Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 2, с. 208–225

Функция управляемости как время движения. I

А.Э. Чоке Риверо

Area Básica, Universidad Autónoma del Carmen
Calle 56 No. 4, Cd. del Carmen, Campeche, C.P. 24180, México

E-mail:achoque@pampano.unacar.mx
achoque@yahoo.com

В.И. Коробов

Institute of Mathematics, Szczecin University
Wielkopolska Str., 15, Szczecin, 70451, Poland

E-mail:vkorobov@univer.kharkov.ua
korobow@sus.univ.szczecin.pl

В.А. Скорик

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:skoryk@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 июля 2003 г.

Рассмотрена задача допустимого синтеза позиционного управления для канонической системы с геометрическими ограничениями на управление. Исследования проведены на основе метода функции управляемости. Построены функции управляемости, являющиеся временем движения из произвольной начальной точки в нуль, и управления, решающие задачу.

Розглянуто задачу допустимого синтезу позиційного керування для канонічної системи з геометричними обмеженнями на керування. Дослідження проведено на основі методу функції керованості. Побудовано функції керованості, які є часом руху з довільної початкової точки у нуль, і керування, що розв'язують задачу.

Mathematics Subject Classification 2000: 93P50.

1. Введение

Одной из известных задач оптимального управления [1] является задача синтеза ограниченных управлений, оптимальных по быстродействию, которая состоит в следующем.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad 0 \in \operatorname{int} \Omega. \tag{1.1}$$

Требуется найти управление u в виде $u = u(x)$, принимающее значения в множестве Ω такое, что траектория системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \tag{1.2}$$

начинающаяся в произвольной точке x_0, оканчивается в заданной точке x_1 за минимальное время.

В этом случае управление $u(x)$ является оптимальным по быстродействию и удовлетворяет уравнению Беллмана [2]

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} f_i(x,u) = -1, \tag{1.3}$$

где $T(x)$ — время движения из произвольной точки x в фиксированную точку x_1 по траектории системы (1.2), отвечающей управлению $u(x)$. Обозначим через $\dot{T}(x)_{|(1.1)}$, $\dot{T}(x)_{|(1.2)}$ производные времени движения в силу систем (1.1), (1.2), соответственно. Тогда равенство (1.3) приобретает вид $\min\limits_{u \in \Omega} \dot{T}(x)_{|(1.1)} = \dot{T}(x)_{|(1.2)} = -1$ и означает, что производная в силу системы (1.2) времени быстродействия $T(x)$ из произвольной точки x в заданную точку x_1 равна -1. Естественно, это равенство выполняется в точках существования производных.

Отказываясь от оптимальности по быстродействию, будем рассматривать задачу допустимого синтеза позиционного управления, состоящую в построении управления $u = u(x)$, которое удовлетворяет заданному ограничению, т.е. $u \in \Omega$, и такого, что траектория системы (1.2), начинающаяся в произвольной точке x_0, оканчивается в заданной точке x_1 в некоторый *конечный* момент времени $T(x_0)$. Далее предполагается, что $x_1 = 0$ и $f(0,0) = 0$.

Для решения этой задачи В.И. Коробовым был предложен метод функции управляемости [3]. Этот метод основан на построении функции управляемости $\Theta(x)$ ($\Theta(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\Theta(0) = 0$) и управления $u(x) = \widetilde{u}(x, \Theta(x))$, таких, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-1/\alpha}(x) \tag{1.4}$$

для некоторых $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Выполнение этого неравенства обеспечивает попадание траектории в начало координат за конечное время. Функция $\Theta(x)$ предполагается непрерывно-дифференцируемой при $x \neq 0$. В случае неравенства (1.4) при $\alpha = \infty$ функция $\Theta(x)$ является функцией Ляпунова.

В работе [4] для линейной полностью управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ u \in \mathbb{R}^r, \tag{1.5}$$

где A и B — постоянные матрицы размерности $(n\times n)$ и $(n\times r)$, соответственно, предложен достаточно общий подход построения функции управляемости и управления, решающих задачу допустимого позиционного синтеза ограниченного управления. В частности, установлено, что функция $\varphi(s) = 1-s$ при $s \in [0,1]$, $\varphi(s) = 0$ при $s > 1$ порождает функцию управляемости $\Theta_\varphi(x)$, являющуюся временем движения из точки x в начало координат согласно системе (1.5) с управлением $u_\varphi(x)$.

Представляет интерес нахождение более широкого множества таких пар функций — функции управляемости $\Theta(x)$, являющейся временем движения, и управления $u(x)$, решающих эту задачу.

В первой части работы этот вопрос подробно рассмотрен для случая канонической системы. Вторая часть работы посвящена решению задачи позиционного синтеза управления для полностью управляемой линейной системы (1.5) с ограничениями вида $u \in \Omega = \{u : \|u\| \leq d\}$, $d > 0$. Поскольку функции управляемости $\Theta(x)$, на основе которых строятся управления $u(x) = \widetilde{u}(\Theta(x), x)$, являются временем движения из начальной точки x в начало координат, т.е. $T(x) = \Theta(x)$, то в этом случае производные функций управляемости в силу системы

$$\dot{x} = Ax + Bu(x) \tag{1.6}$$

равны -1, т.е. $\dot{\Theta}(x)_{|(1.6)} = -1$.

В настоящей работе подход к решению задачи базируется на подходе, предложенном в работе [3].

2. Предварительные результаты

Рассмотрим каноническую управляемую систему

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u, \tag{2.1}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

с ограничениями на управление $|u| \le d$. Выберем управление в виде функции фазовых координат $u = u(x)$ так, чтобы нулевое решение системы (2.1) при $u = u(x)$ было асимптотически устойчиво. Это управление назовем вспомогательным. Для этого вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ будем выбирать так, чтобы уравнение $\lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \dots - a_1 = 0$ имело корни с отрицательными вещественными частями, и положим $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x)$, где $a = (a_1, \dots, a_n)^*$. В этом случае система (2.1) принимает вид

$$\dot{x} = A_1 x, \tag{2.2}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и ее нулевое решение будет асимптотически устойчиво. Таким образом, вспомогательное управление решает задачу стабилизации для системы (2.1) во всем пространстве, но, вообще говоря, не удовлетворяет заданным ограничениям. В силу устойчивости матрицы A_1 найдем положительно определенную квадратичную форму $V(x) = (Fx, x)$ — функцию Ляпунова, производная которой в силу системы (2.2) будет наперед заданной отрицательно определенной квадратичной формой $(-Wx, x)$, матрицы F и W положительно определены. Так как

$$\frac{d}{dt}(Fx, x) = (F\dot{x}, x) + (Fx, \dot{x}) = ((FA_1 + A_1^* F)x, x),$$

то ее отыскание сводится к решению матричного уравнения Ляпунова

$$FA_1 + A_1^* F = -W,$$

которое при заданных матрицах A_1 и W имеет единственное решение.

Пусть F — некоторая положительно определенная матрица, вид которой уточним далее. Обозначим через $D(\Theta)$, H диагональные матрицы вида

$$D(\Theta) = \operatorname{diag}\left(\Theta^{-\frac{2i-1}{2}}\right)_{i=1}^{n}, \quad H = \operatorname{diag}\left(-\frac{2i-1}{2}\right)_{i=1}^{n}.$$

Пусть a_0 — пока некоторое положительное число, которое будет определено далее. Определим для каждого $x \ne 0$ функцию управляемости $\Theta(x)$ как решение уравнения

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x). \tag{2.3}$$

Положим $\Theta(0) = 0$. Последнее равенство и уравнение (2.3) определяют при всех x непрерывную и при $x \neq 0$ непрерывно-дифференцируемую функцию $\Theta(x)$.

Управление $u(x)$ будем искать в виде

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x) a^* D(\Theta(x)) x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x_k}{\Theta^k(x)}, \tag{2.4}$$

где матрицу F и вектор a будем выбирать таким образом, чтобы функция управляемости $\Theta(x)$ являлась временем движения из точки x в начало координат, т.е. производная $\dot{\Theta}(x)$ функции управляемости в силу системы (2.1) с управлением $u(x)$ вида (2.4) удовлетворяла равенству

$$\dot{\Theta}(x) = -1. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть функция управляемости $\Theta(x)$ удовлетворяет равенству (2.5). Тогда*

$$a_1 = -\frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Положим $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тогда функция управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ удовлетворяет равенству

$$2a_0 \Theta(x) = (Fy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)), \tag{2.7}$$

а управление (2.4) приобретает вид

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x) a^* y(\Theta(x), x). \tag{2.8}$$

На основании равенств

$$D(\Theta) A_0 D^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1} A_0, \quad D(\Theta) b_0 = \Theta^{-\frac{1}{2}} b_0$$

производная функции $y(\Theta(x), x)$ в силу системы (2.1) с этим управлением имеет вид

$$\dot{y}(\Theta(x), x) = \Theta^{-1}(x) \left(\dot{\Theta}(x) H + A_0 + b_0 a^*\right) y(\Theta(x), x).$$

Затем из равенства (2.7) получаем, что производная функции управляемости в силу системы (2.1) с управлением $u(x)$ вида (2.8) задается равенством

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{((F(A_0 + b_0 a^*) + (A_0 + b_0 a^*)^* F) y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}{((F - HF - FH) y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}.$$

Отсюда, в силу предположений леммы, получаем равенство

$$F\left(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H\right)+\left(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H\right)^*F=0, \qquad (2.9)$$

где I — единичная матрица. Из этого равенства заключаем, что матрица $F^{\frac{1}{2}}(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H)F^{-\frac{1}{2}}$ является кососимметрической, и поэтому корни ее характеристического уравнения

$$\det\left(F^{\frac{1}{2}}\left(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H\right)F^{-\frac{1}{2}}-\lambda I\right)$$

$$=(\det F^{-\frac{1}{2}})^2\det\left(F\left(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H\right)-\lambda F\right)=0,$$

а следовательно, и уравнения

$$\det\left(\left(A_0+b_0a^*+\frac{1}{2}I-H\right)-\lambda I\right)=0 \qquad (2.10)$$

имеют равные нулю вещественные части. Уравнение (2.10) запишем в виде

$$0=\det\begin{pmatrix}\lambda-1-a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n\\ -1 & \lambda-2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda-n\end{pmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-j)-\sum_{j=1}^{n-1}a_j\prod_{i=j+1}^{n}(\lambda-i)-a_n=\lambda^n-(a_1+n(n+1)/2)\,\lambda^{n-1}-\dots.$$

В силу того, что корни этого уравнения имеют равную нулю вещественную часть и комплексно сопряжены, то $a_1=-n(n+1)/2$.

Лемма 2.2. *Пусть $F=(f_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметрическая положительно определенная матрица.*

Тогда матрица

$$G(\xi)=\begin{pmatrix}\xi & f_{12} & \dots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn}\end{pmatrix}$$

положительно определена только при $\xi>\xi_0$, где $\det G(\xi_0)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\det G(\xi)$ — линейная относительно ξ функция, т.е. $G(\xi) = a\xi + b$, при этом в силу критерия Сильвестра $a > 0$. Поэтому, если $\det G(f_{11}) = af_{11} + b > 0$, то для любого $\xi \geq f_{11}$ имеем, что $\det G(\xi) > 0$. Кроме того, существует единственное ξ_0 такое, что $\det G(\xi_0) = a\xi_0 + b = 0$ и, очевидно, для любого $\xi > \xi_0$ имеем $\det G(\xi) > 0$.

Лемма 2.3. *i) $(s\times s)$-матрицы*

$$P_{s,k} = \left(\frac{1}{i+j+k-2}\right)_{i,j=1}^{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \cdots & \frac{1}{s+k-1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \cdots & \frac{1}{s+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{s+k-1} & \frac{1}{s+k} & \cdots & \frac{1}{2s+k-2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

являются положительно определенными.

ii) Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta_{s,k} = \det\left(\frac{1}{i+j+k-2} \cdot \frac{1}{i+j+k-1}\right)_{i,j=1}^{s} > 0.$$

iii) Определитель $(n\times n)$-матрицы P вида

$$P = \begin{pmatrix} 1-\frac{n(n+1)}{2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} \\ -1 & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

равен нулю, а ее ранг равен $(n-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Положительная определенность матрицы $P_{s,k}$ следует из положительной определенности матрицы Гильберта $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{s}$.

Непосредственное доказательство этого факта следует из интегрального представления

$$P_{s,k} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \cdots \\ t^{s-1} \end{pmatrix} (1, t, \dots, t^{s-1}) d\frac{t^k}{k}.$$

Тогда матрица $P_{s,k}$ положительно определена [5].

ii) Представим определитель $\Delta_{s,k}$ в виде

$$\Delta_{s,k} = \det\left(\frac{1}{i+j+k-2} - \frac{1}{i+j+k-1}\right)_{i,j=1}^{s}.$$

Добавим к i-й строке ($i \geq 1$) все последующие строки, т.е. строки с номерами $i{+}1, \dots, s$, и вынесем из каждой i-й строки ($i = 1, \dots, s$) полученного определителя величину $(s{-}i{+}1)$, а из каждого j-го столбца величину $1/(s{+}j{+}k{-}1)$ $j = 1, \dots, s$. Получаем

$$\Delta_{s,k} = \frac{s!}{(s+k)\dots(2s+k-1)} \det P_{s,k}.$$

Отсюда в силу пункта i) следует, что $\Delta_{s,k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) Запишем определитель матрицы P в виде

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ -1 & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Преобразуем этот определитель двумя способами. Вначале добавим к каждому j-му столбцу ($j \geq 2$) этого определителя все последующие, т.е. столбцы с номерами $j{+}1, \dots, n$. Имеем

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n-1}{2(n+1)} & \dots & \frac{2}{(n-1)(n+1)} & \frac{1}{n(n+1)} \\ -1 & \frac{n-1}{3(n+2)} & \dots & \frac{2}{n(n+2)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{n-1}{(n+1)2n} & \dots & \frac{2}{(2n-2)2n} & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n+1)\dots 2n} \begin{vmatrix} (n+1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right) & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\ -(n+2) & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

С другой стороны, добавляя к каждой i-й строке ($i \geq 1$) определителя (2.12) последующие строки, т.е. с номерами от $i+1$ до n включительно, получаем

$$\det P = \begin{vmatrix} -\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n}{2(n+2)} & \dots & \frac{n}{(n-1)2n} & \frac{n}{n(2n)} \\ -1 & \frac{n-1}{3(n+2)} & \dots & \frac{n-1}{n(2n)} & \frac{n-1}{(n+1)2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \dots & \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n!}{(n+2)\dots 2n} \begin{vmatrix} -\frac{n+1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Обозначим дополнительные миноры элементов с номерами (1,1), (1,2) входящих в правую часть равенств (2.13) и (2.14), через B_1 и B_2, соответственно. Тогда

$$\det P = \left(\left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right) B_1 + \frac{n+2}{n+1} B_2\right) \frac{(n-1)!}{(n+1)\cdots 2n},$$

$$\det P = \left(-\frac{n(n+1)}{2} B_1 + \frac{n}{n-1} B_2\right) \frac{(n-1)!}{(n+1)\cdots 2n},$$

откуда получаем

$$B_1 = \frac{2}{n^2-1} B_2, \quad \det P = 0.$$

А так как $B_1 \neq 0$, то $\mathrm{rang} P = n{-}1$.

Лемма доказана.

Определим матрицу F, входящую в уравнение (2.3), и вектор a, входящий в управление вида (2.4). Из равенства (2.9) имеем

$$\left(A_0 + b_0 a^* + \frac{1}{2} I - H\right) F^{-1} + F^{-1} \left(A_0 + b_0 a^* + \frac{1}{2} I - H\right)^* = 0. \qquad (2.15)$$

Обозначим $D_n = \mathrm{diag}\left((-1)^{i-1}/(i-1)!\right)_{i=1}^{n}$. Потребуем, чтобы матрица F^{-1} имела представление $F^{-1} = D_n C D_n$, в котором матрица C была бы ганкелевой матрицей — $C = (c_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$. Найдем матрицу C. Для этого равенство (2.15) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{1}{2} I - H + D_n^{-1} A_0 D_n + D_n^{-1} b_0 a^* D_n\right) C$$

$$+ C \left(\frac{1}{2} I - H + D_n^{-1} A D_n + D_n^{-1} b_0 a^* D_n\right)^* = 0. \qquad (2.16)$$

Обозначим матрицу, стоящую в левой части равенства (2.16), через $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и представим ее в виде

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

где $Q_{11} = q_{11}$, $Q_{12} = (q_{12}, \ldots, q_{1n})$, $Q_{21} = Q_{12}^*$, $Q_{22} = (q_{ij})_{i,j=2}^{n}$. Таким образом, элементы матрицы Q задаются следующими равенствами:

$$\begin{cases} q_{11} = 2(1 + \widetilde{a}_1) c_0 + 2 \sum\limits_{j=1}^{n-1} \widetilde{a}_{j+1} c_j, \\ q_{1i} = -(i-1) c_{i-2} + (1 + \widetilde{a}_1 + i) c_{i-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \widetilde{a}_{j+1} c_{i+j-1}, \ i = 2, \ldots, n, \\ q_{ij} = -(i+j-2) c_{i+j-3} + (i+j) c_{i+j-2}, \ i = 2, \ldots, n, \ j = 2, \ldots, n, \end{cases} \qquad (2.17)$$

где $\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_n$ — компоненты вектора $\widetilde{a} = D_n a$. Поскольку Q — нулевая матрица, то из равенств $Q_{22} = 0$ получаем

$$c_j = \frac{(2n-1)2n}{(j+1)(j+2)} c_{2n-2}, \quad j = 1, \dots, 2n-3,$$

и равенства (2.17) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+\widetilde{a}_1)c_0}{2n(2n-1)c_{2n-2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{j+1}}{(j+1)(j+2)} = 0,\\
&-\frac{c_0}{2n(2n-1)c_{2n-2}} + \frac{3+\widetilde{a}_1}{2\cdot 3} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{j+1}}{(j+2)(j+3)} = 0,\\
&-\frac{1}{3} + \frac{4+a_1}{3\cdot 4} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{j+1}}{(j+3)(j+4)} = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&-\frac{1}{n} + \frac{n+1+\widetilde{a}_1}{n(n+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{j+1}}{(j+n)(j+n+1)} = 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\widetilde{a}_1 = a_1$ определено равенством (2.6). Рассмотрим равенства (2.18) как линейную систему уравнений относительно неизвестных $c_0/((2n-1)2nc_{2n-2})$, $\widetilde{a}_2, \dots, \widetilde{a}_n$, которая в векторной форме записи имеет вид

$$Py = y_0, \tag{2.19}$$

где P — $(n\times n)$-матрица, определяемая равенством (2.11), а y, y_0 — векторы вида

$$\begin{aligned}
y&=\left(\frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}}, \widetilde{a}_2, \dots, \widetilde{a}_n\right)^*,\\
y_0&=\left(0, -\frac{3+a_1}{2\cdot 3}, -\frac{a_1}{3\cdot 4} \dots, -\frac{a_1}{n(n+1)}\right)^*.
\end{aligned}$$

Эта система является совместной, поскольку матрица $C = \left(\frac{1}{(i+j-1)(i+j)}\right)_{i,j=1}^n$ и вектор $a^* = -\frac{1}{2} b_0^* D_n^{-1} C^{-1} D_n^{-1}$ удовлетворяют равенству (2.16). Действительно, равенство (2.16) при таком выборе вектора a принимает вид

$$\left(\frac{1}{2}I - H + D_n^{-1} A_0 D_n\right) C + C \left(\frac{1}{2}I - H + D_n^{-1} A_0 D_n\right)^* = b_0 b_0^*,$$

в справедливости которого убеждаемся подстановкой данной матрицы C.

Таким образом, $\mathrm{rang} P = \mathrm{rang}(P, y_0)$ и в силу пункта iii) леммы 2.3 $\mathrm{rang} P = n-1$.

Найдем все решения системы (2.19). Рассмотрим $\widetilde{P}$ — $((n-1)\times(n-1))$-матрицу вида

$$\widetilde{P}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} \\ 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \dots & \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица, в силу условия ii) леммы 2.3 при $k=4$ и $s=n-2$, является невырожденной. Обозначим через $\widetilde{y}_0=a_n d'+d''$, где

$$d'=\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)},\ -\frac{1}{(n+2)(n+3)},\ \dots,\ -\frac{1}{(2n-1)2n}\right)^*,$$

$$d''=\left(-\frac{3+a_1}{2\cdot 3},\ -\frac{a_1}{3\cdot 4},\ \dots,\ -\frac{a_1}{n(n+1)}\right)^*,$$

а через $\widetilde{y}$ — $(n-1)$-мерный вектор вида

$$\widetilde{y}=\left(\frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}},\ \widetilde{a}_2,\dots,\ \widetilde{a}_{n-1}\right)^*,$$

и рассмотрим относительно $\widetilde{y}$ систему уравнений $\widetilde{P}\widetilde{y}=\widetilde{y}_0$. Эта система имеет единственное решение $\widetilde{y}=\widetilde{P}^{-1}\widetilde{y}_0$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{(2n-1)2n\,c_{2n-2}}&=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1'\widetilde{a}_n+\Delta_1''\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n+\Delta_1''\right),\\ \widetilde{a}_j&=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_j'\widetilde{a}_n+\Delta_j''\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_j'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n+\Delta_j''\right),\quad i=2,\dots,n-1, \end{aligned}\tag{2.20}$$

где $\Delta=\det\,\widetilde{P}$, а Δ_j', Δ_j'' $(j=1,\dots,n-1)$ являются определителями матрицы, полученной из матрицы $\widetilde{P}$, в которой вместо ее j-столбца стоят соответственно столбцы d', d''. В силу условия rang $P=$ rang $(P,\ y_0)=n-1$ соотношения (2.20) описывают все решения системы (2.19).

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.4. *Матрица*

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n+\Delta_1''\right) & \frac{1}{2\cdot 3} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \dots & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{pmatrix}(2n-1)2n\,c_{2n-2}\tag{2.21}$$

и вектор

$$a = \left(-\frac{n(n+1)}{2},\ -\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_2'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n + \Delta_2''\right), \dots,\right.$$
$$\left.\dots, (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{n-1}'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n + \Delta_{n-1}''\right),\ a_n\right)^* \tag{2.22}$$

дают все решения уравнения (2.16), причем при

$$c_{2n-2} > 0, \quad \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1'\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_n + \Delta_1''\right) > \xi_0, \tag{2.23}$$

где ξ_0 является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \frac{1}{2\cdot3} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{2\cdot3} & \frac{1}{3\cdot4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.24}$$

матрица C будет положительно определенной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_{2n-2} > 0$, и рассмотрим матрицу

$$\widetilde{C}(z) = \begin{pmatrix} z & \frac{1}{2\cdot3} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{2\cdot3} & \frac{1}{3\cdot4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \end{pmatrix} (2n-1)2n\, c_{2n-2}.$$

Эта матрица является положительно определенной при $z = 1/2$, поскольку в силу п. ii) леммы 2.3 ее главные миноры Δ_{s1}, $s = 1, \dots, n$, — положительны, т.е. выполнен критерий Сильвестра. А в силу леммы 2.2 матрица $\widetilde{C}(z)$ положительно определена для $z > \xi_0$, где ξ_0 является корнем уравнения $\det\ \widetilde{C}(\xi_0) = 0$. Отсюда следует, что при значениях параметров c_{2n-2} и a_n, удовлетворяющих условию (2.23), матрица C положительно определена.

З а м е ч а н и е 2.1. Заметим, что уравнение (2.24) преобразуется к виду

$$\begin{vmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)\xi_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.25}$$

Для установления этого факта к каждой i-й строке прибавляются все последующие строки, а затем из строк и столбцов полученного определителя выносятся одинаковые множители. Для случаев $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ корень ξ_0 равен соответственно 1/3, 5/12, 9/20, 7/15, 10/21, 27/56.

Лемма 2.5. *Матрица* $C^1 = C - CH - HC$ *вида*

$$C^1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta}\left(\Delta_1' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_n + \Delta_1''\right) & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} (2n-1)2n\, c_{2n-2} \quad (2.26)$$

является положительно определенной при

$$c_{2n-2} > 0, \quad \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_n + \Delta_1''\right) > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)\xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n},$$

где ξ_0 *— корень уравнения (2.25).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании п. i) леммы 2.3 при $s = n$ и $k = 1$ матрица C^1 является положительно определенной, если параметр a_n удовлетворяет условию

$$\frac{2}{\Delta}\left(\Delta_1' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_n + \Delta_1''\right) = 1.$$

В силу леммы 2.2 при $c_{2n-2} > 0$ матрица

$$\widetilde{C}^1(z) = \begin{pmatrix} z & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} (2n-1)2n\, c_{2n-2} \quad (2.27)$$

положительно определена для всех

$$z > \xi, \quad (2.28)$$

где ξ — корень уравнения $\det\ \widetilde{C}^1(\xi) = 0$. На основании равенства (2.25) имеем

$$0 = \det\ \widetilde{C}^1(\xi) = \det\ \widetilde{C}^1\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right),$$

и, следовательно,

$$\xi = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \quad (2.29)$$

Сравнивая (2.26) и (2.27), на основании (2.29) из условия (2.28) получаем утверждение леммы.

3. Синтез ограниченных управлений для канонической системы

Решение задачи синтеза ограниченного управления для канонической системы (2.1) в случае, когда функция управляемости является временем движения, дает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$c_{2n-2} > 0, \ \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_n + \Delta_1''\right) > \max\left\{\xi_0, \ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right\}, \quad (3.1)$$

где ξ_0 – корень уравнения (2.25). Пусть матрица C и вектор a определены равенствами (2.21), (2.22), соответственно, число a_0 удовлетворяет условию

$$0 < a_0 \le \frac{d^2}{2(F^{-1}a, a)}; \quad F^{-1} = D_n C D_n, \quad (3.2)$$

а функция управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ определена уравнением (2.3), где матрица $F = D_n^{-1} C^{-1} D_n^{-1}$, и $\Theta(0) = 0$.

Тогда управление $u(x)$ вида (2.4) переводит произвольную начальную точку $x \in \mathbb{R}^n$ в начало координат по траектории системы $\dot{x} = A_0 x + b_0 u(x)$ за время $T(x) = \Theta(x)$ и удовлетворяет ограничению $|u(x)| \le d$.

Доказательство. На основании леммы 2.4 в силу условий (3.1) матрица $F^{-1} = D_n C D_n$, а следовательно, и матрица F положительно определены. При положительно определенной матрице $(F - FH - HF)$ уравнение (2.3) при $x \neq 0$ имеет [3] единственное непрерывно-дифференцируемое решение $\Theta(x)$.

Установим, при каких значениях параметров a_n и c_{2n-2} матрица $(F - FH - HF)$ будет положительно определена. Положительная определенность этой матрицы следует из положительной определенности матрицы $(F^{-1} - HF^{-1} - F^{-1}H)$. Так как матрица $F^{-1} = D_n C D_n$, а матрицы D_n и H — перестановочны, то справедливо равенство

$$F^{-1} - HF^{-1} - F^{-1}H = D_n(C - HC - CH)D_n.$$

На основании леммы 2.5 в силу условия (3.1) матрица $(C - HC - CH)$ положительно определена, поэтому матрица $(F - FH - HF)$ также положительно определена.

Таким образом, при выполнении условий (3.1) уравнение (2.3) при $x \neq 0$ имеет единственное непрерывно-дифференцируемое решение $\Theta(x)$. Положив $\Theta(0) = 0$, получаем, что функция $\Theta(x)$ является непрерывной для всех x.

Установим теперь ограниченность управления. Найдем оценку для выражения $a^*y(\Theta,x)\Theta^{-\frac{1}{2}}$. Для этого при фиксированном Θ решим задачу нахождения экстремума функции $a^*y(\Theta,x)\Theta^{-\frac{1}{2}}$ при ограничениях вида

$$(Fy(\Theta,x),y(\Theta,x))-2a_0\Theta=0. \tag{3.3}$$

Задачу решаем с помощью множителей Лагранжа. Здесь функция Лагранжа имеет вид

$$a^*y(\Theta,x)\Theta^{-\frac{1}{2}}-\lambda(Fy(\Theta,x),y(\Theta,x))+2\lambda a_0\Theta.$$

Пусть y_0 — точка экстремума. Необходимые условия экстремума дают $a\Theta^{-\frac{1}{2}}-2\lambda Fy_0=0$, откуда имеем $y_0=1/(2\lambda)\Theta^{-\frac{1}{2}}F^{-1}a$. Подставляя y_0 в ограничение (3.3), получаем $1/(2\lambda)=\pm\sqrt{2a_0/(F^{-1}a,a)}\ \Theta$. Следовательно, имеем $(a,y_0)\Theta^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2a_0(F^{-1}a,a)}$. Тогда, используя вид управления $u(x)$, получаем

$$|u(x)|\le\sqrt{2a_0(F^{-1}a,a)}. \tag{3.4}$$

При выборе числа a_0 из условия (3.2) из неравенства (3.4) следует, что управление $u(x)$ удовлетворяет заданным ограничениям во всем пространстве.

Таким образом, по теореме 1 [3] управление $u(x)$ решает задачу синтеза ограниченного управления во всем пространстве и время движения из произвольной точки x в нуль равно значению функции управляемости в точке x, т.е. $T(x)=\Theta(x)$.

П р и м е р. Рассмотрим решение задачи допустимого синтеза для управляемой системы

$$\dot{x}_1=u,\quad \dot{x}_2=x_1,\quad \dot{x}_3=x_2 \tag{3.5}$$

с ограничениями на управление вида $|u|\le 1$.

Поскольку $\Delta=-1/20$, $\Delta_1'=1/3600$, $\Delta_1''=-1/60$, то вектор a из (2.22), матрица C из (2.21) и матрица D_3 имеют вид

$$a=\begin{pmatrix}-6\\ \frac{a_3}{3}-10\\ a_3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}10-\frac{a_3}{12} & 5 & \frac{5}{2}\\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}c_4,\quad D_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $F^{-1}=D_3CD_3$ и обратная к ней имеют вид

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}10-\frac{a_3}{12} & -5 & \frac{5}{4}\\ -5 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}\\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}c_4,$$

$$F=-\frac{c_4}{30+a_3}\begin{pmatrix}12 & 60 & 120\\ 60 & 180-4a_3 & 240-12a_3\\ 120 & 240-12a_3 & -40a_3\end{pmatrix}.$$

Из уравнения (2.24) получаем, что $\xi_0 = 5/12$. Условие (3.1) принимает вид

$$c_4 > 0, \quad \frac{1}{3} - \frac{a_3}{360} > \frac{4}{9},$$

согласно которому положим $c_4 = 1$, $a_3 = -45$. Тогда

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ -25 \\ -45 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 55 & -20 & 5 \\ -20 & 10 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = 4\begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 13 \\ 2 & 13 & 30 \end{pmatrix}.$$

Выберем число a_0 в уравнении (2.3) из условия (3.2), которое в нашем случае принимает вид $0 < a_0 \le 2/205$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \ne 0$ как положительное решение уравнения (2.3) (оно единственное). Это уравнение в данном случае имеет вид

$$\Theta^6 = 41\Theta^4 x_1^2 + 410\Theta^3 x_1 x_2 + 820\Theta^2 x_1 x_3 + 1230\Theta^2 x_2^2 + 5330\Theta x_2 x_3 + 6150 x_3^2. \quad (3.6)$$

Управление $u(x)$ вида (2.4), которое решает задачу глобального синтеза для системы (3.5) и удовлетворяет ограничениям $|u(x)| \le 1$, задается формулой

$$u(x) = -\frac{6}{\Theta(x)}x_1 - \frac{25}{\Theta^2(x)}x_2 - \frac{45}{\Theta^3(x)}x_3. \quad (3.7)$$

Найдем траекторию системы (3.5), отвечающую управлению $u = u(x)$ вида (3.7) и начинающуюся в точке $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$. Эта траектория является решением системы

$$\dot{x}_1 = -\frac{6}{\Theta(x)}x_1 - \frac{25}{\Theta^2(x)}x_2 - \frac{45}{\Theta^3(x)}x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2.$$

Поскольку $\Theta(x)$ является временем движения из точки x в нуль, т.е. выполнено равенство $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$, то $\Theta(x(t)) = \Theta_0 - t$, где Θ_0 — положительный корень уравнения (3.6) при $x = x_0$. Следовательно, искомая траектория является решением задачи Коши вида

$$\dot{x}_1 = -\frac{6}{\Theta_0 - t}x_1 - \frac{25}{(\Theta_0 - t)^2}x_2 - \frac{45}{(\Theta_0 - t)^3}x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2,$$
$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0.$$

Эта система сводится к дифференциальному уравнению вида

$$(\Theta_0 - t)^3 x_3^{(3)} + 6(\Theta_0 - t)^2 \ddot{x}_3 + 25(\Theta_0 - t)\dot{x}_3 + 45 x_3 = 0,$$

с начальными условиями $x_3(0) = x_3^0$, $\dot{x}_3(0) = x_2^0$, $\ddot{x}_3(0) = x_1^0$. Заменой $t = \Theta_0 - e^{\tau}$ это дифференциальное уравнение типа Эйлера сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно функции $y(\tau) = x_3(\Theta_0 - e^\tau)$, которое имеет вид $y''' - 9y'' + 33y' - 45y = 0$. Отсюда имеем

$$y(\tau) = e^{3\tau}\left(c_1 + c_2 \cos\sqrt{6}\ \tau + c_3 \sin\sqrt{6}\ \tau\right),$$

где постоянные c_1, c_2, c_3 находятся из начальных условий

$$y(\tau_0) = x_3^0, \quad y'(\tau_0) = -\Theta_0 x_2^0, \quad y''(\tau_0) - y'(\tau_0) = \Theta_0^2 x_1^0, \quad \tau_0 = \ln\Theta_0,$$

и равны

$$c_1 = \frac{1}{6\Theta_0}\left(\frac{15}{\Theta_0^2}x_3^0 + \frac{5}{\Theta_0}x_2^0 + x_1^0\right),$$
$$c_2 = \xi_1 \cos\left(\sqrt{6}\ln\Theta_0\right) - \xi_2 \sin\left(\sqrt{6}\ln\Theta_0\right),$$
$$c_3 = \xi_1 \sin\left(\sqrt{6}\ln\Theta_0\right) + \xi_2 \cos\left(\sqrt{6}\ln\Theta_0\right).$$

Здесь

$$\xi_1 = -\frac{1}{6\Theta_0}\left(\frac{9}{\Theta_0^2}\ x_3^0 + \frac{5}{\Theta_0}\ x_2^0 + x_1^0\right), \quad \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}\ \Theta_0^2}\left(\frac{3}{\Theta_0}\ x_3^0 + x_2^0\right).$$

Так как $x_3(t) = y(\ln(\Theta_0 - t))$, а функции $x_2(t)$ и $x_1(t)$ находятся дифференцированием функции $x_3(t)$, то

$$x(t) = \begin{pmatrix} (\Theta_0 - t)\left(6c_1 + 5\sqrt{6}\ \xi_2 \cos\alpha(t) - 5\sqrt{6}\ \xi_1 \sin\alpha(t)\right) \\ (\Theta_0 - t)^2\left(-3c_1 - \left(3\xi_1 + \sqrt{6}\ \xi_2\right)\cos\alpha(t) + \left(-3\xi_2 + \sqrt{6}\ \xi_1\right)\sin\alpha(t)\right) \\ (\Theta_0 - t)^3\left(c_1 + \xi_1\cos\alpha(t) + \xi_2 \sin\alpha(t)\right) \end{pmatrix},$$

где $\alpha(t) = \sqrt{6}\ \ln(1 - t/\Theta_0)$. Очевидно, что $x(t) \to 0$ при $t \to \Theta_0$.

Управление $u(x)$ на траектории $x(t)$ имеет вид

$$u(x(t)) = -6c_1 + 5(6\xi_1 - \sqrt{6}\ \xi_2)\cos\alpha(t) + 5(\sqrt{6}\ \xi_1 + 6\xi_2)\sin\alpha(t).$$

Для простоты вычислений и наглядности результатов решим задачу попадания из точек кривой $x_1 > 0$, $x_2 = -41x_1^2/121$, $x_3 = 0$ в начало координат. В этом случае, как следует из уравнения (3.6), время движения Θ_0 из точки $x_0 = (x_1^0, -41(x_1^0)^2/121, 0)^*$ равно $41x_1^0/11$. Траектория, начинающаяся в этой точке, имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{41x_1^0 - 11t}{451}\left(6 + 5\cos\alpha(t) + 5\sqrt{6}\ \sin\alpha(t)\right) \\ \dfrac{\left(41x_1^0 - 11t\right)^2}{9922}\left(-6 + 4\cos\alpha(t) - 3\sqrt{6}\ \sin\alpha(t)\right) \\ \dfrac{\left(41x_1^0 - 11t\right)^3}{327426}\left(6 - 6\cos\alpha(t) + \sqrt{6}\ \sin\alpha(t)\right) \end{pmatrix},$$

где $\alpha(t) = \sqrt{6}\,\ln(1-11t/(41x_1^0))$. На этой траектории управление определяется формулой

$$u(t) = -\frac{1}{41}\,(6 + 35\cos\alpha(t))$$

и, как легко видеть, удовлетворяет заданному ограничению.

Список литературы

[1] *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко*, Математическая теория оптимальных процессов. Наука, Москва (1961).

[2] *Р. Беллман*, Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., Москва (1960).

[3] *В.И. Коробов*, Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости. — *Мат. сб.* (1979), № 109 (151), вып. 4, с. 582–606.

[4] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума. — *Диф. ур.* (1990), т. 26, № 11, с. 1194–1924.

[5] *М.Г. Крейн, А.А. Нудельман*, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Наука, Москва (1973).

The controllability function as the time of motion. I

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, and V.A. Skoryk

The problem of the admissible synthesis of feedback controls for the canonical system with geometric constraints on the control is considered. The investigation is carried out on the basic of the method of the controllability function. The constructed controllability functions are the time of motion from an arbitrary starting point to the zero and the controls solve the problem.