj} $\left(\bar{\xi}_{pj}\right)$ — вектор из $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\right)$, определяемый функцией ξ_{pj} $\left(\bar{\xi}_{lj}\right)$ со значениями $\xi_{pj}(\lambda) = \lambda_{pj}$ $\left(\bar{\xi}_{pj}(\lambda) = \bar{\lambda}_{pj}\right)$. Обозначим через $\mathcal{H}_j$ подпространство в $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\right)$ с ортонормированным базисом $\left\{\xi_{pj},\ \bar{\xi}_{pj}\right\}_{p=1}^{k(\varphi)}$.

Если $\mathcal{H}_j^a$ — подпространство в $\mathcal{H}_j$, порожденное $\{\xi_{pj}\}_{p=1}^{k(\varphi)}$, то из (5.2) и из того факта, что $\Delta_{\hat{\varphi}}$ — самосопряженный оператор, получаем следующую матричную структуру $\Delta_{\hat{\varphi}}$ в $\mathcal{H}_j^a$ относительно базиса $\{\xi_{pj}\}_{p=1}^{k(\varphi)}$:

$$\Delta^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}_j^a} = \begin{bmatrix} -\frac{v'X}{\sqrt{I_l+X^2}} & \frac{v'}{\sqrt{I_l+X^2}} \\ \frac{v'}{\sqrt{I_l+X^2}} & * \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

где $*$ пока обозначает некоторую $l \times l$-матрицу ($2l = k(\varphi)$).

Так как $\Delta_{\hat{\varphi}} > 0$, то $-\frac{v'X}{\sqrt{I_l+X^2}} > 0$. Отсюда, учитывая коммутируемость v' и X (см. теорему 4.20, *e)*), получаем $-v'X > 0$. Если по построению $X \geq 0$ (см. лемму 4.9 и теорему 4.20, *e)*), то

$$v' = -I_l,\ X > 0.$$

Следовательно, матрица из (5.3) имеет вид

$$\Delta^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}_j^a} = \begin{bmatrix} \frac{X}{\sqrt{I_l+X^2}} & -\frac{I_l}{\sqrt{I_l+X^2}} \\ -\frac{I_l}{\sqrt{I_l+X^2}} & * \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Перейдем к определению блока этой матрицы, отмеченного $*$.

Пусть $u_t^{(n,j)}$ — унитарная $n \times n$-матрица вида

$$\begin{bmatrix} I_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-t^2} & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j-1} & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & \sqrt{1-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем будем отождествлять $u_t^{(n,j)}$ с его образом в $G(\mathbb{C})$ при естественном вложении $G(n)$ в $G(\mathbb{C})$.

Вычисление действия $\Delta^{\frac{1}{2}}_{\hat{\varphi}}$ на ξ_{pj} ($p > l$) основано на соотношении

$$\Delta^{\frac{1}{2}}_{\hat{\varphi}} \left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}} \left((u_t^{(n,j)}, 0_l) \times (e, 0_l) \right) \eta \right) = \Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}} \left((u_t^{(n,j)}, 0_l) \times (e, 0_l) \right) \Delta^{\frac{1}{2}}_{\hat{\varphi}} \eta,$$

где η — произвольный вектор из $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\right)$, $u \in U(\mathbb{C}) \subset G(\mathbb{C})$, которое вытекает из унитарной инвариантности φ.

Пусть $\Lambda_{k(\varphi)}(j)$ — множество j-х столбцов матриц $\lambda \in \Lambda_{k(\varphi)}$, $\lambda(j) \in \Lambda_{k(\varphi)}(j)$. Положим

$$\begin{aligned}
f^B_{jn}(t,\lambda) &= \exp\Big\{-\frac{1}{2}Tr\Big[\Big(\sqrt{1-t^2}-1\Big)\Big(B^*D(I_{k(\varphi)}-B) \\
&+ (I_{k(\varphi)}-B)^*DB\Big)\cdot\Big(\lambda(j)\lambda^*(j)+\lambda(n)\lambda^*(n)\Big) \\
&+ t\Big(B^*D(I_{k(\varphi)}-B)-(I_{k(\varphi)}-B)^*DB\Big)\lambda(n)\lambda^*(j) \\
&+ t\Big((I_{k(\varphi)}-B^*)DB-B^*D(I_{k(\varphi)}-B)\Big)\lambda(j)\lambda^*(n)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$c^{(r)}_{jn}(t,\lambda)=f^B_{jn}(t,\lambda)\Big[t\lambda_{rj}+\sqrt{1-t^2}\lambda_{rn}\Big].$$

Далее простая проверка показывает, что при $r=1,\,2,\dots,l$

$$\left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left((u_t^{(n,j)},0_l)\times(e,0_l)\right)\xi_{rn}\right)(\lambda)=c^{(r)}_{jn}(t,\lambda).$$

В силу индивидуальной эргодической теоремы в $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\right)$ существует сильный предел

$$\lim_{n\to\infty}\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left((u_t^{(n,j)},0_l)\times(e,0_l)\right)\xi_{rj}=\Phi^{(t)}_{rj}$$

и

$$\Phi^{(t)}_{rj}(\lambda)=\frac{1}{\pi^{k(\varphi)}}\int\limits_{\Lambda_{k(\varphi)}(n)}c^{(r)}_{jn}(t,\lambda)\exp\left\{-\lambda^*(n)\lambda(n)\right\}d\,\lambda(n).$$

Затем с помощью стандартных вычислений можно установить, что

$$\Psi_{rj}(\lambda)=\left(\frac{d\,\Phi^{(t)}_{rj}(\lambda)}{d\,t}\right)_{t=0}$$

$$=\lambda_{rj}-\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{k(\varphi)}\left[(I_{k(\varphi)}-B^*)DB-B^*D(I_{k(\varphi)}-B)\right]_{rs}\lambda_{sj}\,.$$

Так как $k(\varphi)=2l$, $D=I_{k(\varphi)}+2iA$, $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}I_l&0\\X&0\end{bmatrix}$ и $X=\begin{bmatrix}x_1&0&0&\dots&0\\0&x_2&0&\dots&0\\0&0&x_3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&x_l\end{bmatrix}$, то предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\Psi_{rj}(\lambda)=\lambda_{rj}+\tfrac{x_r}{2}\lambda_{(l+r)j}$$

$$+i\sum_{s=1}^{l}\left[(XA^*_{12}-A_{12}X)_{rs}\lambda_{sj}+(A_{12}+XA_{22})_{rs}\lambda_{(l+s)j}\right]. \tag{5.5}$$

Наша ближайшая цель — вычисление модулярного оператора $\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}$ на пространстве $\mathcal{H}_j^a$. Для этого, учитывая (5.4), достаточно найти действие $\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}$ на ξ_{rj} при $r = l+1,\ l+2, \dots, k(\varphi)$.

Так как $\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{J}_{\hat{\varphi}} \cdot S$, то в силу теоремы 4.20, *e)* для решения задачи достаточно вычислить действие инволюции S на ξ_{rj} при $r = l+1,\ l+2, \dots, k(\varphi)$.

При $r \le l$, опираясь на соотношение

$$S\left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(\left(u_t^{(n,j)}, 0_l\right) \times (e, 0_l)\right)\xi_{rn}\right)(\lambda)$$
$$= \bar{\lambda}_{rn}\left(\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},\hat{z}}\left(\left(u_{-t}^{(n,j)}, 0_l\right) \times (e, 0_l)\right)\xi_0\right)(\lambda)$$

и метод вывода формулы для Ψ_{rj}, можно показать прямыми вычислениями, что

$$\left(S\Psi_{rj}\right)(\lambda) = -i\sum_{s=1}^{l}\left(A_{12}X - XA_{12}^*\right)_{sr}\lambda_{sj}^*$$
$$-\tfrac{x_r}{2}\lambda^*_{(l+r)\,j} - i\sum_{s=1}^{l}\left(A_{12}^* + A_{22}X\right)_{sr}\lambda^*_{(s+l)\,j}. \tag{5.6}$$

Отсюда и из теоремы 4.20, *e)*, учитывая то, что $v' = -I_l$, получаем

$$\left(\mathcal{J}_{\hat{\varphi}}S\Psi_{rj}\right)(\lambda) = \left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\Psi_{rj}\right)(\lambda) = i\sum_{s=1}^{l}\left[\overline{\left(A_{12}X - XA_{12}^*\right)}_{sr}\right.$$
$$\left.\times\left(\tfrac{x_s}{\sqrt{1+x_s^2}}\lambda_{sj} - \tfrac{1}{\sqrt{1+x_s^2}}\lambda_{(s+l)\,j}\right)\right] + \tfrac{x_r}{2\sqrt{1+x_s^2}}\left(\lambda_{rj} + x_r\lambda_{(r+l)\,j}\right)$$
$$-i\sum_{s=1}^{l}\overline{\left(A_{12}^* + A_{22}X\right)}_{sr}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{1+x_s^2}}\left(\lambda_{sj} + x_s\lambda_{(s+l)\,j}\right)$$
$$= -i\sum_{s=1}^{l}\left[\left(A_{12} + XA_{22}\right)_{rs} + \left(A_{12}X - XA_{12}^*\right)_{rs}x_s\right]\left(\sqrt{1+x_s^2}\right)^{-1}\lambda_{sj}$$
$$+i\sum_{s=1}^{l}\left[\left(A_{12}X - XA_{12}^*\right)_{rs}\left(\sqrt{1+x_s^2}\right)^{-1}\right.$$
$$\left.-\left(A_{12} + XA_{22}\right)_{rs}x_s\left(\sqrt{1+x_s^2}\right)^{-1}\right]\lambda_{(s+l)\,j} + \tfrac{x_r}{2\sqrt{1+x_r^2}}\left(\lambda_{rj} + x_r\lambda_{(r+l)\,j}\right).$$

С другой стороны, согласно (5.4) и (5.5),

$$\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\Psi_{rj}\right)(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{1+x_r^2}}\left(x_r\lambda_{rj} - \lambda_{(r+l)\,j}\right)$$
$$+i\sum_{s=1}^{l}\left(XA_{12}^* - A_{12}X\right)_{rs}\tfrac{1}{\sqrt{1+x_s^2}}\left[x_s\lambda_{sj} - \lambda_{(s+l)\,j}\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}x_r\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi_{(l+r)\,j}\right)(\lambda) + i\sum_{s=1}^{l}\left(A_{12} + XA_{22}\right)_{rs}\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi_{(l+s)\,j}\right)(\lambda).$$

Сравнивая последние два соотношения, получаем

$$\tfrac{1}{2}\left[x_r\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi_{(l+r)\,j}\right)+2i\sum_{s=1}^{l}\left(A_{12}+XA_{22}\right)_{rs}\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi_{(l+s)\,j}\right)\right](\lambda)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x_r^2}}\left(-x_r\lambda_{r\,j}+\lambda_{(r+l)\,j}\right)-\sum_{s=1}^{l}\left[i\left(A_{12}+XA_{22}\right)_{rs}\left(\sqrt{1+x_s^2}\right)^{-1}\lambda_{s\,j}\right.$$
$$\left.+\delta_{s\,r}\frac{x_r^2}{2\sqrt{1+x_r^2}}\lambda_{(r+l)\,j}+i\left(A_{12}+XA_{22}\right)_{rs}x_s\left(\sqrt{1+x_s^2}\right)^{-1}\lambda_{(s+l)\,j}\right].$$

Полагая $\left(\xi_j^{(1)}\right)^{\sharp}=\begin{bmatrix}\xi^{\sharp}_{1\,j}\\ \vdots\\ \xi^{\sharp}_{l\,j}\end{bmatrix}$, $\left(\xi_j^{(2)}\right)^{\sharp}=\begin{bmatrix}\xi^{\sharp}_{(l+1)\,j}\\ \vdots\\ \xi^{\sharp}_{2l\,j}\end{bmatrix}$, $\left(\lambda_j^{(1)}\right)^{\sharp}=\begin{bmatrix}\lambda^{\sharp}_{1\,j}\\ \vdots\\ \lambda^{\sharp}_{l\,j}\end{bmatrix}$, $\left(\lambda_j^{(2)}\right)^{\sharp}=\begin{bmatrix}\lambda^{\sharp}_{(l+1)\,j}\\ \vdots\\ \lambda^{\sharp}_{2l\,j}\end{bmatrix}$, где $\sharp$ означает естественную инволюцию или ее отсутствие, запишем полученное соотношение в векторной форме

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\xi_j^{(2)}\right)(\lambda)=-\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\lambda_j^{(1)}\\ &+X\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\lambda_j^{(2)}+2\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]^{-1}\\ &\times\left[I_l-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)X\right]\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\lambda_j^{(2)}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_{\hat{\varphi}}^{\frac{1}{2}}\overline{\xi}_j^{(2)}\right)(\lambda)=-\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\overline{\lambda}_j^{(1)}\\ &+X\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\overline{\lambda}_j^{(2)}+2\left[X+2i\left(\overline{A_{12}+XA_{22}}\right)\right]^{-1}\\ &\times\left[I_l-2i\left(\overline{A_{12}+XA_{22}}\right)X\right]\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}\overline{\lambda}_j^{(2)}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Теперь, опираясь на соотношение $v'=-I_l$ и утверждение теоремы 4.20, *e)–f)*, получаем необходимость условия *a)*. Необходимость утверждения *d)* является простым следствием положительности модулярного оператора и соотношения (5.7). Таким образом, необходимость условий теоремы 5.2 установлена.

Прежде чем перейти к доказательству достаточности условий теоремы 5.2, установим три вспомогательных утверждения технического характера.

Предложение 5.3. *Пусть*

$$\alpha_{B,A}(\lambda, g) = |det\, g|^{dim\, B} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} Tr\Big[B^* DB\lambda(gg^* - I)\lambda^* + (I - B^*)DB\lambda(g - I)\lambda^* + B^*D(I - B)\lambda(g^* - I)\lambda^* \Big]\Big\}$$

($D = I + 2iA$, $g \in G(\mathbb{C})$), и представление Π группы $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ задано в гильбертовом пространстве $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$, $k = 2l$, операторами, действие которых определяется следующим образом:

$$(\Pi((g, 0_l) \times (e, 0_l))\xi)(\lambda) = \alpha_{B,A}(\lambda, g)\,\xi((I_k - B)\lambda + B\lambda g),$$
$$(\Pi((e, 0_l) \times (g, 0_l))\xi)(\lambda) = \alpha_{(I_k - B),A}(\lambda, g)\,\xi(B\lambda + (I_k - B)\lambda g);$$
$$\text{для } \widehat{m_1} = (e, m_1) \times (e, 0_l),\ \widehat{m_2} = (e, 0_l) \times (e, m_2)$$
$$(\Pi(\widehat{m_1})\xi)(\lambda) = \exp[i\Re Tr(zB\lambda m_1)]\,\xi(\lambda),$$
$$(\Pi(\widehat{m_2})\xi)(\lambda) = \exp[i\Re Tr(z(I_k - B)\lambda m_2)]\,\xi(\lambda),$$

где z — $l \times k$-матрица

Если матрица $B^*D(I_k - B) + (I_k - B)^*DB$ ($D = I_k + 2iA$) — невырождена, а ранг матриц zB и $z(I_k - B)$ равен l, то

$$\Big[\Pi\Big((U(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})) \times (e, 0_l)\Big)\xi_0\Big] = \Big[\Pi\Big((e, 0_l) \times (U(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}))\Big)\xi_0\Big] = L^2(\Lambda_k, \nu_k).$$

Доказательство. Для обоснования предложения достаточно установить, что $\Big[\Pi\Big((U(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})) \times (e, 0_l)\Big)\xi_0\Big]$ содержит векторы, определяемые полиномами от координатных функций $\left\{\lambda_{mj}, \overline{\lambda}_{mj}\right\}_{m=1}^{k}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Будем считать, не ограничивая общности, что $B = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$, где $X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_l)$. При этом предположении и при условии, что ранг матриц zB и $z(I_k - B)$ равен l, к w^*-алгебре $\mathcal{A} = \{\Pi((e \ltimes M_l(\mathbb{C})) \times (e, 0_l))\}''$ присоединены операторы умножения на полиномы от $\left\{\lambda_{mj}, \overline{\lambda}_{mj}\right\}_{m=1}^{l}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_B$ множество полиномов от $\left\{\left(\lambda^\sharp_{(s+l)\,j} - x_s\lambda^\sharp_{s\,j}\right)\right\}_{s=1}^{l}$, $j = 1, 2, 3,$, где $\sharp$ означает комплексное сопряжение или его отсутствие. Пусть η, $\zeta \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$. При этом η определяется полиномом из $\mathcal{Q}_B$, а функция на Λ_k, соответствующая ζ, не зависит от $\lambda_{m\,j}$, $m = 1, 2, \ldots, l$, $j \geq s$. Так же, как и при выводе соотношений (5.5)–(5.7), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,t}\left[\lim_{n\to\infty}\Pi\left((u_t^{(n,j)},0_l)\times(e,0_l)\right)\xi^\sharp_{m\,n}\,\eta\,\zeta\right]\right)_{t=0}(\lambda)\\
=\;\;& \eta(\lambda)\,\zeta(\lambda)\left[\lambda^\sharp_{m\,s}+i\sum_{f=1}^{l}\left(XA^*_{12}-A_{12}X\right)^\sharp_{m\,f}\lambda^\sharp_{f\,s}\right. \qquad (5.9)\\
+\;\;& \left.\frac{x_s}{2}\,\lambda^\sharp_{(m+l)\,s}+i\sum_{f=1}^{l}\left(A_{12}+XA_{22}\right)^\sharp_{m\,f}\lambda^\sharp_{(l+f)\,s}\right].
\end{aligned}$$

Так как векторы $\xi_{f\,s}$, соответствующие $\lambda_{f\,s}$, при $f=1,2,\ldots,l$ принадлежат $[\mathcal{A}\xi_0]\subset\left[\Pi\left((U(\mathbb{C}),0_l)\times(e,0_l)\right)\xi_0\right]=\mathcal{H}_\Pi$, а матрица $X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)^\sharp$ согласно условиям предложения невырождена, то в силу соотношения (5.9) из включения $\eta,\,\zeta\in\mathcal{H}_\Pi$ получаем, что $\eta\zeta\xi_{(l+f)\,s}\in\mathcal{H}_\Pi\ \ \forall f=1,2,\ldots,l$.

Теперь утверждение 5.3 вытекает из очевидной индукции, основанной на соотношении (5.9).

Предложение 5.4. *Пусть* Π *такое же, как и в условии предложения 5.3,* $\mathcal{H}^a_j\ \left(\overline{\mathcal{H}}^a_j\right)$ *— подпространство, натянутое на векторы* $\{\xi_{rj}\}_{r=1}^k\ \left(\left\{\overline{\xi}_{rj}\right\}_{r=1}^k\right)$, Δ *— модулярный оператор, который построен согласно теории Томита–Такесаки по вектору* ξ_0*, определяемому функцией на* Λ_k*, тождественно равной единице. Тогда матрица сужения* Δ *на* $\mathcal{H}_j=\mathcal{H}^a_j\oplus\overline{\mathcal{H}}^a_j$ *имеет вид* $\Delta=\begin{bmatrix}\Delta_1 & 0\\ 0 & \Delta_2\end{bmatrix}$*, где* $\Delta_1=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta^*_{12} & \delta_{22}\end{bmatrix}$*,* $\Delta_2=\begin{bmatrix}\delta'_{11} & \delta'_{12}\\ \delta'^*_{12} & \delta'_{22}\end{bmatrix}$*,* $\delta_{pq}\ \left(\delta'_{pq}\right)$*,* $p,q=1,2$ *—* $l\times l$*-матрицы, определяемые соотношениями:*

$$\begin{aligned}
\delta_{11}&=\delta'_{11}=I_l,\\
\delta_{12}&=-2\left[X-2i\left(A^*_{12}+XA_{22}\right)\right]^{-1}, \qquad (5.10)\\
\delta'_{12}&=-2\left[X-2i\left(\overline{A_{12}+A_{22}X}\right)\right]^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22}&=\left[X+2i\left(A_{12}+A_{22}X\right)\right]^{-1}\Big[4+\left(X-2i\left(A_{12}+A_{22}X\right)\right)\\
&\quad\times\left(X+2i\left(A^*_{12}+A_{22}X\right)\right)\Big]\left[X-2i\left(A^*_{12}+XA_{22}\right)\right]^{-1}, \qquad (5.11)\\
\delta'_{22}&=\left[X-2i\left(\overline{A_{12}+A_{22}X}\right)\right]^{-1}\Big[4+\left(X+2i\left(\overline{A_{12}+A_{22}X}\right)\right)\\
&\quad\times\left(X-2i\left(\overline{A^*_{12}+A_{22}X}\right)\right)\Big]\left[X+2i\left(\overline{A^*_{12}+XA_{22}}\right)\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что $\Delta=F\cdot S$, где $S\ (F)$ — антилинейный оператор в $L^2\left(\Lambda_k,\nu_k\right)$, соответствующий инволюции на алгебре

$$\left\{\Pi\left((G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}))\times(e,0_l)\right)\right\}''\left(\left\{\Pi\left((e,0_l)\times(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}))\right)\right\}''\right).$$

Доказательство основано на прямом вычислении действия операторов S и F на подпространствах $\mathcal{H}_j^a$ и $\overline{\mathcal{H}}_j^a$.

Прежде всего заметим, что в силу условий утверждения операторы умножения на ограниченные функции, зависящие только от $\{\lambda_{r\,j}\}_{r=1}^l$, $j=1,2,\dots$, принадлежат

$$\left\{\Pi\left((G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}))\times(e,0_l)\right)\right\}''.$$

Следовательно,

$$(S\xi_{r\,j})(\lambda)=\lambda_{r\,j}^*=\overline{\lambda}_{r\,j}\,,\quad 1\le r\le l\ \ \forall\, j. \tag{5.12}$$

Далее, используя соотношения (5.5) и (5.6), получаем

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}_{r\,j}-i\sum_{s=1}^{l}\left[\overline{(XA_{12}^*-A_{12}X)}_{r\,s}\overline{\lambda}_{s\,j}\right]+\tfrac{x_r}{2}S\left(\xi_{(l+r)\,j}\right)(\lambda)\\ -i\sum_{s=1}^{l}\left[\overline{(A_{12}+XA_{22})}_{r\,s}S\left(\xi_{(l+s)\,j}\right)(\lambda)\right]=-i\sum_{s=1}^{l}\left[(A_{12}X-XA_{12}^*)_{s\,r}\,\overline{\lambda}_{s\,j}\right]\\ -\tfrac{x_r}{2}\lambda_{(l+r)\,j}-i\sum_{s=1}^{l}\left[(A_{12}^*+A_{22}X)_{sr}\,\overline{\lambda}_{(s+l)\,j}\right].\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\tfrac12\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{s\,r}\left(S\xi_{(s+l)\,j}\right)(\lambda)\\ =-\overline{\lambda}_{r\,j}-x_r\overline{\lambda}_{(r+l)\,j}+\tfrac12\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{(s+l)\,j}\,.\end{gathered} \tag{5.13}$$

Опираясь на условия предложения, из этого соотношения можно получить выражение для $S\left(\xi_{(l+r)\,j}\right)(\lambda)$ при $r=1,2,\dots,l$. Совершенно аналогично проводятся вычисления в случае $S\left(\xi^*_{(r+l)\,j}\right)(\lambda)$. А именно,

$$\begin{gathered}\tfrac12\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}\left(S\xi^*_{(s+l)\,j}\right)(\lambda)\\ =-\lambda_{r\,j}-x_r\lambda_{(r+l)\,j}+\tfrac12\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}\lambda_{(s+l)\,j}.\end{gathered} \tag{5.14}$$

Так как в силу условий предложения операторы умножения на функции $\left\{\left(\xi^{\sharp}_{(r+l)\,j} - x_r\xi^{\sharp}_{r\,j}\right)\right\}_{r=1}^{l}$, $\quad j = 1,2,3,\dots$, присоединены к

$$\left\{\Pi\left((e,0_l)\times(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}))\right)\right\}'',$$

то

$$\left(F\left(\xi_{(r+l)\,j} - x_r\xi_{r\,j}\right)\right)(\lambda) = \overline{\lambda}_{(r+l)\,j} - x_r\overline{\lambda}_{r\,j}\,. \tag{5.15}$$

Для вычисления $F\xi_{r\,j}$, $1\le r\le 2l = k$, воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} &F\left(\Pi\left((e,0_l)\times(u_t^{(n,j)},0_l)\right)\left(\xi_{(r+l)\,n} - x_r\xi_{r\,n}\right)\right)\\ &= \left(\xi^{*}_{(r+l)\,n} - x_r\xi^{*}_{r\,n}\right)\Pi\left((e,0_l)\times(u_{-t}^{(n,j)},0_l)\right)\xi_0\,. \end{aligned}\tag{5.16}$$

Далее с помощью прямых вычислений убеждаемся, что при $r = 1,2,\dots,l$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{r\,j}(\lambda) &= \left(\tfrac{d}{d\,t}\left[\lim_{n\to\infty}\Pi\left((e,0_l)\times(u_t^{(n,j)},0_l)\right)\left(\xi_{(r+l)\,n} - x_r\xi_{r\,n}\right)\right]\right)_{t=0}(\lambda)\\ &= \lambda_{(r+l)\,j} - x_r\lambda_{r\,j} + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[\left(I_l + X^2\right)\left(X + 2iA_{12}^{*} + 2iA_{22}X\right)\right]_{r\,s}\lambda_{s\,j}\\ &\quad + \tfrac{x_r}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X + 2iA_{12} + 2iXA_{22}\right]_{r\,s}\left(\lambda_{(s+l)\,j} - x_s\lambda_{s\,j}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, опираясь на (5.16), аналогично убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} &\left(F\hat{\Psi}_{r\,j}\right)(\lambda)\\ &= \left(\tfrac{d}{d\,t}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\lambda}_{(r+l)\,n} - x_r\overline{\lambda}_{r\,n}\right)\left(\Pi\left((e,0_l)\times(u_{-t}^{(n,j)},0_l)\right)\xi_0\right)(\lambda)\right]\right)_{t=0}\\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X + 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j} + i\,x_r\sum_{s=1}^{l}\left(XA_{12}^{*} - A_{12}X\right)_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j}\\ &\quad - \tfrac{x_r}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X + 2i\left(A_{12}^{*} + A_{22}X\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{(s+l)\,j}\,. \end{aligned}$$

Из этого соотношения, учитывая вид $\hat{\Psi}_{r\,j}$ и (5.15), получаем

$$\begin{aligned} &\overline{\lambda}_{(r+l)\,j} - x_r\overline{\lambda}_{r\,j} + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\overline{\left[\left(I_l + X^2\right)\left(X + 2iA_{12}^{*} + 2iA_{22}X\right)\right]}_{r\,s}\left(F\xi_{s\,j}\right)(\lambda)\\ &\quad + \tfrac{x_r}{2}\sum_{s=1}^{l}\overline{\left[X + 2iA_{12} + 2iXA_{22}\right]}_{r\,s}\left(\overline{\lambda}_{(s+l)\,j} - x_s\overline{\lambda}_{s\,j}\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X + 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j} + i\,x_r\sum_{s=1}^{l}\left(XA_{12}^{*} - A_{12}X\right)_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j}\\ &\quad - \tfrac{x_r}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X + 2i\left(A_{12}^{*} + A_{22}X\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{(s+l)\,j}\,. \end{aligned}$$

Несложными преобразованиями это равенство приводится к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[\left(X-2iA_{12}-2iXA_{22}\right)\left(I_l+X^2\right)\right]_{s\,r}F\left(\xi_{s\,j}\right)(\lambda)$$
$$=-\left(1+x_r^2\right)\overline{\lambda}_{(r+l)\,j}+x_r\left(1+x_r^2\right)\overline{\lambda}_{r\,j}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[\left(X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right)\left(I_l+X^2\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j}\,.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{s\,r}\left(F\xi_{s\,j}\right)(\lambda)$$
$$=-\overline{\lambda}_{(r+l)\,j}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{s\,r}\overline{\lambda}_{s\,j}\,. \tag{5.17}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор F и учитывая (5.15), получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{r\,s}\lambda_{s\,j}$$
$$=-\lambda_{(r+l)\,j}+x_r\lambda_{r\,j}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[-X+2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{r\,s}\left(F\xi_{s\,j}^*\right)(\lambda).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{r\,s}\left(F\xi_{s\,j}^*\right)(\lambda)$$
$$=-\lambda_{(r+l)\,j}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{r\,s}\lambda_{s\,j}\,. \tag{5.18}$$

Применяя оператор F к левой и правой частям соотношения (5.13), получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}\left(\Delta\xi_{(s+l)\,j}\right)(\lambda)$$
$$=-\left(F\xi_{r\,j}^*\right)(\lambda)-x_r\left(F\xi_{(r+l)\,j}^*\right)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]\left(F\xi_{(s+l)\,j}^*\right)(\lambda)\,.$$

Отсюда и из соотношений (5.15), (5.18) вытекает

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}\left(\Delta\xi_{(s+l)\,j}\right)(\lambda)$$
$$=-\lambda_{r\,j}+2\left(1+x_r^2\right)\sum_{s=1}^{l}\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{r\,s}^{-1}$$
$$-x_r\lambda_{(r+l)\,j}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}\lambda_{(s+l)\,j}$$
$$-\sum_{s=1}^{l}\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]_{r\,s}x_s\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]_{s\,t}^{-1}\lambda_{(t+l)\,j}\,.$$

Переписав это равенство в векторной форме

$$\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]\left(\Delta\xi_j^{(2)}\right)(\lambda)$$
$$=4\left(I_l+X^2\right)\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]^{-1}\lambda_j^{(2)}$$
$$-2\lambda_j^{(1)}+\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]\lambda_j^{(2)}-X\lambda_j^{(2)}$$
$$-\left[X+2i\left(A_{12}+XA_{22}\right)\right]X\left[X-2i\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)\right]^{-1}\lambda_j^{(2)}\,,$$

получаем требуемые выражения для δ_{22} и δ_{21}.

Аналогично, опираясь на соотношения (5.14), (5.15) и (5.17), можно вывести формулы для δ_{12}' и δ_{22}'. Предложение 5.4 доказано.

Следующая лемма необходима для того, чтобы установить совпадение на $\mathcal{H}_j=\mathcal{H}_j^a\oplus\overline{\mathcal{H}}_j^a$ при выполнении условий теоремы 5.2 оператора, определяемого согласно (5.4), (5.7), (5.8), с $\sqrt{\Delta}$, где Δ — модулярный оператор, который вычислен в предложении 5.4.

Лемма 5.5. *При выполнении условия a) из теоремы 5.2 справедливы следующие соотношения:*

i) $[A_{11},X]=[A_{22},X]=0$,

ii) $\sqrt{I_l+X^2}\left(A_{12}^*+A_{22}X\right)=-\left(A_{12}+XA_{22}\right)\sqrt{I_l+X^2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если u — унитарная матрица из условия теоремы 5.2, то соотношение $uA=-Au$ в блочной форме эквивалентно следующим условиям:

$$X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}A_{11}-\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}A_{12}^*$$
$$=-A_{11}X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}+A_{12}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} & X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{12}-\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{22}^* \\ = \; & A_{11}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}+A_{12} X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} & \left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{11}+X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{12}^* \\ = \; & A_{12}^* X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}-A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} & \left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{12}+X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{22} \\ = \; & -A_{12}^*\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}-A_{22} X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Очевидно, что (5.22) совпадает с ii).

Для обоснования i) заметим, что в силу (5.22)

$$\begin{aligned} A_{12} = & -X A_{22}+\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{12}^*\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & -\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Кроме этого, соотношение (5.21) эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} A_{11} = & -X A_{12}^*+\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{12}^* X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & -\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Отсюда

$$A_{11}^*=-A_{12} X+\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} X A_{12}\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя в правую часть этого соотношения выражение для A_{12} из (5.23), получаем

$$\begin{aligned} & A_{11}^*=X A_{22} X+\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{12}^* X\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ + \; & \left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{22} X^2\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} X^2 A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ - \; & X A_{12}^*-X A_{22} X-\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Из этого равенства с учетом (5.24) и самосопряженности A_{11} имеем

$$\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}} A_{22} X^2\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(I_l+X^2\right)^{-\frac{1}{2}} X^2 A_{22}\left(I_l+X^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $A_{22} X^2=\left(I_l+X^2\right)^{-1} X^2 A_{22}\left(I_l+X^2\right)$ или $\left(I_l+X^2\right) A_{22} X^2= X^2 A_{22}\left(I_l+X^2\right)$. Из последнего соотношения, наконец, получаем

$$[A_{22}, X^2]=0 \iff [A_{22}, X^2]=0.$$

Для доказательства перестановочности A_{11} с X следует повторить приведенные рассуждения, опираясь на равенства (5.19), (5.20).

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и у с л о в и й т е о р е м ы 5.2. В первую очередь заметим, что согласно предложению 5.3 ξ_0 является циклическим вектором для

$$\Pi\Big(\left(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times(e,0_l)\Big) \ \text{ и } \ \Pi\Big((e,0_l)\times\left(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\Big)\,.$$

Поэтому достаточно установить, что антиунитарная изометрия $\mathcal{J}_u$, действие которой задано соотношением

$$\left(\mathcal{J}_u\xi\right)(\lambda)=\overline{\xi}(u\lambda),$$

где $u=\begin{bmatrix}\frac{X}{\sqrt{I_l+X^2}} & -\frac{I_l}{\sqrt{I_l+X^2}}\\ -\frac{I_l}{\sqrt{I_l+X^2}} & -\frac{X}{\sqrt{I_l+X^2}}\end{bmatrix}$, определяет полярное разложение антилинейного оператора S. А именно,

$$\mathcal{J}_uS>0 \ \text{ на } \ L^2\Big(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\Big). \tag{5.25}$$

Согласно (5.4), (5.7), (5.8) на инвариантных относительно $\mathcal{J}_uS$ подпространствах $\mathcal{H}_j^a$ и $\overline{\mathcal{H}}_j^a$ оператор $\mathcal{J}_uS$ определяется матрицами $\mathfrak{D}=\begin{bmatrix}\mathfrak{D}_{11} & \mathfrak{D}_{12}\\ \mathfrak{D}_{12}^* & \mathfrak{D}_{22}\end{bmatrix}$ и $\mathfrak{D}'=\begin{bmatrix}\mathfrak{D}'_{11} & \mathfrak{D}'_{12}\\ \mathfrak{D}'^*_{12} & \mathfrak{D}'_{22}\end{bmatrix}$, соответственно, где

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{11} &= \mathfrak{D}'_{11}=\frac{X}{\sqrt{I_l+X^2}}\,,\\
\mathfrak{D}_{12} &= \mathfrak{D}'_{12}=-\frac{I_l}{\sqrt{I_l+X^2}}\,,\\
\mathfrak{D}_{22} &= \Big\{X+2\Big[X+2i(A_{12}+XA_{22})\Big]^{-1}\\
&\quad\times\Big[I_l-2i(A_{12}+XA_{22})X\Big]\Big\}\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}.\\
\mathfrak{D}'_{22} &= \Big\{X+2\Big[X+2i(\overline{A_{12}+XA_{22}})\Big]^{-1}\\
&\quad\times\Big[I_l-2i(\overline{A_{12}+XA_{22}})X\Big]\Big\}\left(\sqrt{I_l+X^2}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что на подпространстве $\mathcal{H}_j^a\oplus\overline{\mathcal{H}}_j^a$ оператор

$$\mathcal{J}_u\mathcal{J}_uS\mathcal{J}_u=\left(\mathcal{J}_uS\right)^{-1}. \tag{5.26}$$

Так как на $\mathcal{H}_j^a \oplus \overline{\mathcal{H}}_j^a$ матрица оператора $\mathcal{J}_u S$ имеет вид $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}' \end{bmatrix}$, то с помощью прямых вычислений убеждаемся, что $\mathcal{J}_u \mathcal{J}_u S \mathcal{J}_u$ определяется матрицей $\begin{bmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}' \end{bmatrix}$, где $\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}' = \begin{bmatrix} \mathcal{D}'_{11} & \mathcal{D}'_{12} \\ \mathcal{D}'_{21} & \mathcal{D}'_{22} \end{bmatrix}$ и

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{11} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{X + 2\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1}\right\}, \\
\mathcal{D}_{12} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-I_l + 2\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1} X\right\}, \\
\mathcal{D}_{21} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-I_l + 2X\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1}\right\}, \\
\mathcal{D}_{22} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-X + 2X\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1} X\right\}, \\
\mathcal{D}'_{11} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{X + 2\left[X - 2i\left(\overline{A_{12} + XA_{22}}\right)\right]^{-1}\right\}, \\
\mathcal{D}'_{12} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-I_l + 2\left[X - 2i\left(\overline{A_{12} + XA_{22}}\right)\right]^{-1} X\right\}, \\
\mathcal{D}'_{21} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-I_l + 2X\left[X - 2i\left(\overline{A_{12} + XA_{22}}\right)\right]^{-1}\right\}, \\
\mathcal{D}'_{22} &= \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-X + 2X\left[X - 2i\left(\overline{A_{12} + XA_{22}}\right)\right]^{-1} X\right\}.
\end{aligned}$$

Для обоснования (5.26) достаточно проверить, что

$$\mathcal{D}_{s1}\mathfrak{D}_{1t} + \mathcal{D}_{s2}\mathfrak{D}_{2t} = \delta_{st} I_l \tag{5.27}$$

при $s, t = 1, 2$.

В первую очередь заметим, что в двух случаях $s = t = 1$ и $s = 2$, $t = 1$ справедливость соотношения (5.27) очевидна. При $s = t = 2$

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_{21}\mathfrak{D}_{12} + \mathcal{D}_{22}\mathfrak{D}_{22} \\
= -\left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-I_l + 2X\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1}\right\} \left(\sqrt{I_l + X^2}\right)^{-1} \\
+ \left(I_l + X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{-X + 2X\left[X - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1} X\right\} \\
\times \left\{X + 2\Big[X + 2i(A_{12} + XA_{22})\Big]^{-1} \cdot \Big[I_l - 2i(A_{12} + XA_{22})X\Big]\right\} \left(\sqrt{I_l + X^2}\right)^{-1}.
\end{gathered}$$

Отсюда, опираясь на утверждение леммы 5.5, получаем

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_{21}\mathfrak{D}_{12} + \mathcal{D}_{22}\mathfrak{D}_{22} \\
= -\left\{-I_l + 2X\left[X + 2i\left(A_{12}^* + XA_{22}\right)\right]^{-1}\right\} \left(I_l + X^2\right)^{-1} \\
+ \left\{-X + 2X\left[X + 2i\left(A_{12}^* + XA_{22}\right)\right]^{-1} X\right\} \\
\times \left\{X + 2\Big[X - 2i(A_{12}^* + XA_{22})\Big]^{-1} \cdot \Big[I_l + 2i(A_{12}^* + XA_{22})X\Big]\right\} \left(I_l + X^2\right)^{-1}.
\end{gathered}$$

После выполнения умножений в правой части это равенство приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{21}\mathfrak{D}_{12}+\mathcal{D}_{22}\mathfrak{D}_{22}\\ =\Big\{I_l-X^2-2X\left[X+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}\\ +2X\left[X+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}X^2\\ -2X\left[X-2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}\left[I_l+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)X\right]\\ +4X\left[X+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}X\\ \times\left[X-2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}\left[I_l+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)X\right]\Big\}\left(I_l+X^2\right)^{-1}.\end{gathered}$$

Учитывая положительность матрицы X и соотношение

$$\begin{gathered}\left[I_l+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)X\right]\\ =\left(I_l+X^2\right)-\left[X^2-2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)X\right],\end{gathered}$$

получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{21}\mathfrak{D}_{12}+\mathcal{D}_{22}\mathfrak{D}_{22}\\ =I_l-2X\left[X+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}-2X\left[X-2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}\\ +4X\left[X+2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}X\left[X-2i\left(A_{12}^*+XA_{22}\right)\right]^{-1}=I_l.\end{gathered}$$

Совершенно аналогично доказывается, что $\mathcal{D}_{11}\mathfrak{D}_{12}+\mathcal{D}_{12}\mathfrak{D}_{22}=I_l$. Таким образом, соотношения (5.27) и (5.26) доказаны.

Обозначим через $\mathcal{J}\Delta^{\frac{1}{2}}=S$ полярное разложение оператора S. Опираясь на условие c) теоремы 5.2 и соотношение (5.26), получаем, что сужение $\mathcal{J}_uS$ на подпространство $\mathcal{H}_j\oplus\overline{\mathcal{H}}_j^a$ — положительный оператор. Следовательно, в силу единственности полярного разложения

$$\mathcal{J}_u\xi=\mathcal{J}\xi\,\forall\,\xi\in\mathcal{H}_j\oplus\overline{\mathcal{H}}_j^a. \tag{5.28}$$

Это соотношение можно также вывести, опираясь на предложение 5.4, проверив прямыми вычислениями, что $(\mathcal{J}_uS)^2$ совпадает на $\mathcal{H}_j\oplus\overline{\mathcal{H}}_j^a$ с модулярным оператором.

Для окончания доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathcal{J}_u\xi=\mathcal{J}\xi\,\forall\,\xi\in L^2\Big(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\Big). \tag{5.29}$$

Последнее соотношение можно обосновать по индукции, используя следующее

Утверждение. *Пусть b — оператор, присоединенный к алгебре* $\left\{\Pi\left(\left(e\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times\left(e\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\right)\right\}''$ *такой, что $(b\xi_0)(\lambda)$ – конечный полином от $\left\{\lambda^\sharp_{s\,t}\right\}$ и $\mathcal{J}(b\xi_0)=\mathcal{J}_u(b\xi_0)$. Если $\mathfrak{m}_{s\,t}$ – оператор умножения на $\lambda_{s\,t}$, то* $\mathcal{J}(\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0)=\mathcal{J}_u(\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0)$.

Доказательство в первую очередь проведем для случая, когда $s\leq l=\frac{k(\varphi)}{2}$. При этом условии $\mathfrak{m}_{s\,t}$ присоединен к алгебре

$$\left\{\Pi\left(\left(U(\mathbb{C})\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times(e,0_l)\right)\right\}''.$$

Далее

$$\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0=\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}\mathcal{J}b\mathcal{J}\xi_0\,.$$

Отсюда, опираясь на условия утверждения и соотношение (5.28), имеем

$$\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0=\mathcal{J}b\mathcal{J}\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}_u\xi_0\,. \tag{5.30}$$

Так как вектор ξ_0 — циклический для $\left\{\Pi\left(\left(U(\mathbb{C})\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times(e,0_l)\right)\right\}''$ (см. предложение 5.3), операторы $\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}_u$ и $\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}$ присоединены к $\left\{\Pi\left(\left(U(\mathbb{C})\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times(e,0_l)\right)\right\}'$ и $\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}_u\xi_0=\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}\xi_0$, то $\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}_u=\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}$. Отсюда, опираясь на равенство $\mathcal{J}b\mathcal{J}\xi_0=\mathcal{J}_ub\mathcal{J}_u\xi_0$ и соотношение (5.30), получаем

$$\mathcal{J}\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0=\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}\mathcal{J}_u\mathcal{J}_ub\mathcal{J}_u\xi_0=\mathcal{J}_u\mathfrak{m}_{s\,t}b\xi_0\ \forall\ s=1,2,\dots,l. \tag{5.31}$$

Если $s>l$, то операторы $\mathfrak{m}_{s\,t}-x_s\mathfrak{m}_{s-l\,t}$ присоединены к

$$\left\{\Pi\left(\left(U(\mathbb{C})\otimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\right)\times(e,0_l)\right)\right\}',$$

и, повторяя только что приведенные рассуждения, можно доказать равенство

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(\mathfrak{m}_{s\,t}-x_s\mathfrak{m}_{s-l\,t})b\xi_0=\mathcal{J}_u(\mathfrak{m}_{s\,t}-x_s\mathfrak{m}_{s-l\,t})b\xi_0\\ \forall\ s=l+1,l+2,\dots,k(\varphi).\end{gathered} \tag{5.32}$$

Из соотношений (5.31) и (5.32) получаем, что $\mathcal{J}(b\xi_0)=\mathcal{J}_u(b\xi_0)$. Утверждение доказано.

Отсюда по индукции можно вывести соотношение (5.29), из которого вытекает достаточность условий теоремы 5.2. Теорема 5.2 доказана.

Список литературы

[1] *А.А. Кириллов*, Представления бесконечномерной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1973), т. 212, с. 288–290.

[2] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений. — *Функц. анализ и его прил.* (1978), т. 12, № 3, с. 32–44.

[3] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных пар (G,K) и формализм Р. Хау. — *Докл. АН СССР* (1983), т. 269, № 3, с. 33–36.

[4] *Г.И. Ольшанский*, Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 250, с. 284–288.

[5] *Г.И. Ольшанский*, Метод голоморфрых расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Функц. анализ и его прил.* (1988), т. 22, № 4, с. 23–37.

[6] *А.М. Вершик, С.В. Керов*, Характеры и фактор представления бесконечной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1982), т. 267, с. 272–276.

[7] *Н.И. Нессонов*, Описание представлений группы обратимых операторов гильбертова пространства, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 79–80.

[8] *Н.И. Нессонов*, Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Мат. сб.* (1986), т. 130, № 2, с. 131–150.

[9] *Н.И. Нессонов*, Полное описание неразложимых сферических функций на бесконечномерной группе движений. — *Докл. АН СССР* (1987), т. 6, с. 7–9.

[10] *Н.И. Нессонов*, Описание допустимых представлений бесконечномерных матричных групп с коэффициентами в конечномерной алгебре. — *Функц. анализ и его прил.* (1992), т. 26, № 1, с. 2.

[11] *N.I. Nessonov*, Representations of infinite-dimensional matrix groups and associated dynamical systems. In: Operator algebras and operator theory. Proc. OATE 2 Conf., Romania (1989); Longman Group UK Limited (1992).

[12] *N.I. Nessonov*, A complete classification of the admissible representations of infinite-dimensional classical matrix groups. Preprint, Internet, http://xxx.lanl.gov/find./funct-an./9704002.

[13] *O.Brateli and D.W. Robinson*, Operator algebras and quantum statistical mechanics. V. 2 States in quantum statistical mechanics. Models of quantum statistical mechanics. Springer–Verlag, Berlin (1987).

[14] *M. Takesaki*, Tomitas theory of modular Hilbert algebras and its applications. — *Lect. Notes Math.* v. 128. Springer–Werlag, Berlin (1972).

KMS-states on group $GL(\infty)$ and admissible representations $GL(\infty)^X$

N.I. Nessonov

The paper is the third and the last part of the work in which the complete description of factor-representations of group $GL(\infty)$ (which are defined by unitary invariant positive-definite functions) is obtained. The necessary and sufficient conditions for KMS-states on $GL(\infty)$ group to turn the corresponding spherical representation of group $GL(\infty) \times GL(\infty)$ to standart one are given.