

# Асимптотика коррелятора ансамбля разреженных случайных матриц

В.В. Венгеровский

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина*

E-mail: vengerovsky@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2003 г.

Представлена Л.А. Пастуром

Изучается асимптотическое поведение корреляционных функций ансамбля разреженных случайных матриц размера  $N \times N$ . Показано, что главный член корреляционных функций  $k$ -го и  $m$ -го моментов интегрированной плотности состояний ведет себя как  $N^{-1}n_{k,m}$ . Для коэффициентов  $\{n_{k,m}\}_{k,m=1}^{\infty}$  получена система рекуррентных соотношений

Вивчається асимптотична поведінка кореляційних функцій ансамблю розріджених випадкових матриць розміру  $N \times N$ . Показано, що головний член кореляційних функцій  $k$ -го та  $m$ -го моментів інтегрованої щільності станів є  $N^{-1}n_{k,m}$ . Для коефіцієнтів  $n_{k,m}_{k,m=1}^{\infty}$  знайдено систему рекуррентних співвідношень.

## 1. Введение и основные результаты

В последние несколько лет резко возрос интерес к спектральным свойствам ансамблей так называемых разреженных случайных матриц (РСМ), т.е.  $N \times N$ -матриц с независимыми элементами, равными нулю с вероятностью  $1 - p/N$  ( $p$  — фиксированное,  $N \rightarrow \infty$ ). Ожидается, что спектральные свойства РСМ будут отличаться от свойств ансамблей большинства матриц с независимыми элементами (см. [1], а также обзорные работы [2, 3] и цитируемую в них литературу).

В серии физических работ [4–7] получен ряд интересных результатов для РСМ, в частности, выведено уравнение для преобразования Лапласа предельной интегрированной плотности состояний (ИПС), изучен "коррелятор плотность-плотность" и показано, что существует некоторая критическая точка  $p_c > 1$ , в окрестности которой происходит фазовый переход по  $p$ : при

---

Mathematics Subject Classification 2000: 60B99, 60H30.

$p < p_c$  все собственные векторы локализованы, тогда как при  $p > p_c$  появляются делокализованные собственные векторы. К сожалению, все эти результаты получены методами реплик или суперсимметрии и поэтому нуждаются в математически корректном обосновании.

В серии математических работ [8–10] доказано существование предела при  $N \rightarrow \infty$  усредненных моментов ИПС в простейшем случае, когда матричные элементы равны 0 с вероятностью  $1 - p/N$  и 1 с вероятностью  $p/N$ . Показано, что предельные моменты удовлетворяют условию Карлемана, тем самым доказано существование предельной ИПС для ансамбля РСМ. В работах [11, 12] аналогичные результаты получены для РСМ общего вида. Кроме того, в работе [12] математически корректно выведены уравнения для ИПС, полученные первоначально в физических работах [4–6] и доказано существование предельной ИПС, а также стремление к 0 при  $N \rightarrow \infty$  среднеквадратичного значения флуктуаций ИПС.

Из результатов работы [12], в частности, следует, что флуктуации всех моментов ИПС при  $N \rightarrow \infty$  стремятся к 0 в среднеквадратичном. В настоящей работе исследуется поведение при  $N \rightarrow \infty$  корреляций моментов ИПС. Скорость стремления к 0 и значение коэффициента при главном члене имеют весьма важное значение в физических приложениях, а потому аналогичным исследованиям для различных ансамблей случайных матриц посвящена обширная литература (см., например, работы [13, 14] и цитируемую в них литературу).

Чтобы сформулировать главный результат работы, введем необходимые определения. Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство. И пусть есть семейство  $\Xi = \{a_{ij}(\omega), i \leq j, i, j \in \mathbf{N}\}$  независимых в совокупности случайных величин на этом вероятностном пространстве с равными четными моментами (т.е.  $\forall i, j \in \mathbf{N} : i \leq j \forall k \in \mathbf{N} \mathbf{E} a_{ij}^{2k} = V_{2k} < \infty$ ). Продолжим это семейство симметричным образом (т.е. для  $i < j$   $a_{ji} = a_{ij}$ ). Теперь для любых натуральных чисел  $i, j$  определена случайная величина  $a_{ij}(\omega)$ . И пусть есть два числа  $p, N : 0 < p \leq N$  ( $p \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N}$ ), а также еще одно семейство  $\Lambda_N^{(p)} = \{d_{ij}^{N,p}(\omega), i \leq j, i, j \in \overline{1, N}\}$  независимых в совокупности случайных величин, которое не зависит от первого,

$$\forall i, j \in \mathbf{N} : i \leq j \quad d_{ij}^{N,p} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p}}, & \text{с вероятностью } p/N, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p/N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Продолжим симметрично это второе семейство аналогично первому. Тогда можно рассмотреть случайную вещественную симметричную матрицу  $A^{(N,p)} : \Omega \rightarrow \text{Mat}_N$ , элементы которой определены следующим образом:

$$A^{(N,p)} = a_{ij} \cdot d_{ij}^{N,p}.$$

Так как она симметрическая и вещественная, то у нее есть  $N$  случайных вещественных чисел  $\lambda_1^{(N,p)} \leq \lambda_2^{(N,p)} \leq \dots \leq \lambda_N^{(N,p)}$ , и можно определить случайную функцию распределения

$$\sigma_{A^{(N,p)}(\omega)}(\lambda) = \frac{\#\{j : \lambda_j^{(N,p)} < \lambda\}}{N}.$$

Обозначим  $k$ -й момент этой случайной функции распределения

$$\mathcal{M}_k^{(N,p)}(\omega) = \int \lambda^k d\sigma_{A^{(N,p)}(\omega)}.$$

А коррелятор с параметрами  $k$  и  $m$  (( $k,m$ )-коррелятор) этой случайной функции распределения обозначим

$$C_{k,m}^{(N,p)} = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_k^{(N,p)}(\omega) \cdot \mathcal{M}_m^{(N,p)}(\omega) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_k^{(N,p)}(\omega) \right\} \cdot \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_m^{(N,p)}(\omega) \right\}. \quad (1.2)$$

**Теорема 1.**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot C_{k,m}^{(N,p)} = n_{k,m}^{(p)},$$

где поправки  $n_{k,m}^{(p)}$  могут быть найдены из системы рекуррентных соотношений 2.11 – 2.13, 2.20 – 2.35 с начальными условиями 2.36 – 2.44.

## 2. Доказательство

### 2.1. Среднее коррелятора и двойные прогулки

Преобразуем  $C_{k,m}^{(N,p)}$  к удобному для предельного перехода виду.

$$\begin{aligned} C_{k,m}^{(N,p)} &= \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_k^{(N,p)} \cdot \mathcal{M}_m^{(N,p)} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_k^{(N,p)} \right\} \cdot \mathbb{E} \left\{ \mathcal{M}_m^{(N,p)} \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \left( \mathbb{E} \left\{ \text{Tr}[A^{(N,p,w)}]^k \cdot \text{Tr}[A^{(N,p,w)}]^m \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left\{ \text{Tr}[A^{(N,p,w)}]^k \right\} \cdot \mathbb{E} \left\{ \text{Tr}[A^{(N,p,w)}]^m \right\} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^N \left( \mathbb{E} \left\{ A_{i_1, i_2}^{(N,p,w)} A_{i_2, i_3}^{(N,p,w)} \dots A_{i_k, i_1}^{(N,p,w)} \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot A_{j_1, j_2}^{(N,p,w)} A_{j_2, j_3}^{(N,p,w)} \dots A_{j_k, j_1}^{(N,p,w)} \right\} - \mathbb{E} \left\{ A_{i_1, i_2}^{(N,p,w)} A_{i_2, i_3}^{(N,p,w)} \dots A_{i_k, i_1}^{(N,p,w)} \right\} \\ &\quad \left. \cdot \mathbb{E} \left\{ A_{j_1, j_2}^{(N,p,w)} A_{j_2, j_3}^{(N,p,w)} \dots A_{j_k, j_1}^{(N,p,w)} \right\} \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \mathbb{E} \{ a_{i_1, i_2} \cdot a_{i_2, i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_k, i_1} \cdot a_{j_1, j_2} \cdot a_{j_2, j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_m, j_1} \} \right. \\
 & \cdot \mathbb{E} \left\{ d_{i_1, i_2}^{(N, p)} d_{i_2, i_3}^{(N, p)} \cdot \dots \cdot d_{i_k, i_1}^{(N, p)} \cdot d_{j_1, j_2}^{(N, p)} d_{j_2, j_3}^{(N, p)} \cdot \dots \cdot d_{j_m, j_1}^{(N, p)} \right\} \\
 & \left. - \mathbb{E} \{ a_{i_1, i_2} a_{i_2, i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_k, i_1} \} \cdot \mathbb{E} \{ a_{j_1, j_2} \cdot a_{j_2, j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_m, j_1} \} \right) \\
 & \cdot \mathbb{E} \left\{ d_{i_1, i_2}^{(N, p)}(\omega) d_{i_2, i_3}^{(N, p)}(\omega) \cdot \dots \cdot d_{i_k, i_1}^{(N, p)}(\omega) \right\} \cdot \mathbb{E} \left\{ d_{j_1, i_2}^{(N, p)}(\omega) d_{i_2, i_3}^{(N, p)}(\omega) \cdot \dots \cdot d_{i_k, i_1}^{(N, p)}(\omega) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем для удобства работы несколько обозначений. Обозначим  $W_k^{(N)}$  множество числовых замкнутых прогулок по множеству  $\overline{1, N}$  длины  $k$ . Другими словами,

$$W_k^{(N)} \stackrel{\text{def}}{=} \{ w = (w_1, w_2, \dots, w_k, w_1) : \forall i \in \overline{1, k} \ w_i \in \overline{1, N} \}.$$

Множество двойных числовых замкнутых прогулок по множеству  $\overline{1, N}$ , у которых первая прогулка длины  $k$ , а вторая —  $m$ , обозначим  $DW_{k, m}^{(N)} \stackrel{\text{def}}{=} W_k^{(N)} \times W_m^{(N)}$ . Пусть  $w \in W_k^{(N)}$ , тогда обозначим

$$a(w) = \prod_{i=1}^k a_{w_i, w_{i+1}},$$

$$d^{(N, p)}(w) = \prod_{i=1}^k d_{w_i, w_{i+1}}^{(N, p)}.$$

Пусть  $dw = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in DW_{k, m}^{(N)}$ , тогда обозначим

$$a(dw) = a(w^{(1)}) \cdot a(w^{(2)}), \quad d^{(N, p)}(dw) = d^{(N, p)}(w^{(1)}) \cdot d^{(N, p)}(w^{(2)}).$$

Теперь равенство (2.3) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 C_{k, m}^{(N, p)} &= \frac{1}{N^2} \sum_{dw = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_{k, m}^{(N)}} \left\{ \mathbb{E} a(dw) \cdot \mathbb{E} d^{(N, p)}(dw) \right. \\
 & \left. - \mathbb{E} a(w^{(1)}) \cdot \mathbb{E} d^{(N, p)}(w^{(1)}) \cdot \mathbb{E} a(w^{(2)}) \cdot \mathbb{E} d^{(N, p)}(w^{(2)}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть  $w \in W_k^{(N)}$  и  $f, g \in \overline{1, N}$ . Обозначим

$$n_w(f, g) = \#\{i \in \overline{1, k} : (w_i = f \wedge w_{i+1} = g) \vee (w_i = g \wedge w_{i+1} = f)\}.$$

Аналогично для  $w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in DW_{k,m}^{(N)}$  обозначим

$$n_{dw}(f, g) = n_{w^{(1)}}(f, g) + n_{w^{(2)}}(f, g).$$

Тогда для всех  $w \in W_k^{(N)}$  и всех  $dw \in W_{k,m}^{(N)}$  верно

$$\mathbb{E}a(w) = \prod_{f=1}^N \prod_{g=f}^N V_{n_w(f,g)}, \quad \mathbb{E}a(dw) = \prod_{f=1}^N \prod_{g=f}^N V_{n_{dw}(f,g)}.$$

Введем еще несколько обозначений. Пусть  $w \in W_k^{(N)}$ , тогда  $V_w = \cup_{i=1}^k \{w_i\}$  и  $E_w = \cup_{i=1}^k \{(w_i, w_{i+1})\}$ , где  $(w_i, w_{i+1})$  — неупорядоченная пара. Для любого  $e = (e_1, e_2) \in E_w$  обозначим также  $a_e(w) = a_{e_1, e_2}(w) = a_{e_2, e_1}(w)$ . Тогда верно следующее равенство:

$$\mathbb{E}a(w) = \prod_{e \in E_w} \mathbb{E}a_e^{n_w(e)}(w) = \prod_{e \in E_w} V_{n_w(e)}.$$

Аналогично

$$\mathbb{E}d^{(N,p)}(w) = \prod_{e \in E_w} \mathbb{E} \left( [d_e^{(N,p)}]^{n_w(e)}(w) \right) = \prod_{e \in E_w} \frac{1}{N \cdot p^{n_w(e)/2-1}}.$$

Введем аналогичные обозначения для любой двойной прогулки  $dw = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in DW_{k,m}^{(N)}$ :  $V_{dw} = V_{w^{(1)}} \cup V_{w^{(2)}}$  и  $E_{dw} = E_{w^{(1)}} \cup E_{w^{(2)}}$ . Тогда будут выполняться следующие равенства:

$$\mathbb{E}a(dw) = \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} \quad \mathbb{E}d^{(N,p)}(dw) = \prod_{e \in E_{dw}} \frac{1}{N \cdot p^{n_{dw}(e)/2-1}}.$$

Легко видеть, что  $G_w = (V_w, E_w)$  — связный неориентированный граф без кратных ребер, причем прогулка  $w$  — замкнутый маршрут, покрывающий граф  $G_w$ . При этом  $n_w(e)$  — число, показывающее сколько раз было пройдено ребро  $e$  (в двух направлениях) в замкнутом маршруте  $w$ . Для случая  $dw = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in DW_{k,m}^{(N)}$   $G_{dw} = G_{w^{(1)}} \cup G_{w^{(2)}}$ , т.е.  $V_{dw} = V_{w^{(1)}} \cup V_{w^{(2)}}$  и  $E_{dw} = E_{w^{(1)}} \cup E_{w^{(2)}}$ . Следует отметить, что отображение  $w \rightarrow G_w$  ( $dw \rightarrow G_{dw}$ ) неинъективно (напр.,  $w^{(1)} = (1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1) \neq w^{(2)} = (1, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 1)$ , а  $G_{w^{(1)}} = G_{w^{(2)}}$  и даже для всех  $e$   $n_{w^{(1)}}(e) = n_{w^{(2)}}(e)$ ). После введения всех этих обозначений равенство 2.4 можно написать так:

$$C_{k,m}^{(N,p)} = \frac{1}{N^2} \sum_{dw=(w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_{k,m}^{(N)}} \left\{ \prod_{e \in E_{dw}} \mathbb{E}a_e^{n_{dw}(e)} \cdot \mathbb{E} \left[ d_e^{(N,p)} \right]^{n_{dw}(e)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left. \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} \mathbb{E} a_e^{n_{w^{(1)}}(e)} \cdot \mathbb{E} \left[ d_e^{(N,p)} \right]^{n_{w^{(1)}}(e)} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} \mathbb{E} a_e^{n_{w^{(2)}}(e)} \cdot \mathbb{E} \left[ d_e^{(N,p)} \right]^{n_{w^{(2)}}(e)} \right\} \\
 & = \frac{1}{N^2} \sum_{dw=(w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_{k,m}^{(N)}} \left\{ N^{-|E_{dw}|} \cdot \prod_{e \in E_{dw}} \frac{V_{n_{dw}(e)}}{p^{n_{dw}(e)/2-1}} \right. \\
 & \quad \left. - N^{-|E_{w^{(1)}}| - |E_{w^{(2)}}|} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} \frac{V_{n_{w^{(1)}}(e)}}{p^{n_{w^{(1)}}(e)/2-1}} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} \frac{V_{n_{w^{(2)}}(e)}}{p^{n_{w^{(2)}}(e)/2-1}} \right\} \\
 & = \frac{1}{N^2} \sum_{dw=(w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_{k,m}^{(N)}} \left\{ \frac{1}{N^{|E_{dw}|} \cdot p^{(k+m)/2 - |E_{dw}|}} \cdot \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{N^{|E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}|} \cdot p^{(k+m)/2 - |E_{w^{(1)}}| - |E_{w^{(2)}}|}} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} V_{n_{w^{(1)}}(e)} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} V_{n_{w^{(2)}}(e)} \right\} \\
 & = \sum_{dw \in W_{k,m}^{(N)}} \theta(dw), \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

где  $\theta(dw)$  — вклад прогулки  $dw$  в поправку к среднему соответствующего коррелятора.

Последнее выражение не очень удобно для предельного перехода. Более того, из последней формулы видно, что вклад двойной числовой прогулки зависит не столько от самой прогулки, сколько от множеств

$$\cup_{e \in E_{dw}} \{n_{dw}(e)\}, \cup_{e \in E_{w^{(1)}}} \{n_{w^{(1)}}(e)\}, \cup_{e \in E_{w^{(2)}}} \{n_{w^{(2)}}(e)\}. \tag{2.6}$$

Поэтому естественно ввести отношение эквивалентности на  $DW_k^{(N)}$ . Две прогулки  $w^{(1)}$  и  $w^{(2)}$  из  $W_k^{(N)}$  называются эквивалентными  $w^{(1)} \sim w^{(2)}$ , если существует отображение  $f : V_w^{(1)} \xrightarrow{bij} V_w^{(2)} : w^{(2)} = f(w^{(1)})$  т.е. для всех  $i \in \overline{1, k+1}$   $w_i^{(2)} = f(w_i^{(1)})$ . Легко проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Тогда множество  $W_k^{(N)}$  разбивается на классы эквивалентности  $CW_k^{(N)}$ . Похожее отношение эквивалентности введем на  $DW_{k,m}^{(N)}$ . Две двойные прогулки  $dw = (w^{(1)}, w^{(2)})$  и  $du = (u^{(1)}, u^{(2)})$  из  $DW_{k,m}^{(N)}$  назовем эквивалентными, если

$$dw \sim du \Leftrightarrow \exists f : V_{dw} \xrightarrow{bij} V_{du}$$

$$: du = f(dw) (f|_{V_{w^{(1)}}} (w^{(1)}) = u^{(1)} \wedge f|_{V_{w^{(2)}}} (w^{(2)}) = u^{(2)}).$$

А множество классов эквивалентности двойных прогулок обозначим через  $CDW_{k,m}^{(N)}$ . Условимся обозначать класс прогулки  $w$  ( $dw$ ) через  $[w]$  ( $[dw]$ ). Очевидно, что для двух эквивалентных двойных прогулок  $dw$  и  $du$  из  $DW_{k,m}^{(N)}$  будут совпадать соответствующие множества (2.6), поэтому их вклады в поправку к среднему соответствующего коррелятора равны. Число элементов класса  $d[w]$  равно числу различных отображений  $f : V_{dw} \xrightarrow{bij} R_f \subset \overline{1, N}$ , т.е.  $N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - |V_{dw}| + 1)$ . Тогда вместо 2.5 можно написать

$$C_{k,m}^{(N)} = \frac{1}{N^2} \sum_{[dw] \in CDW_{k,m}^{(N)}} \left\{ \frac{N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - |V_{dw}| + 1)}{N^{|E_{dw}|} \cdot p^{(k+m)/2 - |E_{dw}|}} \cdot \left( \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} - \frac{p^{|E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}| - |E_{dw}|}}{N^{|E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}| - |E_{dw}|}} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} V_{n_{w^{(1)}}(e)} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} V_{n_{w^{(2)}}(e)} \right) \right\} = \sum_{[dw] \in CDW_{k,m}^{(N)}} \theta([dw]). \quad (2.7)$$

Но переходить к пределу  $N \rightarrow \infty$  в последней формуле еще рано, т.к. множество суммирования  $CDW_k^{(N)}$  зависит от  $N$ . Для того чтобы решить эту проблему, а заодно и лучше изучить  $CDW_k^{(N)}$ , введем понятие минимальной двойной прогулки.

## 2.2. Минимальные и существенные двойные прогулки

Условимся о порядке обхода двойной прогулки  $dw = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in DW_{k,m}^{(N)}$ . Сначала проходим первую прогулку, затем перепрыгиваем в начальную вершину второй прогулки и затем проходим ее.

$$dw_i = \begin{cases} w_i^{(1)}, & \text{если } 1 \leq i \leq k, \\ w_{i-k}^{(2)}, & \text{если } k + 1 \leq i \leq k + m. \end{cases}$$

**Определение 1.** Двойная прогулка  $dw$  называется минимальной, если  $dw_1$  имеет номер 1 и номер каждой новой встретившейся по ходу двойной прогулки вершины на 1 больше числа уже пройденных вершин (или максимального номера из уже пройденных вершин); т.е. на любом начальном отрезке прогулки наибольший из номеров вершин минимален.

Обозначим множество всех минимальных двойных прогулок из  $DW_{k,m}^{(N)}$  через  $MDW_{k,m}^{(N)}$ . Ясно, что в каждом классе эквивалентности  $[dw]$  есть единственная минимальная двойная прогулка из  $MDW_{k,m}^{(N)}$ . Поэтому 2.7 преобразуется в

$$C_{k,m}^{(N)} = \frac{1}{N^2} \sum_{dw=(w^{(1)}, w^{(2)}) \in MDW_{k,m}^{(N)}} \left\{ \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N - |V_{dw}| + 1)}{N^{|E_{dw}|} \cdot p^{(k+m)/2 - |E_{dw}|}} \cdot \left( \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} - \frac{p^{|E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}| - |E_{dw}|}}{N^{|E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}| - |E_{dw}|}} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} V_{n_{w^{(1)}}(e)} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} V_{n_{w^{(2)}}(e)} \right) \right\} = \sum_{dw \in MDW_{k,m}^{(N)}} \theta(dw). \quad (2.8)$$

Из определения минимальной прогулки видно, что  $MDW_{k,m}^{(1)} \subset MDW_{k,m}^{(2)} \subset \dots \subset MDW_{k,m}^{(i)} \subset \dots \subset MDW_{k,m}^{(k+m)} = MDW_{k,m}^{(k+m+1)} = \dots$  (в двойной прогулке  $dw$  из  $DW_{k,m}^{(N)}$  не более  $k+m$  различных вершин). Поэтому, естественно, обозначить  $MDW_{k,m} = MDW_{k,m}^{(k+m)}$ . Обозначим число общих ребер у графов  $G_{w^{(1)}}$  и  $G_{w^{(2)}}$  через  $c(dw) = |E_{w^{(1)}}| + |E_{w^{(2)}}| - |E_{dw}|$ . Теперь формулу для поправки к предельному коррелятору можно записать так:

$$n_{k,m}^{(p)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot C_{k,m}^{(N,p)} = \sum_{w \in MDW_{k,m}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N^{|V_{dw}| - |E_{dw}| - 1}}{p^{(k+m)/2 - |E_{dw}|}} \cdot \left( \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} - \frac{p^{c(dw)}}{N^{c(dw)}} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} V_{n_{w^{(1)}}(e)} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} V_{n_{w^{(2)}}(e)} \right) \right]. \quad (2.9)$$

Множество  $MDW_{k,m}$  — конечно, т.е. мы имеем конечные суммы, а не ряд. Не все минимальные прогулки дают ненулевой вклад в нормированный предельный коррелятор. Граф  $G_{dw}$  имеет не более двух компонент связности, т.к.  $G_{w^{(1)}}$  и  $G_{w^{(2)}}$  — связные графы. Но если граф  $G_{dw}$  имеет ровно две компоненты связности, то  $V_{w^{(1)}} \cap V_{w^{(2)}} = \emptyset \Rightarrow E_{w^{(1)}} \cap E_{w^{(2)}} = \emptyset \Rightarrow c(dw) = 0 \Rightarrow \left( \prod_{e \in E_{dw}} V_{n_{dw}(e)} - \frac{p^{c(dw)}}{N^{c(dw)}} \cdot \prod_{e \in E_{w^{(1)}}} V_{n_{w^{(1)}}(e)} \prod_{e \in E_{w^{(2)}}} V_{n_{w^{(2)}}(e)} \right) = 0$ . То есть такие минимальные двойные прогулки дают нулевой вклад в поправку. Значит, ненулевой вклад дают только минимальные двойные прогулки, у которых остов  $G_{dw}$  связан. Для любого связного графа верно неравенство



$|V_w| - |E_w| - 1 \leq 0$ , причем равенство достигается только в случае, когда  $G_{dw}$  — дерево. Опять же есть два случая:  $E_{w^{(1)}} \cap E_{w^{(2)}} = \emptyset \Rightarrow c(dw) = 0$  и  $c(dw) > 0$ . В первом случае вклад равен 0 (см. выше), а во втором равен  $\prod_{e \in E_{dw}} \frac{V_{n_{dw}(e)}}{p^{n_{dw}(e)/2-1}}$ .

**Определение 2.** Назовем существенными те минимальные двойные прогулки, вклад которых в поправку соответствующего коррелятора в пределе  $N \rightarrow \infty$  не равен 0.

Обозначим множество существенных двойных прогулок типа  $(k, m)$  через  $EDW_{k,m} = \{dw \in MDW_{k,m} : G_{dw} \text{ — дерево} \wedge c(dw) > 0\}$ . Это все минимальные двойные прогулки, граф которых является деревом и у графов первой и второй прогулок есть по крайней мере одно общее ребро. Теперь формулу 2.9 можно записать

$$n_{k,m}^{(p)} = \sum_{dw \in EDW_{k,m}} \theta(dw), \quad \text{где вес } dw \quad \theta(dw) = \prod_{e \in E_{dw}} \frac{V_{n_{dw}(e)}}{p^{n_{dw}(e)/2-1}}. \quad (2.10)$$

Доказана первая часть теоремы — существование  $n_{k,m}^{(p)}$ . Осталось вывести систему рекуррентных соотношений для  $n_{k,m}^{(p)}$ . Из определения видно, что вес существенной двойной прогулки является мультипликативным по ребрам  $G_{dw}$ . Так как  $G_{dw}$  — дерево, то каждое его ребро является мостом. Поэтому каждое ребро проходится четное число раз. Следовательно, поправка  $n_{k,m}^{(p)}$  не зависит от нечетных  $V_{2\alpha-1}$ . Более того,  $EDW_{k,m} \neq \emptyset$  только тогда, когда  $k$  и  $m$  — четные числа.

### 2.3. Факторизация двойной прогулки по ребру

Идея вывода рекуррентной системы такая же, как и у Вигнера, но ее реализация сложнее. Удалим из графа  $G_{dw}$  первое ребро первой прогулки. Так как  $G_{dw}$  — дерево, то граф распадается на два куска. Тогда каждая двойная прогулка разбивается на две. Но для однозначного восстановления минимальной двойной прогулки недостаточно знать эти куски. Необходимо еще знать кратность этого ребра и поведение большой двойной прогулки в вершинах удаляемого ребра, т.е. в какие моменты попадания в ключевые вершины идет прохождение особого ребра. Назовем эту информацию кодом двойной прогулки. Таким образом, из одного множества двойных прогулок получаем множество верхних двойных прогулок, множество нижних двойных прогулок и множество кодов. Разобьем исходное множество двойных прогулок на такие непересекающиеся подмножества, для которых соответствующие множество верхних двойных прогулок, множество нижних двойных прогулок и множество кодов независимы (т.е. отображение разбиения является биекцией между

исходным множеством двойных прогулок и декартовым произведением множества верхних двойных прогулок, множества нижних двойных прогулок и множества кодов). Тогда, пользуясь мультипликативностью веса, можно написать формулу для суммарных весов. Далее поступаем аналогично для новых множеств двойных прогулок до тех пор, пока система не замкнется. Осуществляется каждый такой шаг в два этапа: разбиваем по корню первой прогулки (это первая лемма разбиения), а потом левый из получившихся кусков разбиваем вдоль второй вершины удаляемого ребра.

$\text{Set}^{(a)}$	параметры $r_g(dw)$ , $r_b(dw)$ могут быть любыми
$\text{нет}^{(a)}$	параметры $r_g(dw)$ , $r_b(dw)$ фиксированы
$\text{Set}_{(=)}$	серый и синий корни совпадают
$\text{Set}_{(\neq)}$	серый корень не совпадает с синим
$\text{Set}_{(c)}$	выполнено неравенство $c(dw) > 0$
$\text{Set}_{(c)}$	выполнено неравенство $c(dw) \geq 0$
$\text{Set}^{(r)}$	ребро $(r, v)$ есть и в остове синей прогулки
$\text{Set}^{(g)}$	ребро $(r, v)$ есть только в серой прогулке
$\text{Set}^{(u)}$	синий корень находится в верхнем дереве
$\text{Set}^{(d)}$	синий корень, отличный от серого, находится в нижнем дереве
$\text{Set}^{(v)}$	параметры $v_g(dw)$ , $v_b(dw)$ фиксированы
$\text{Set}^{(1)}$	или серой, или синей прогулки нет
$\text{Set}_{(1)}$	у остова всей двойной прогулки $G_{dw}$ лишь одно ребро при сером корне $r$
$\text{Set}^{(l)}$	фиксированы длины прогулок по левому графу
$\text{Set}^{(f)}$	фиксированы серая и синяя кратности ребра $(r, v)$
$\text{Set}^{(\emptyset)}$	верхний граф пуст

Введем несколько обозначений. Первую прогулку минимальной двойной прогулки назовем серой, а вторую — синей. Первую вершину серой (синей) прогулки назовем серым (синим) корнем. Серый корень назовем  $r$ . А вторую вершину серой прогулки назовем  $v$ . Рассмотрим новый граф  $G_{new} = (V_{dw}, E_{dw} \setminus (r, v))$ , который получится после удаления из графа  $G_{dw}$  ребра  $(r, v)$ . Этот граф имеет ровно две компоненты связности: верхний граф  $G_u$  — дерево с корнем  $v$  и правый граф  $G_r$  — оставшееся дерево с корнем  $r$ . Обозначим также левый граф  $G_l = (r, v) \cup G_u$  — дерево с корнем  $r$  и ровно одним ребром, выходящим из корня —  $(r, v)$ . Половину длины серой (синей) прогулки обозначим  $l_g$  ( $l_b$ ). Пусть также  $u_g$  ( $u_b$ ) обозначает половину длины серой (синей) прогулки по верхнему графу, а  $f_g$  ( $f_b$ ) — число серых (синих) шагов из серого корня  $r$  в вершину  $v$ . Обозначим также через  $r_g$  ( $r_b$ ) число

всех серых (синих) шагов, выходящих из серого корня  $r$ , а через  $v_g$  ( $v_b$ ) — число шагов, выходящих из вершины  $v$  и отличных от  $\overline{(v, r)}$ .

Пусть  $\text{Set}(l_g, l_b)$  — множество существенных  $(l_g, l_b)$ -прогулок, а  $S(l_g, l_b)$  — их суммарный вес. Далее будут введены другие совокупности минимальных двойных древовидных (остов всей двойной прогулки и остов каждой ее части является деревом) прогулок и их суммарные веса. В приведенной таблице описаны используемые обозначения. (Эти обозначения используются также и для  $S$ .)

Схематически система рекуррентных соотношений представлена на рис. 1. Каждый элемент схемы выражается через те элементы, на которые указывает исходящие из него стрелки. При этом пунктирная стрелка означает, что суммарная длина обязательно уменьшится.

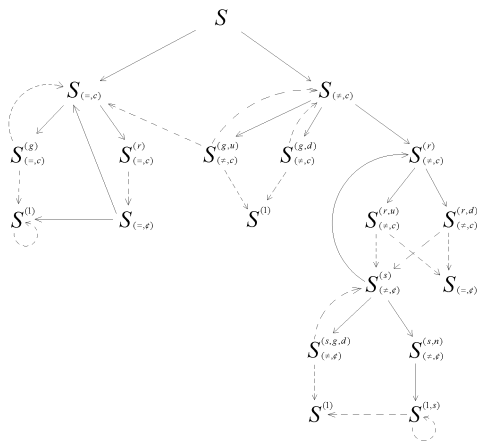


Рис. 1. Схема системы рекуррентных соотношений

На рисунках синий корень изображается черным кружком, серый — белым, а если серый и синий корни совпадают, то кружок будет черно-белым. Два параллельных отрезка обозначают серо-синее ребро. Случай, когда синяя прогулка доходит до серого корня, изображается маленьким черным кружком внутри серого корня.

Так как у каждой существенной двойной прогулки серый и синий корни или совпадают, или не совпадают, то верно

$$S(l_g, l_b) = S_{(=,c)}^{(a)}(l_g, l_b) + S_{(\neq,c)}^{(a)}(l_g, l_b). \quad (2.11)$$

Так как, очевидно, что  $0 \leq r_g \leq l_g \wedge 0 \leq r_b \leq l_b$ , то перебирая всевозможные значения параметров  $l_g$  и  $l_b$ , получим

$$S_{(=,c)}^{(a)}(l_g, l_b) = \sum_{r_g=0}^{l_g} \sum_{r_b=0}^{l_b} S_{(=,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.12)$$

Так как ребро  $(r, v)$  либо есть в синем остове, либо нет, то верно

$$S_{(=,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(=,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(=,c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.13)$$

Возьмем произвольную двойную прогулку  $dw$  из  $\text{Set}_{(=,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$ . Разобьем ее остов  $G_{dw}$  на левый  $G_l$  и правый  $G_r$  графы. Тогда двойная прогулка  $dw$  разобьется на левую  $f$  и правую  $s$  двойные прогулки. При этом  $f$  реально является одинарной прогулкой, т.к. синей прогулке в  $f$  нет (ребро  $(r, v)$  в синей прогулке  $dw$  не проходит, а остов является  $G_{dw}$  деревом). При корне  $r$  у остова  $f$  лишь одно ребро, поэтому  $f \in \text{Set}_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g)$ . Раз в  $G_{dw}$  есть сине-серое ребро, а в  $G_l$  его нет, то оно есть в  $G_r$ . Серый и синий корни в  $s$  совпадают, поэтому  $s \in \text{Set}_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b)$ . Верна следующая лемма:

**Лемма 1. Первая лемма разбиения**

$$S_{(=,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} S_{(=,c)}^{(g,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & S_{(=,c)}^{(g,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g) \\ &= C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) \cdot S_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Первое равенство следует из определений, а второе — из следующей биекции:

$$\begin{aligned} \text{Set}_{(=,c)}^{(g,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g) &\xrightarrow{\text{bij}} \text{Set}_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) \\ &\times \text{Set}_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b) \times \text{Code}^{(1)}(r_g, f_g), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\text{Code}^{(1)}(r_g, f_g)$  — это множество последовательностей из нулей и единиц длины  $r_g$ , у которых ровно  $f_g$  единиц и первый член равен 1. Рисунок 2 иллюстрирует равенство (2.15).

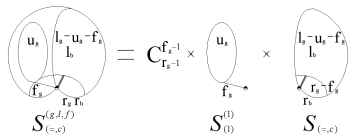


Рис. 2. Разбиение  $\text{Set}_{(=,c)}^{(g,l,f)}$

Действительно, т.к. вклад существенных двойных прогулок мультипликативен по ребрам, то вклад существенной прогулки из  $\text{Set}_{(=,c)}^{(g,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g)$  равен произведению вкладов ее частей из  $\text{Set}_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g)$  и  $\text{Set}_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b)$ . Применяя этот факт и декартовость произведения образа вышеописанной биекции, получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_{(=,c)}^{(g,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g) \\ &= \left| \text{Code}^{(1)}(r_g, f_g) \right| \cdot \mathbf{S}_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) \cdot \mathbf{S}_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b), \end{aligned}$$

$\left| \text{Code}^{(1)}(r_g, f_g) \right| = C_{r_g-1}^{f_g-1}$  — тривиальный комбинаторный факт. Действительно, если первый элемент фиксирован (единица), то остается выбрать  $r_g - 1$  мест для оставшихся единиц из свободных  $f_g - 1$  места.

Теперь докажем биективность отображения (2.16). Сначала получим две числовые двойные прогулки и код. А потом обе двойные прогулки минимизируем.

Отображение разбиения осуществляется с помощью следующего алгоритма. Сперва разобьем на подпрогулки серую прогулку. Идем вдоль  $dw^{(1)}$ , и

если очередной шаг принадлежит  $G_l$ , то добавляем его в первую серую прогулку  $f^{(1)}$ , в противном случае — во вторую прогулку  $s^{(1)}$ . При этом, если очередной шаг начинается с серого корня, то: если это  $(\overline{r}, \overline{v})$ , то в код приписываем 1, иначе — 0. Очевидно, что первый элемент кода равен 1 (т.к. первое ребро серой прогулки это по определению  $(\overline{r}, \overline{v})$ ), а общее число единиц в коде равно  $f_g$ . Легко видеть, что  $f^{(1)}$  и  $s^{(1)}$  действительно прогулки (т.е. ребра согласованы), замкнутые (у обеих один и тот же корень  $r$ ). Очевидно, что каждое ребро и из левого графа  $G_l$ , и из правого графа  $G_r$  проходит в соответствующей подпрогулке столько же раз, сколько и в серой прогулке  $dw^{(1)}$ , т.е.

$$\forall e \in G_l \quad n_{dw^{(1)}(e)} = n_{f^{(1)}}(e) \text{ и } \forall e \in G_r \quad n_{dw^{(1)}(e)} = n_{s^{(1)}}(e).$$

Синюю прогулку делить не надо, т.к. она будет вся в  $s^{(2)}$ . То есть

$$\forall e \in G_l \quad n_{dw}(e) = n_f(e) \text{ и } \forall e \in G_r \quad n_{dw}(e) = n_{s^{(2)}}(e).$$

Таким образом, вес исходной двойной прогулки равен произведению весов первой и второй получившихся двойных прогулок (нулевая прогулка по определению имеет единичный вес). Теперь сделаем их минимальными, применив к ним отображение минимизации. При этом вес прогулок не изменится. Биективность доказывается с помощью следующего алгоритма сбора. Будем постепенно перенумеровывать вершины первой и второй прогулок. Корню первой и второй двойных прогулок поставим в соответствие число 1. Обойдем эти двойные прогулки. Начинаем построение с корня. Если очередной шаг конструируемой двойной прогулки заканчивается в корне, а очередной элемент кода равен 1, то далее идем по первой подпрогулке, иначе — по второй. Если конечная вершина текущего шага по одной из малых прогулок еще не имеет своего номера в большой прогулке, то поставим ей в соответствие наибольший номер из уже пройденных вершин в большой прогулке плюс 1. В результате получится двойная прогулка из требуемого класса. Легко понять, что отображения разбиения и сбора инъективны, а значит, биективны, т.к. области определения и значения конечны.

Осталось разбить серую прогулку  $f^{(1)}$ .

**Лемма 2. Вторая лемма разбиения**

$$S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) = \sum_{v_g=0}^{u_g} S_{(1)}^{(1,v)}(f_g + u_g, f_g, v_g), \tag{2.17}$$

$$S_{(1)}^{(1,v)}(f_g + u_g, f_g, v_g) = C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_2 f_g}{p^{f_g-1}} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \tag{2.18}$$

$$S_{(1)}^{(1,v)} = C_{f_r, v_r-1}^{f_r-1} \times S^{(1)} \times S_{(1)}^{(1,c)}$$

Рис. 3. Разбиение  $\text{Set}_{(1)}^{(1,v)}$

Эта лемма доказывается аналогично первой. Первое равенство очевидно, а второе следует из биекции

$$\text{Set}_1^{(v)}(r_f + u_l, r_f, g_v) \xrightarrow{bij} \text{Set}^{(1)}(u_g, v_g) \times \text{Set}_1^{(1,\emptyset)}(f_g) \times \text{Code}^{(2)}(f_g + v_g, f_g), \quad (2.19)$$

где  $\text{Code}^{(2)}(f_g + v_g, f_g)$  — это множество последовательностей из нулей и единиц длины  $f_g + v_g$ , у которых ровно  $f_g$  единиц и последний член равен 1. Последний член равен 1, т.к. серая прогулка последним шагом из вершины  $v$  должна вернуться в серый корень  $r$  (прогулка замкнутая).  $\text{Set}_1^{(1,\emptyset)}(f_g)$  состоит из единственной прогулки с весом  $\frac{V_2 f_g}{p^{f_g-1}}$ . Рисунок 3 иллюстрирует равенство (2.18).

Объединяя эти две леммы, изменяя порядок суммирования и вынося некоторые выражения за знак суммы, получим формулу

$$S_{(=,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_2 f_g}{p^{f_g-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S_{(=,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b; r_g - f_g, r_b) \cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \quad (2.20)$$

#### 2.4. Вывод рекуррентной системы

Аналогично (см. также [VKS]) доказывается формула

$$S^{(1)}(l_g, r_g) = \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_2 f_g}{p^{f_g-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S^{(1)}(l_g - u_g - f_g, r_g - f_g)$$

$$\cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \quad (2.21)$$

Формула

$$S_{(=,c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{f_b=1}^{r_b} C_{r_b}^{f_b} \cdot \frac{V_2(f_g+f_b)}{p^{f_g+f_b-1}} \\ \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S_{(=,\varphi)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b) \\ \cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{v_b=0}^{u_b} C_{f_b+v_b-1}^{f_b-1} \cdot S_{(=,\varphi)}(u_g, u_b; v_g, v_b) \quad (2.22)$$

следует из аналогов первой и второй лемм:

$$S_{(=,c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} \sum_{f_b=1}^{s_b} S_{(=,c)}^{(r,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b), \\ S_{(=,c)}^{(r,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b) = C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot C_{r_b}^{f_b} \cdot S_{(1,=,c)}^{(r,f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) \\ \cdot S_{(=,\varphi)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b).$$

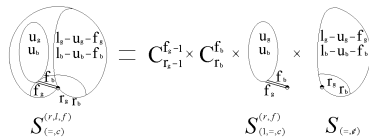


Рис. 4. Разбиение  $\text{Set}_{(=,c)}^{(r,l,f)}$

В формуле стоит множитель  $C_{r_b}^{f_b}$ , т.к. в отличие от серой прогулки у синей первый шаг не обязан быть  $(r, v)$  (см. рис. 4).

$$S_{(1,=,c)}^{(r,f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) = \sum_{v_g=0}^{u_g} \sum_{v_b=0}^{u_b} S_{(1,=,c)}^{(v,r,f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b),$$



$$S_{(1,=,c)}^{(v,r,f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b) = C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot C_{f_b+v_b-1}^{f_b-1} \cdot \frac{V_{2 \cdot (f_g+f_b)}}{p^{f_g+f_b-1}} \cdot S_{(=,\emptyset)}(u_g, u_b; v_g, v_b).$$

Последняя формула проиллюстрирована рисунком 5.

The diagram shows a large set  $S_{(1,=,c)}^{(v,r,f)}$  on the left, which is equal to the product of three sets on the right:  $C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1}$ ,  $C_{f_b+v_b-1}^{f_b-1}$ , and  $S_{(=,\emptyset)}$ . Each set is represented by a circle containing vertices and edges. The first two sets are connected to the third by arrows, indicating a decomposition or mapping.

Рис. 5. Разбиение  $\text{Set}_{(1,=,c)}^{(v,r,f)}$

В двойной прогулке из  $S_{(=,\emptyset)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$  либо есть сине-серое ребро, либо его нет. В первом случае она из  $S_{(=,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$ . А во втором синяя и серая прогулки, кроме серого корня  $r$ , не имеют общих вершин (у них остовы — деревья), поэтому они фактически независимы. Откуда следует

$$S_{(=,\emptyset)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(=,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S^{(1)}(l_g, r_g) \cdot S^{(1)}(l_b, r_b). \quad (2.23)$$

Перебирая всевозможные значения параметров  $r_g$  и  $r_b$ , выведем

$$S_{(\neq,c)}^{(a)}(l_g, l_b) = \sum_{r_g=0}^{l_g} \sum_{r_b=0}^{l_b} S_{(\neq,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.24)$$

В любой существенной двойной прогулке либо есть сине-серое ребро, либо его нет.

$$S_{(\neq,c)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(\neq,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(\neq,c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.25)$$

Если синий корень не совпадает с серым, то синий корень находится либо в верхнем графе, либо в нижнем.

$$S_{(\neq,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(\neq,c)}^{(g,u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(\neq,c)}^{(g,d)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.26)$$

Для двойной прогулки из  $S_{(\neq,c)}^{(g,u)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$  так как в синем остове нет ребра  $(r, v)$ , то  $r_b$  равно 0. Во второй двойной прогулке  $s$  отсутствует синяя составляющая. А сине-серое ребро лежит в верхнем графе. Аналог первой леммы записывается следующим образом (см. также рис. 6):

$$S_{(\neq,c)}^{(g,u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \delta_{r_b} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{r_g} S_{(\neq,c)}^{(g,u,l,f)}(l_g, l_b; r_g; u_g, f_g),$$

$$S_{(\neq, c)}^{(g, u, l, f)}(l_g, l_b; r_g; u_g, f_g) = C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot S_{(1, \neq, c)}^{(g, f)}(f_g + u_g, l_b; f_g) \cdot S^{(1)}(l_g - u_g - f_g, r_g - f_g).$$

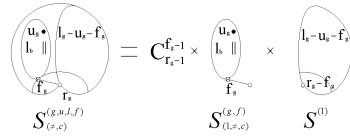


Рис. 6. Разбиение  $\text{Set}_{(\neq, c)}^{(g, u, l, f)}$

Если синий корень находится в верхнем графе, то он либо совпадает с вершиной  $v$ , либо нет. В первом варианте двойная прогулка по верхнему графу будет принадлежать  $S_{(=, c)}(u_g, l_b; v_g, v_b)$ , а во втором —  $S_{(\neq, c)}(u_g, l_b; v_g, v_b)$ . Аналог второй леммы звучит так (см. также рис. 7):

$$\begin{aligned} S_{(1, \neq, c)}^{(g, f)}(f_g + u_g, l_b; f_g) &= \sum_{v_g=0}^{u_g} \sum_{v_b=0}^{l_b} S_{(1, \neq, c)}^{(v, g, f)}(f_g + u_g, l_b; f_g; v_g), \\ &= S_{(1, \neq, c)}^{(v, g, f)}(f_g + u_g, l_b; f_g; v_g) \\ &= C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot (S_{(=, c)}(u_g, l_b; v_g, v_b) + S_{(\neq, c)}(u_g, l_b; v_g, v_b)). \end{aligned}$$

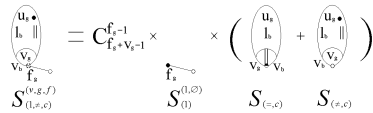


Рис. 7. Разбиение  $\text{Set}_{(1, \neq, c)}^{(v, g, f)}$

Из этих двух лемм следует

$$S_{(\neq, c)}^{(g, u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \delta_{r_b} \cdot \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S^{(1)}(l_g - u_g - f_g, r_g - f_g)$$

$$\cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{v_b=0}^{l_b} (S_{(=,c)}(u_g, l_b; v_g, v_b) + S_{(\neq,c)}(u_g, l_b; v_g, v_b)). \quad (2.27)$$

Совершенно аналогично случаю формулы для  $S_{(=,c)}^{(g)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$  получается из лемм (см. также рис. 8)

$$\begin{aligned} S_{(\neq,c)}^{(g,d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) &= \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} S_{(\neq,c)}^{(g,d,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g), \\ &= S_{(\neq,c)}^{(g,d,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g) \\ &= C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) \cdot S_{(\neq,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b) \end{aligned}$$

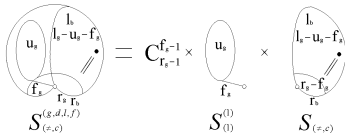


Рис. 8. Разбиение  $Set_{(\neq,c)}^{(g,d,l,f)}$

(вторая лемма остается без изменений)

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) &= \sum_{v_g=0}^{u_g} S_{(1)}^{(1,v)}(f_g + u_g, f_g, v_g), \\ S_{(1)}^{(1,v)}(f_g + u_g, f_g, v_g) &= C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g) \end{aligned}$$

формула

$$\begin{aligned} S_{(\neq,c)}^{(g,d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) &= \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S_{(\neq,c)}(l_g - u_g - f_g, l_b; r_g - f_g, r_b) \\ &\quad \times \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Синий корень, не совпадающий с серым, может находиться или в верхнем графе, или в нижнем (правом).

$$S_{(\neq, c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(\neq, c)}^{(r, u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(\neq, c)}^{(r, d)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.29)$$

Для случая  $S_{(\neq, c)}^{(r, u)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$  первая и вторая леммы выглядят так (см. также рис. 9 и 10):

$$S_{(\neq, c)}^{(r, u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} \sum_{f_b=1}^{s_b} S_{(\neq, c)}^{(r, u, l, f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b),$$

$$S_{(\neq, c)}^{(r, u, l, f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b) = C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot C_{r_b-1}^{f_b-1} \cdot S_{(1, \neq, c)}^{(r, f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) \cdot S_{(=, \varphi)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b).$$

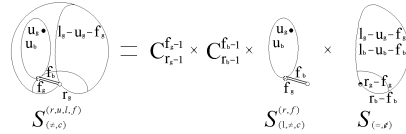


Рис. 9. Разбиение  $\text{Set}_{(\neq, c)}^{(r, u, l, f)}$

В последней формуле стоит множитель  $C_{r_b-1}^{f_b-1}$ , т.к. последний шаг синей прогулки из серого корня  $r$  должен быть  $\overrightarrow{(r, v)}$ . Раз ребро  $(r, v)$  — серо-синее, то во второй двойной прогулке  $s$  может и не быть сине-серых ребер.

$$S_{(1, \neq, c)}^{(r, f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) = \sum_{v_g=0}^{u_g} \sum_{v_b=0}^{u_b} S_{(1, \neq, c)}^{(v, r, f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b),$$

$$S_{(1, \neq, c)}^{(v, r, f)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b) = C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2 \cdot (f_g+f_b)}}{p_{f_g+f_b-1}} \cdot \left( C_{f_b+v_b}^{f_b} \cdot S_{(=, \varphi)}(u_g, u_b; v_g, v_b) + C_{f_b+v_b-1}^{f_b} \cdot S_{(\neq, \varphi)}^{(s)}(u_g, u_b; v_g, v_b) \right).$$

$$S_{(1, \neq, c)}^{(v, r, f)} = C_{f_1+v_1-1}^{f_1-1} \times S_{(1, \neq)}^{(r, \emptyset)} \times \left( C_{f_1+v_1}^{f_1} \times S_{(=, \emptyset)} + C_{f_1+v_1-1}^{f_1} \times S_{(=, \emptyset)}^{(s)} \right)$$

Рис. 10. Разбиение  $\text{Set}_{(1, \neq, c)}^{(v, r, f)}$

Синий корень или совпадает с вершиной  $v$ , или нет. Если совпадает, то двойная прогулка по верхнему графу будет из  $S_{(=, \emptyset)}(u_g, u_b; v_g, v_b)$ , а иначе — из  $S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(u_g, u_b; v_g, v_b)$  (синяя прогулка по верхнему графу должна проходить по вершине  $v$ , т.к. синий корень находится в верхнем графе, но синяя прогулка проходит через ребро  $(r, v)$ ). В выражении в скобках стоят разные множители, т.к. во втором случае последний шаг из вершины  $v$  обязан не совпадать с  $(v, r)$ , а в первом случае — совпадение возможно.

Из чего следует

$$S_{(\neq, c)}^{(r, u)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{f_b=1}^{r_b} C_{r_b-1}^{f_b-1} \cdot \frac{V_2(f_g+f_b)}{p^{f_g+f_b-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} S_{(=, \emptyset)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b) \cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{v_b=0}^{u_b} \left( C_{f_b+v_b}^{f_b} \cdot S_{(=, \emptyset)}(u_g, u_b; v_g, v_b) + C_{f_b+v_b-1}^{f_b} \cdot S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(u_g, u_b; v_g, v_b) \right). \quad (2.30)$$

В прогулке из  $S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(u_g, u_b; v_g, v_b)$  либо есть серые ребра при сером корне, либо их нет. В первом случае ребро  $(r, v)$  может быть или сине-серым (тогда это просто древовидная двойная прогулка с разными корнями и сине-серым ребром  $(r, v)$ , т.е. она из  $S_{(\neq, c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$ ), или чисто серым (в этом случае синий корень находится в нижнем графе, т.к. синяя прогулка проходит через серый корень  $r$ ). А во втором случае, т.к. серых ребер нет при сером корне, то серых ребер вообще нет.

$$S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = S_{(\neq, c)}^{(r)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) + S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, n)}(l_g, l_b; r_g, r_b). \quad (2.31)$$

Для случая двойной прогулки из  $S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d)}(l_g, l_b; r_g, r_b)$  аналоги двух лемм выписываются легко (см. также рис. 11)

$$\begin{aligned} S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) &= \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d, l, f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g), \\ &= S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d, l, f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, f_g) \\ &= C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) \cdot S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(l_g - u_g - f_g, l_b, r_g - f_g, r_b). \end{aligned}$$

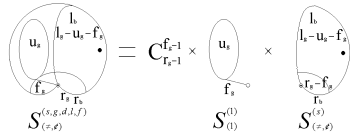


Рис. 11. Разбиение  $Set_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d, l, f)}$

Вторая лемма остается без изменений.

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{(1)}(f_g + u_g, f_g) &= \sum_{v_g=0}^{u_g} S_{(1)}^{(1, v)}(f_g + u_g, f_g, v_g), \\ S_{(1)}^{(1, v)}(f_g + u_g, f_g, v_g) &= C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \end{aligned}$$

Поэтому верно

$$\begin{aligned} S_{(\neq, c)}^{(s, g, d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) &= \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \frac{V_{2f_g}}{p^{f_g-1}} \cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} S_{(\neq, \emptyset)}^{(s)}(l_g - u_g - f_g, l_b; r_g - f_g, r_b) \\ &\quad \cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot S^{(1)}(u_g, v_g). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Если серых ребер нет, то  $l_g = 0$  и  $r_g = 0$ .

$$S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, n)}(l_g, l_b; r_g, r_b) = \delta_{l_g} \cdot \delta_{r_g} \cdot S^{(1, s)}(l_b, r_b). \tag{2.33}$$

Случай  $S^{(1,s)}(l_b, r_b)$  тоже не вызывает проблем (см. рис. 12 и 13). Вершину, из которой синяя прогулка впервые попадает в серый корень  $r$ , назовем  $b$ . Будем разрезать по вершинам ребра  $(r, b)$ . Здесь  $u_b$  означает половину длины прогулки по синему графу, который образовался после удаления ребра  $(r, b)$ , а  $f_b$  — половину длины синей прогулки по ребру  $(r, b)$ .  $v_b$  — число шагов, выходящих из вершины  $b$ , отличных от  $(b, r)$ . Очевидно, что синий корень лежит в верхнем графе. Опять же возможны два случая: синий корень совпадает с вершиной  $b$  или нет. В зависимости от этого появляются разные множители.

$$S^{(1,s)}(l_b, r_b) = \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} \sum_{f_b=1}^{s_b} S^{(1,s,l,f)}(l_b; r_b; u_b; f_b),$$

$$S^{(1,s,l,f)}(l_b; r_b; u_b; f_b) = C_{r_b-1}^{f_b-1} \cdot S_{(1)}^{(1,s,f)}(f_b + u_b, f_b) \cdot S^{(1)}(l_b - u_b - f_b, r_b - f_b),$$

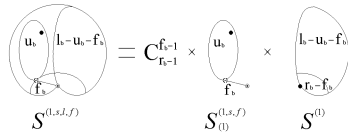


Рис. 12. Разбиение  $\text{Set}^{(1,s,l,f)}$

$$S_{(1)}^{(1,s,f)}(f_b + u_b, f_b) = \sum_{v_b=0}^{u_b} S_{(1)}^{(1,s,v,f)}(f_b + u_b, f_b, v_b),$$

$$S_{(1)}^{(1,s,v,f)}(f_b + u_b, f_b, v_b) = \frac{V_2 f_b}{p f_b - 1} \cdot \left( C_{f_b+v_b-1}^{f_b} \cdot S^{(1,s)}(u_b, v_b) + C_{f_b+v_b}^{f_b} \cdot S^{(1)}(u_b, v_b) \right).$$

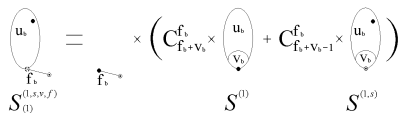


Рис. 13. Разбиение  $\text{Set}_{(1)}^{(1,s,v,f)}$

Из этих двух лемм следует

$$\begin{aligned}
 S^{(1,s)}(l_b, r_b) &= \sum_{f_b=1}^{r_b} C_{r_b-1}^{f_b-1} \cdot \frac{V_{2f_b}}{p^{f_b-1}} \cdot \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} S^{(1)}(l_b - u_b - f_b, r_b - f_b) \\
 &\cdot \sum_{v_b=0}^{u_b} \left( C_{f_b+v_b}^{f_b} \cdot S^{(1)}(u_b, v_b) + C_{f_b+v_b-1}^{f_b} \cdot S^{(1,s)}(u_b, v_b) \right). \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Для случая  $S_{(\neq, c)}^{(r,d)}(l_b, r_b)$  леммы формулируются следующим образом:

$$S_{(\neq, c)}^{(r,d)}(l_g, l_b, r_g, r_b) = \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{f_g=1}^{s_g} \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} \sum_{f_b=1}^{s_b} S_{(\neq, c)}^{(r,d,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b),$$

$$\begin{aligned}
 S_{(\neq, c)}^{(r,d,l,f)}(l_g, l_b; r_g, r_b; u_g, u_b; f_g, f_b) &= C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot C_{r_b-1}^{f_b} \cdot S_{(1, =, c)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) \\
 &\cdot S_{(\neq, \varphi)}^{(s)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b),
 \end{aligned}$$

$$S_{(1, =, c)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b) = \sum_{v_g=0}^{u_g} \sum_{v_b=0}^{u_b} S_{(1, =, c)}^{(v)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b),$$

$$\begin{aligned}
 S_{(1, =, c)}^{(v)}(f_g + u_g, f_b + u_b; f_g, f_b; v_g, v_b) &= C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot C_{f_b+v_b-1}^{f_b-1} \\
 &\cdot \frac{V_{2(f_g+f_b)}}{p^{f_g+f_b-1}} \cdot S_{(=, \varphi)}(u_g, u_b; v_g, v_b).
 \end{aligned}$$

Из них и вытекает

$$\begin{aligned}
 S_{(\neq, c)}^{(r,d)}(l_g, l_b; r_g, r_b) &= \sum_{f_g=1}^{r_g} C_{r_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{f_b=1}^{r_b} C_{r_b-1}^{f_b} \frac{V_{2(f_g+f_b)}}{p^{f_g+f_b-1}} \\
 &\cdot \sum_{u_g=0}^{l_g-r_g} \sum_{u_b=0}^{l_b-r_b} S_{(\neq, \varphi)}^{(s)}(l_g - u_g - f_g, l_b - u_b - f_b; r_g - f_g, r_b - f_b) \\
 &\cdot \sum_{v_g=0}^{u_g} C_{f_g+v_g-1}^{f_g-1} \cdot \sum_{v_b=0}^{u_b} C_{f_b+v_b-1}^{f_b-1} \cdot S_{(=, \varphi)}(u_g, u_b; v_g, v_b). \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Система (2.11)–(2.13), (2.20)–(2.35) является рекуррентной, т.к. на каждом существенном этапе уменьшается суммарная длина двойной (одинарной)



прогулки. Для однозначной разрешимости на систему необходимо наложить следующие начальные условия:

$$S^{(1)}(0, x) = \delta_x, \quad (2.36)$$

$$S^{(1, s)}(0, x) = \delta_x, \quad (2.37)$$

$$S_{(=, c)}^{(g)}(0, 0; x, y) = 0, \quad (2.38)$$

$$S_{(=, c)}^{(r)}(0, 0; x, y) = 0, \quad (2.39)$$

$$S_{(\neq, c)}^{(g, u)}(0, 0; r_g, r_b) = 0, \quad (2.40)$$

$$S_{(\neq, c)}^{(g, d)}(0, 0; r_g, r_b) = 0, \quad (2.41)$$

$$S_{(\neq, c)}^{(r, u)}(0, 0; r_g, r_b) = 0, \quad (2.42)$$

$$S_{(\neq, c)}^{(r, d)}(0, 0; r_g, r_b) = 0, \quad (2.43)$$

$$S_{(\neq, \emptyset)}^{(s, g, d)}(0, 0; x, y) = \delta_x \cdot \delta_y. \quad (2.44)$$

### Список литературы

- [1] *E.P. Wigner*, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. — *Ann. Math.* (1958), v. 67, p. 325–327.
- [2] *A. Khorunzhy, B. Khoruzhenko, L. Pastur, and M. Shcherbina*, The Large-n limit in statistical mechanics and spectral theory of disordered systems. — *Phase transition and critical phenomena* (1992), v. 15, p. 73–239.
- [3] *L. Pastur*, Random matrices as paradigm. — In: *Mathematical Physics* (A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble, and B. Zegarlinski (Eds.)). Imp. College Press, London (2000), p. 216–266.

- [4] *G.Y. Rodgers and A.Y. Bray*, Density of states of a sparse random matrix. — *Phys. Rev. B* (1988), v. 37, p. 3557–3562.
- [5] *G.Y. Rodgers and C. de Dominicis*, Density of states of sparse random matrices. — *J. Phys. A: Math. Jen.* (1990), v. 23, p. 1567–1566.
- [6] *A.D. Mirlin and Y.V. Fyodorov*, Universality of the level correlation function of sparse random matrices. — *J. Phys. A: Math. Jen.* (1991), v. 24, p. 2273–2286.
- [7] *Y.V. Fyodorov and A.D. Mirlin*, Strong eigenfunction correlations near the Anderson localization transition. arXiv:cond-mat/9612218 v1.
- [8] *M. Bauer and O. Golinelli*, Random incidence matrices: spectral density at zero energy. Saclay preprint T00/087; cond-mat/0006472
- [9] *M. Bauer and O. Golinelli*, Random incidence matrices: moments and spectral density.— *J. Stat. Phys.* (2001), v. 103, p. 301–336.
- [10] *B. Bollobas*, Random Graphs. Acad. Press, London (1985).
- [11] *A. Khorunzhy, V. Vengerovsky*, On asymptotic solvability of random graph's laplacians.— Preprint lanl.arXiv.org math-ph/0009028.
- [12] *A. Khorunzhy, M. Shcherbina, and V. Vengerovsky*, Eigenvalue distribution of large weighted random graphs. — *J. Math. Phys.* (2000), v. 45, No. 4, p. 1648–1672.
- [13] *A. Khorunzhy, B. Khoruzhenko, and L. Pastur*, Asymptotic properties of large random matrices with independent entries. — *J. Math. Phys.* (1996), v. 37, p. 5033–5059.
- [14] *S. Albeverio, L. Pastur, and M. Shcherbina*, On the  $1/n$  expansion for some unitary invariant ensembles of random matrices. — *Comm. Math. Phys.* (2001), v. 224, p. 271–305.
- [15] *M.L.Mehta*, Random Matrices. Acad. Press, New York (1991).

### Asymptotics of correlators for ensembles of sparse random matrices

V.V. Vengerovsky

We study asymptotic behaviour of the correlation functions of sparse random  $N \times N$  matrices. It is shown that the main term of the correlation function of  $k$ th and  $m$ th moments of the integrated density of states is  $N^{-1}n_{k,m}$ . The closed system of recurrent relations for coefficients  $\{n_{k,m}\}_{k,m=1}^{\infty}$  was obtained.