Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 1, с. 114–121

Обратная задача для одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами

Р.Ф. Эфендиев

Институт прикладной математики, Бакинский государственный университет
ул. З. Халилова, 23, Баку, 370148, Азербайджан
E-mail:rakibaz@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 5 февраля 2003 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

Исследуются прямая и обратная задачи спектрального анализа для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$ с полиномиально входящим спектральным параметром. Показано, что спектр операторного пучка является непрерывным и заполняет лучи $\left\{k\omega_j/\, 0 \le k < \infty,\ j = \overline{0, 2m-1}\right\}$, где $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $\frac{n\omega_j}{2}$, $j = \overline{0, 2m-1}$, $n = 1, 2, \dots$. По обобщенным нормировочным числам решается обратная задача восстановления коэффициентов.

Досліджуються пряма та обернена задачі спектрального аналізу для одного класу звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m$ зі спектральним параметром, який входить поліноміально. Показано, що спектр операторного пучка є неперервним та заповнює промені $\left\{k\omega_j/\, 0 \le k < \infty,\ j = \overline{0, 2m-1}\right\}$, де $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)$, а на неперервному спектрі маємо спектральні особливості, що співпадають з числами виду $\frac{n\omega_j}{2}$, $j = \overline{0, 2m-1}$, $n = 1, 2, \dots$. По узагальненим нормувальним числам розв'язується обернена задача реконструкції коефіцієнтів.

Работа посвящена исследованию прямых и обратных задач спектрального анализа для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка с полиномиально входящим спектральным параметром. В ней рассмотрен дифференциальный операторный пучок $L(k)$, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l[y] \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + \sum_{\gamma=0}^{2m-2} p_\gamma(x,k) y^{(\gamma)}(x) - k^{2m} y(x), \tag{1}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 34L05, 34L25, 47A40, 81U40.

где

$$p_\gamma(x,k) = \sum_{s=0}^{2m-\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_{\gamma sn} k^s e^{inx}, \tag{2}$$

и ряд

$$\sum_{\gamma=0}^{2m-2} \sum_{s=0}^{2m-\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma+s} |p_{\gamma sn}| \tag{3}$$

сходится, а k — спектральный параметр.

При $m = 1$ пучки вида (1) изучены достаточно хорошо, что обусловлено наличием для дифференциального уравнения операторов преобразования. Попытки распространить этот подход на обыкновенные дифференциальные операторы высокого порядка натолкнулись на принципиальную трудность. Оказалось, что задача типа Гурса для оператора преобразования является некорректной и имеет решение в общем случае лишь для уравнений с аналитическими коэффициентами. В связи с этим большой интерес представляет выделение некоторых классов обыкновенных дифференциальных пучков, для которых существуют операторы преобразования при обычных предположениях о гладкости коэффициентов. Решение этой задачи и связанных с нею спектральных задач с непрерывным спектром составляет основное содержание работы. Оказалось, что спектр операторного пучка $L(k)$ является непрерывным и заполняет лучи $\left\{k\omega_j / \, 0 \le k < \infty, \; j = \overline{0, 2m-1}\right\}$, где $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности, в смысле М.А. Наймарка [1], которые совпадают с числами вида $\frac{n\omega_j}{2}$, $j = \overline{0, 2m-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее, по обобщенным нормировочным числам решается обратная задача восстановления коэффициентов $p_\gamma(x,k)$, $\gamma = \overline{0, 2m-2}$, которые эффективно находятся.

Отметим, что периодический оператор $2m$-го порядка с потенциалом $p_\gamma(x,k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{\gamma 0 n} e^{inx}$, $\gamma = \overline{0, 2m-2}$, изучен М.Г. Гасымовым [2], а при $m = 1$ — в работе [5].

1. Специальные решения уравнения $l[y] = 0$.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\omega_j = \exp\left(\frac{i\pi j}{m}\right): \quad j = \overline{0, 2m-1},$$

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!},$$

$$k_{nj\tau} = -n\omega_\tau^{-1}(1-\omega_j)^{-1}, \quad j = \overline{0, 2m-1}, \quad \tau = \overline{1, 2m-1},$$

$$\frac{1}{n+k\omega_\tau(1-\omega_j)}\left[\,(\alpha+k\omega_\tau)^{2m}-k^{2m}-(\alpha+k_{nj\tau}\omega_\tau)^{2m}+k_{nj\tau}^{2m}\,\right]$$
$$=\sum_{\gamma=0}^{2m-2}C_{j\tau\gamma}(n,\alpha)k^\gamma;\;\; j=\overline{1,2m-1},\quad \tau=\overline{0,2m-1},\quad n\in N,\; n<\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{k^s(r+k\omega_\tau)^\nu-k_{nj\tau}^s(r+k_{nj\tau}\omega_\tau)^\nu}{n+k\omega_\tau(1-\omega_j)}=\sum_{\gamma=0}^{\nu-1}C_{j\tau s\gamma}(n,r,\nu)k^{\gamma+s} \tag{5}$$

при $\nu=\overline{1,2m-2},\; s=\overline{0,2m-\nu-2},\; j=\overline{1,2m-1}.$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (2) и (3). Тогда дифференциальное уравнение $l[y]=0$ имеет частные решения $f_\tau(x,k)$, $\tau=\overline{0,2m-1}$, представимые в виде:*

$$f_\tau(x,k)=e^{ik\omega_\tau x}+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{(\tau)}e^{(ik\omega_\tau+in)x}+\sum_{j=1}^{2m-1}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{V_{n\alpha}^{(j,\tau)}}{n+k\omega_\tau(1-\omega_j)}e^{(ik\omega_\tau+i\alpha)x}, \tag{6}$$

где числа $V_n^{(\tau)}$ и $V_{n\alpha}^{(j,\tau)}$ определяются через $\{p_{\gamma sn}\}$ с помощью рекуррентных формул:

$$\left[\left(\alpha-\frac{n}{\omega_\tau(1-\omega_j)}\right)^{2m}-\left(\frac{n}{\omega_\tau(1-\omega_j)}\right)^{2m}\right]V_{n\alpha}^{(j,\tau)}+\sum_{\gamma=0}^{2m-2}\sum_{s=0}^{2m-\gamma-1}\sum_{r+t=\alpha}(-1)^s$$
$$\times\left[i\left(t-\frac{n}{1-\omega_j}\right)\right]^\gamma\left[\frac{n}{\omega_\tau(1-\omega_j)}\right]^s p_{\gamma st}V_{nt}^{(j,\tau)}=0 \tag{7}$$

при $\alpha=2,3,\ldots,\; j=\overline{1,2m-1},\; n=1,2,\ldots,\alpha-1,$

$$C_{2m}^\gamma\alpha^{2m-\gamma}\omega_\tau^\gamma V_\alpha^{(\tau)}+\sum_{j=1}^{2m-1}\sum_{n=1}^{\alpha}C_{j\tau\gamma}(n,\alpha)V_{n\alpha}^{(j,\tau)}$$
$$+\sum_{s=0}^{\gamma}\sum_{\nu=s}^{2m-2}\sum_{r=1}^{\alpha-1}p_{\nu,\gamma-s,\alpha-r}C_\nu^s(ir)^{\nu-s}(i\omega_\tau)^sV_r^{(\tau)}$$
$$+\sum_{s=0}^{\gamma}p_{s,\gamma-s,\alpha}(i\omega_\tau)^s+\sum_{j=1}^{2m-1}\sum_{s=0}^{\gamma}\sum_{\nu=s}^{2m-2}\sum_{r=1}^{\alpha-1}p_{\nu,\gamma-s,\alpha-r}C_{j\tau\nu\gamma-s}(n,r,\nu)V_{nr}^{(j,\tau)}=0 \tag{8}$$

при $\gamma = \overline{0, 2m-2},\ \tau = \overline{0, 2m-2}\ , \alpha = 1, 2, \dots;$

$$2m\alpha\omega_\tau^{2m-1} V_\alpha^{(\tau)} + \sum_{\gamma=0}^{2m-2} p_{\gamma,2m-1-\gamma,\alpha} \left(i\omega_\tau\right)^\gamma + \sum_{s=0}^{2m-2} \sum_{r=1}^{\alpha-1} \left(i\omega_\tau\right)^s p_{s,2m-1-s,r} V_{\alpha-r}^{(\tau)} = 0 \tag{9}$$

и ряды

$$\sum_{j=1}^{2m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \alpha^{2m-1} (\alpha - n) \left| V_{n\alpha}^{(j,\tau)} \right|, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{2m-1} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha^{2m-1} \left| V_{\alpha\alpha}^{(j,\tau)} \right|, \tag{11}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha^{2m} \left| V_\alpha^{(\tau)} \right| \tag{12}$$

сходятся.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в работе [3].

Следствие 1. *Функции*$f_\tau(x,k),\ \tau = 0, 1, \dots, 2m-1$, *образуют фундаментальную систему решений уравнения* $l[y] = 0$ *при* $k \neq 0,\ k \neq k_{nj\tau},\ n \in N$, $j = \overline{1, 2m-1},\ \tau = \overline{0, 2m-1}$.

Замечание. При подходящей нумерации чисел ω_j плоскость делится на секторы

$$S_\nu = \left\{ \frac{\nu\pi}{m} < \arg k < \frac{(\nu+1)\pi}{m},\ \nu = \overline{0, 2m-1} \right\},$$

в каждом из которых выполняется неравенство

$$\mathrm{Im}(k\omega_0) < \mathrm{Im}(k\omega_1) < \ldots < \mathrm{Im}(k\omega_{m-1}) < 0 < \mathrm{Im}(k\omega_m) < \ldots < \mathrm{Im}(k\omega_{2m-1}).$$

Если $k \neq k_{nj\tau},\ k \in S_\nu$, то $f_\tau(x,k) \in L_2(0,\infty),\ \tau = \overline{0, m-1}$, и $f_\tau(x,k) \in L_2(-\infty, 0),\ \tau = \overline{m, 2m-1}$. Очевидно, что $f_\tau(x,k)$ может иметь полюсы первого порядка в точках $k_{nj\tau} = -n/[\omega_\tau(1-\omega_j)]$.

Введем обозначение

$$f_{nj}^\tau(x) = \lim_{k \to k_{nj\tau}} [n + k\omega_\tau(1-\omega_j)] f_\tau(x,k). \tag{13}$$

Следствие 2. *При любых значениях n и j, $\tau = \overline{0, 2m-1}$ имеют место равенства*

$$f_{nj}^{\tau}(x) = V_{nn}^{(j,\tau)} f_{j+\tau}(x, k_{nj\tau}), \tag{14}$$
$$f_{2m+\tau}(x,k) \equiv f_{\tau}(x,k),\ \tau = \overline{0, 2m-1}.$$

II. Специальные решения транспонированного уравнения

Уравнение

$$(-1)^m Z^{(2m)}(x) + \sum_{\gamma=0}^{2m-2} (-1)^{\gamma} [p_{\gamma}(x,k) Z(x)]^{(\gamma)} - k^{2m} Z(x) = 0 \tag{15}$$

получается транспонированием уравнения $l[y] = 0$.

Нетрудно проверить, что в этом уравнении коэффициенты при производной также удовлетворяют условиям (2) и (3). Поэтому уравнение (15) имеет решения $\varphi_{\tau}(x,k)$, представимые в виде:

$$\varphi_{\tau}(x,k) = \exp(-ik\omega_{\tau} x) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} R_{\alpha}^{\tau} \exp\{(i\alpha - ik\omega_{\tau})x\}$$
$$+ \sum_{j=1}^{2m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - k\omega_{\tau}(1-\omega_j)} \sum_{\alpha=1}^{\infty} R_{n\alpha}^{(j,\tau)} \exp\{(i\alpha - ik\omega_{\tau})x\}, \tag{16}$$

и ряды типа (10)–(12) при замене $\left\{V_{n\alpha}^{(j,\tau)}\right\}$, $\left\{V_{\alpha}^{(\tau)}\right\}$ на $\left\{R_{n\alpha}^{(j,\tau)}\right\}$, $\{R_{\alpha}^{\tau}\}$ сходятся.

III. О резольвенте операторного пучка $L(k)$

Теорема 2. *При любом значении k из сектора S_{ν}, $k \neq k_{nj\tau}$, ядро резольвенты операторного пучка $L(k)$ существует и равно*

$$R(x,t,k) = -\frac{1}{2mk^{2m-1}} \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{m-1} \omega_s f_s(x,k) \varphi_s(t,k), & t < x, \\ \sum\limits_{s=m}^{2m-1} \omega_s f_s(x,k) \varphi_s(t,k), & t > x. \end{cases} \tag{17}$$

Это представление позволяет изучить спектр операторного пучка $L(k)$.

Теорема 3. *Операторный пучок* $L(k)$ *имеет чисто непрерывный спектр, который заполняет лучи*

$$\left\{k\omega_j /\, 0 \le k < \infty;\ j = \overline{0, 2m-1},\ \omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)\right\},$$

а на непрерывном спектре могут быть спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $n\omega_j/2$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема 4. *При любом* $z \in S_\nu$ *справедливо представление для ядра резольвенты*

$$R(x,t,z) = \sum_{\nu=0}^{2m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{iV_{nn}^{(m,\nu)}}{2m(n\omega_\nu/2 - z)(n/2)^{2m-1}\omega_\nu^{2m-2}}$$

$$\times f_\nu(x, n\omega_\nu/2)\varphi_\nu(t, n\omega_\nu/2) \qquad (18)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{2m-1}\int\limits_{\Gamma_\nu^-}\frac{\omega_{2m-\nu}f_{2m-\nu}(x,k)\varphi_{2m-\nu}(t,k) - \omega_{m-\nu}f_{m-\nu}\varphi_{m-\nu}(t,k)}{k-z}\,dk,$$

где Γ_ν^- *получается из* Γ_0^- *(контур, образованный отрезками* $\left[0, \frac{1}{2} - \delta\right]$, $\left[\frac{n}{2} + \delta, \frac{n+1}{2} - \delta\right]$, $n = 1, 2, \dots$, *и полуокружностями радиуса* δ *с центрами в точках* $\frac{n}{2}$, *расположенными в нижней полуплоскости) поворотом на угол* $\frac{\nu\pi}{m}$, $\nu = \overline{0, 2m-1}$.

В формуле (18) числа $V_{nn}^{(m,\nu)} = S_{m\nu n}$ играют роль нормировочных чисел для функций $f_\nu\left(x, \frac{n\omega_\nu}{2}\right)$.

IV. Обратная задача. Сначала получим явные связи между числами $S_{j\tau n}$ и $V_{n\alpha}^{(j,\tau)}$, $V_\alpha^{(\tau)}$. Для этого воспользуемся тождеством (13). Находим, что

$$V_{mm}^{(j,\tau)} = S_{j\tau\, m}, \qquad (19)$$

$$V_{m,\alpha+m}^{(j,\tau)} = S_{j\tau m}\,(1-\omega_j)\left(V_\alpha^{(j+\tau)} + \sum_{s=1}^{2m-1}\sum_{r=1}^{\alpha}\frac{V_{r\alpha}^{(s,j+\tau)}}{r\,(1-\omega_j) - n\omega_j\,(1-\omega_s)}\right) \qquad (20)$$

при $j = 1, 2, \dots, 2m-1$, α, $n = 1, 2, \dots$. Эти соотношения являются основными уравнениями для определения $p_{\gamma sn}$ по $S_{j\tau n}$. Действительно, если известны нормировочные числа $S_{j\tau n}$, то (19), (20) дают рекуррентные формулы для определения чисел $V_{n\alpha}^{(j,\tau)}$ и $V_\alpha^{(\tau)}$. Тогда из (8)–(9) числа $p_{\gamma sn}$ определяются однозначно.

Таким образом, обратная задача имеет единственное решение и числа $p_{\gamma sn}$ эффективно определяются по нормировочным числам. Возникает вопрос: когда заданная совокупность нормировочных чисел $S_{j\tau n}$, $j = \overline{1, 2m-1}$, $\tau = \overline{0, 2m-1}$, $n \in N$, совпадает с совокупностью нормировочных чисел оператора типа L?

Для формулировки ответа введем следующие обозначения:

$$a_m = \max_{\substack{1 \le j \le l \le 2m-1 \\ 1 \le n, r < \infty}} \frac{|(1-\omega_j)\ (n+r)|}{|r\,(1-\omega_j) - n\,(1-\omega_l)\,\omega_j|}\,,$$

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{2m-1} \sum_{j=1}^{2\,m-1} n^{2m-2} |S_{j\nu n}|\,.$$

Теорема 5. *Пусть для заданных чисел $S_{j\tau n}$, $j = \overline{1, 2m-1}$, $n \in N$, $\tau = \overline{0, 2m-1}$, выполняются следующие условия:*

I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|S_n| < \infty$,

II. $4^{m-1} a_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n|}{n+1} = p < 1$.

Тогда существуют функции $p_\gamma(x, k)$, $\gamma = \overline{0, 2m-2}$, вида (2), для которых выполняется условие (3), и числа $S_{j\tau n}$ являются "обобщенными нормировочными числами" оператора с восстановленными коэффициентами.

Список литературы

[1] *М.А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы. Наука, Москва (1969).

[2] *М.Г. Гасымов*, Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 252, № 2, с. 277–280.

[3] *М.Г. Гасымов*, Спектральный анализ одного класса несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. — Спектральная теория операторов, Баку (1982), с. 56–96.

[4] *Р.Ф. Эфендиев*, К спектральному анализу обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра с периодическими коэффициентами. — *Изв. НАН Азерб.* (2000), т. 12, с. 30–34.

[5] *Р.Ф. Эфендиев*, Обратная задача для одного класса дифференциальных операторов второго порядка. — *Докл. НАН Азерб.* (2001), №. 4–6, с. 15–20.

The inverse problem for a class of ordinary differential operators with periodic coefficients

R.F. Efendiev

The direct and inverse problem of spectral analyses of a class of ordinary differential equations of order $2m$ with coefficients polynomially depending on the spectral parameter are investigated. It is shown that, the spectrum of the operator pencil is continuous, fill in the rays $\{k\omega_j / \, 0 \leq k < \infty,$ $j = \overline{0, 2m-1}\}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)$, and there exist spectral singularities on the continues spectrum which coincide with the numbers $\frac{n\omega_j}{2}$, $j = \overline{0, 2m-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. The inverse problem of reconstructing of the coefficients by generalized normalizing numbers is solved.