Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 3, с. 274–281

Изопериметрикс многогранника в геометрии Минковского

Р.М. Дидковский

Черкасский государственный технологический университет
бульв. Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина
E-mail:didkow@chiti.uch.net

Статья поступила в редакцию 2 января 2004 г.
Представлена Ю.А. Аминовым

Работа посвящена изучению свойств изопериметрикса в трехмерном пространстве Минковского в случае, если его нормирующее тело задано в виде многогранника. Показано, что при таких условиях изопериметрикс не является многогранником, а второй изопериметрикс не гомотетичен исходному многограннику.

Робота присвячена вивченню властивостей ізопериметрикса в тривимірному просторі Мінковського у випадку, якщо його нормуюче тіло задане у вигляді многогранника. Показано, що за таких умов ізопериметрикс не є многогранником, а другий ізопериметрикс негомотетичний вихідному многограннику.

Пусть B — собственное выпуклое центрально-симметричное компактное тело в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, точка o — центр симметрии тела B. Если точка пространства обозначена a, то ее радиус-вектор, выпущенный из точки o, будем обозначать $\overline{a}$.

Пусть $\overline{x}$ ($\overline{x} \neq \overline{o}$) — вектор в $\mathbb{R}^n$, а точка $k \in \partial B$ такая, что соответствующий вектор $\overline{k}$ сонаправлен $\overline{x}$. Г. Минковский [1] ввел в рассмотрение дистанционную функцию $F(\overline{x})$, определив ее с помощью равенства

$$F(\overline{x}) = \|\overline{x}\| := |\overline{x}|/|\overline{k}|$$

при $\overline{x} \neq \overline{o}$, $F(\overline{o}) := 0$, в котором $|\overline{x}|$, $|\overline{k}|$ — длины векторов $\overline{x}$ и $\overline{k}$ в $\mathbb{R}^n$. Дистанционная функция обладает следующими свойствами:

1) $\|\overline{x}\| > 0$ при $\overline{x} \neq \overline{o}$, $\|\overline{o}\| = 0$,

2) $\|-\overline{x}\| = \|\overline{x}\|$,

3) $\|\lambda\overline{x}\| = \lambda\|\overline{x}\|$ при $\lambda > 0$,

---

Mathematics Subject Classification 2000: 52A43, 52A44.

4) $\|\overline{x}+\overline{y}\| \le \|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|$.

Следуя Г. Минковскому [2], введем в $\mathbb{R}^n$ с помощью пары (B,o) новую метрику — метрику Минковского, положив

$$\rho_B(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{y}-\overline{x}\|,$$

где $\rho_B(\overline{x},\overline{y})$ — новое расстояние между точками $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Расстояние $\rho_B(\overline{x},\overline{y})$ обладает всеми свойствами метрики.

Пусть теперь B — собственное выпуклое центрально-симметричное компактное тело в n-мерном афинном пространстве $\mathbb{A}^n$, $n \ge 1$, точка o — центр симметрии тела B. Введем в $\mathbb{A}^n$ систему координат, выбрав o за ее начало. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ присоединенное к $\mathbb{A}^n$ евклидово пространство, т.е. пространство, которое получается из $\mathbb{A}^n$ введением в нем скалярного произведения с помощью некоторой положительно определенной симметричной билинейной формы. С помошью пары (B,o) введем в $\mathbb{R}^n$, а следовательно, и в $\mathbb{A}^n$ метрику Минковского ρ_B. Эта метрика не зависит от выбора вспомогательной евклидовой метрики $\mathbb{R}^n$ и полностью определяется заданием пары (B,o) в $\mathbb{A}^n$.

Аффинное пространство $\mathbb{A}^n$, в котором с помощью пары (B,o) введена метрика Минковского ρ_B, назовем n-мерным пространством Минковского $\mathbb{M}^n$, а тело B — нормирующим телом $\mathbb{M}^n$.

Пусть $V_n(B)$ — объем тела B в $\mathbb{R}^n$, $v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Для определения изопериметрикса евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ нормируем так, что

$$V_n(B) = v_n, \tag{0.1}$$

и дальнейшие выкладки будем производить именно в этом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть Ω — единичная сфера $\mathbb{R}^n$ с центром в точке o. Обозначим $T_o(\overline{u})$, $u \in \Omega$, гиперплоскость, ортогональную вектору $\overline{u}$ и проходящую через o. Определим на Ω функцию

$$r(\overline{u}) = \frac{v_{n-1}}{V_{n-1}(B \cap T_o(\overline{u}))}.$$

Обозначим через $\overline{T(\overline{u})}$ замкнутое полупространство, которое содержит o и ограничено гиперплоскостью $T(\overline{u})$, ортогональной $\overline{u}$ и отстоящей от o в направлении $\overline{u}$ на расстоянии $r(\overline{u})$, т.е.

$$\overline{T(\overline{u})} = \{\overline{x} \in \mathbb{M}^n \,|< \overline{x},\overline{u} > \le r(\overline{u})\}.$$

Центрально-симметричное относительно o компактное выпуклое тело

$$I := \bigcap_{u\in\Omega} \overline{T(\overline{u})}$$

называется изопериметриксом пространства $\mathbb{M}^n$ [3].

В [3] показано, что изопериметрикс I пространства $\mathbb{M}^n$ зависит только от нормирующего тела B и не зависит от выбора присоединенного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а опорная функция $H_I(x)$ изопериметрикса I имеет вид

$$H_I(\overline{x}) = r(\overline{x}) \cdot < \overline{x}, \overline{x} >^{1/2} .$$

Тут $\overline{x}$ — произвольный вектор ($\overline{x} \neq \overline{o}$), $H(\overline{o}) = 0$ по определению.

Для $u \in \Omega$ имеем, что опорное число $h_I(\overline{u})$ изопериметрикса I

$$h_I(\overline{u}) = r(\overline{u}).$$

Поскольку нас будет интересовать нахождение изопериметрикса с точностью до гомотетии, то в дальнейшем нормировку $\mathbb{R}^n$ согласно условию (0.1) производить не будем, $h_I(\overline{u})$ будем находить с точностью до постоянного множителя и для упрощения выкладок вместо “тело гомотетичное изопериметриксу”, будем писать “изопериметрикс”.

Справедливо **утверждение**. Если B — нормирующая фигура $\mathbb{M}^2$ — многоугольник в $\mathbb{M}^2$, тогда изопериметрикс I также является многоугольником в $\mathbb{M}^2$. Действительно, изопериметрикс $\mathbb{M}^2$ является полярной фигурой для B, повернутой на угол $\pi/2$ [4]. А если B — многогранник в $\mathbb{M}^n$, то, как показано в [3], полярное тело для B также является многогранником. Отсюда и следует утверждение.

В случае $\mathbb{M}^n$, $n \geq 3$ изопериметрикс не является полярным телом для B. Поэтому представляет интерес вопрос: является ли изопериметрикс многогранника в $\mathbb{M}^n$ многогранником?

Пусть B — нормирующее тело, а I — изопериметрикс $\mathbb{M}^n$. На I можно смотреть как на нормирующее тело $\widetilde{B}$ нового пространства $\widetilde{\mathbb{M}}^n$. Нетрудно показать, что если B — многоугольник в $\mathbb{M}^2$, то изопериметрикс $\widetilde{I}$ пространства $\widetilde{\mathbb{M}}^2$ гомотетичен B. Пусть теперь $\widetilde{I}$ — изопериметрикс $\widetilde{\mathbb{M}}^n$, $n \geq 3$. Представляет интерес вопрос о гомотетичности тел B и $\widetilde{I}$.

В настоящей работе будут доказаны утверждения:

1. *Если B — куб в $\mathbb{M}^3$, то I не является многогранником в M^3.*
2. *Если B — куб в $\mathbb{M}^3$, то $\widetilde{I}$ не гомотетичен B.*
3. *Если B — куб в $\mathbb{M}^3$, то поверхность I содержит плоские грани.*

Доказательство утверждения 1. Пусть $\overline{w}$ ($|\overline{w}| = 1$) — некоторый фиксированный вектор $\mathbb{R}^3$; U_w — множество единичных векторов, ортогональных $\overline{w}$; C — собственное выпуклое центрально-симметричное компактное тело в $\mathbb{R}^3$ с центром o; $h_c(\overline{u})$ ($u \in \Omega$) — опорное число тела C; $T_C(\overline{u})$ — опорная плоскость и $\overline{T_C(\overline{u})}$ — опорное полупространство тела C.

Обозначим $C_w = C \cap T_o(\overline{w})$ и

$$C_w^* = \bigcap_{\overline{u} \in U_w} \overline{T_C(\overline{u})}.$$

Тогда, если $T_o(\overline{w})$ — плоскость симметрии тела C, то имеет место равенство

$$C_w^* \cap T_o(\overline{w}) = C \cap T_o(\overline{w}) = C_w.$$

Заметим также, что плоскость симметрии нормирующего тела B есть одновременно плоскостью симметрии изопериметрикса I. Таким образом, если $T_o(\overline{w})$ — плоскость симметрии B, то исследуя плоскую фигуру, определяемую в $T_o(\overline{w})$ опорным числом изопериметрикса, мы тем самым исследуем сечение изопериметрикса.

Рассмотрим в качестве шара B пространства $\mathbb{M}^3$ многогранник, который в некотором присоединенном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ является кубом $a_1a_2a_3a_4a_1'a_2'a_3'a_4'$ с ребром 1 (рис. 1).

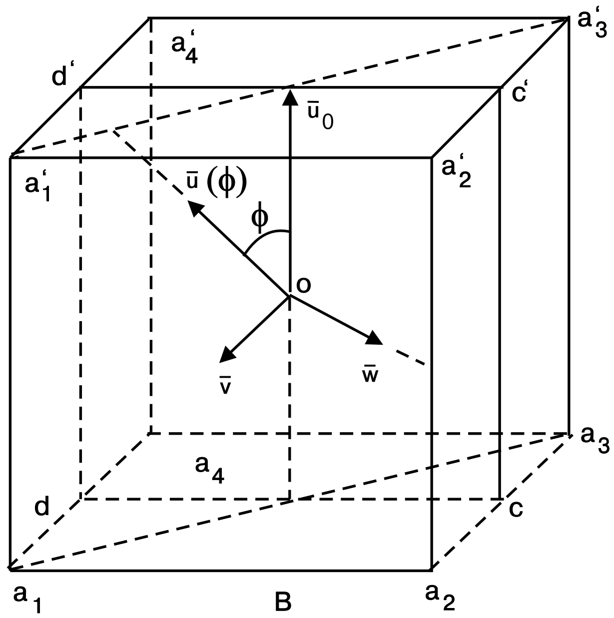


Рис. 1

Пусть $\overline{w} \perp a_1a_3a_3'a_1'$. Положение векторов $\overline{u} \in U_w$ будем определять по углу φ между $\overline{u}$ и вектором $\overline{u}_0$, который зададим как внешнюю нормаль грани $a_1'a_2'a_3'a_4'$: $\overline{u} = \overline{u}(\varphi)$. Обозначим $S_B(\overline{u})$ площадь сечения $B \cap T_o(\overline{u})$. Тогда функции $S_B(\overline{u}) = S_B(\varphi)$ и $h(\overline{u}) = h(\varphi)$ являются функциями угла φ, причем в силу симметрии B достаточно рассматривать углы $\varphi \in [0; \pi/2]$.

Получим

$$S_B(\varphi) = \begin{cases} 1/\cos\varphi, \ 0 \le \varphi \le \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}, \ \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2} < \varphi \le \pi/2, \end{cases}$$

следовательно,

$$h_I(\varphi) = \begin{cases} \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}, \\ \frac{2\sin^2\varphi}{2\sqrt{2}\sin\varphi - \cos\varphi},\ \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2} < \varphi \le \pi/2. \end{cases} \tag{0.2}$$

Пусть $\gamma \in (\operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}; \pi/2)$ — некоторый фиксированный угол. Построим опорную прямую, соответствующую (0.2), перпендикулярную $\overline{u}(\gamma)$:

$$\rho(\varphi,\gamma) = \frac{2\sin^2\gamma}{(2\sqrt{2}\sin\gamma - \cos\gamma)\cos(\varphi-\gamma)}. \tag{0.3}$$

В правой части (0.3) придадим углу γ приращения δ так, чтобы $\gamma+\delta \in (\operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}; \pi/2)$. Устремив δ к нулю справа и слева, исследуем поведение точки пересечения $m(\mu,\phi)$ новой прямой $\rho = \rho(\varphi, \gamma+\delta)$ с исходной, заданной (0.3). Получим, что при $\delta \to 0$:

$$\phi \to \phi_0 = \gamma - \operatorname{arctg}\frac{(\sin\gamma - \sqrt{2}\cos\gamma)^2}{\sin\gamma(2\sqrt{2}\sin\gamma - \cos\gamma)}, \mu \to \mu_0 = \rho(\phi_0,\gamma). \tag{0.4}$$

Значит, $m \to m_0(\mu_0, \phi_0)$, когда $\delta \to 0$.

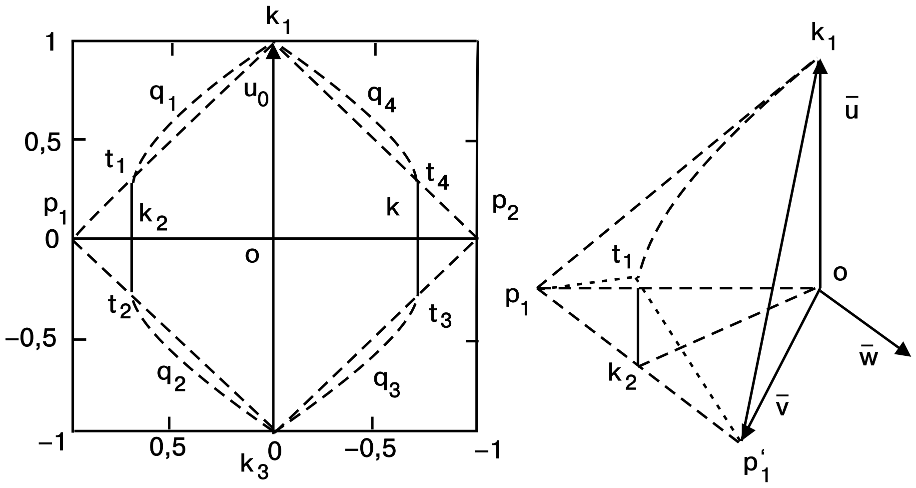
Отсюда следует, что ни одна из опорных прямых для $\gamma \in (\operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}; \pi/2)$ не содержит отрезка, лежащего на границе рассматриваемого сечения изопериметрикса. Таким образом, опорные для данных γ определяют строго выпуклую кривую, а значит, сечение изопериметрикса не является многоугольником. Тогда сам изопериметрикс не является многогранником. Утверждение 1 доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 2. Точки $k_1(1;0)$ и $k_2(1/\sqrt{2}; \pi/2)$ являются точками пересечения осей симметрии изопериметрикса и соответствующих им опорных плоскостей, поэтому они принадлежат поверхности изопериметрикса.

Положим в (0.4) $\gamma = \pi/2$, при $\delta \to 0-$, получим предельную точку

$$t_1(3/4; \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}),$$

также принадлежащую поверхности изопериметрикса (рис. 2,а).



а) б)

Рис. 2

Таким образом, нам известны три точки плоскости $T_o(\overline{w})$ — k_1, t_1 и k_2, принадлежащие поверхности изопериметрикса I. Пусть k_3 и t_2 — точки, симметричные k_1 и t_1 относительно прямой (ok_2), а t_3, k_4 и t_4 симметричны t_2, k_2 и t_1 относительно (ok_1). В силу симметрии сечения I_w изопериметрикса I плоскостью $T_{\overline{o}}(\overline{w})$ относительно этих же прямых, многоугольник $k_1t_1k_2t_2k_3t_3k_4t_4$ является вписанным в I_w. Поскольку любое сечение изопериметрикса есть фигура выпуклая, то имеем

$$S_I(\overline{w}) = S(I_w) \geq S(k_1t_1k_2t_2k_3t_3k_4t_4) = \frac{5\sqrt{2}}{4}. \tag{0.5}$$

Рассмотрим теперь другое сечение изопериметрикса. Пусть $|\overline{v}| = 1$ и $\overline{v} \perp cc'd'd$, где $\overline{c} = 1/2(\overline{a}_2 + \overline{a}_3)$, $\overline{c}' = 1/2(\overline{a}_2' + \overline{a}_3')$, $\overline{d}' = 1/2(\overline{a}_1' + \overline{a}_4')$, $\overline{d} = 1/2(\overline{a}_1 + \overline{a}_4)$. $T_o(\overline{v})$ является плоскостью симметрии куба B, поэтому опорное число изопериметрикса определяет в данной плоскости фигуру, соответствующую I_v. Введем в $T_o(\overline{v})$ полярную систему координат (ρ, ψ), где углы ψ, как и прежде, откладываем от $\overline{u}_0$. Тогда векторы $\overline{u} \in U_v$ определятся, как $\overline{u} = \overline{u}(\psi)$.

Найдем, что

$$S_B(\psi) = \begin{cases} 1/\cos\psi, 0 \leq \psi \leq \pi/4, \\ 1/\sin\psi, \pi/4 \leq \psi \leq \pi/2, \end{cases} \qquad h_I(\psi) = \begin{cases} \cos\psi, 0 \leq \psi \leq \pi/4, \\ \sin\psi, \pi/4 \leq \psi \leq \pi/2 \end{cases}$$

для углов $\psi \in [0; \pi/2]$.

Симметрично продолжив эту функцию на остальные три четверти плоскости $T_o(\overline{v})$, получим опорную функцию квадрата $k_1p_1k_3p_2 = I_v$, где $k_1(1;0)$, $p_1(1;\pi/2)$, $k_3(1;\pi)$, $p_2(1;3\pi/2)$. Следовательно,

$$S_I(\overline{v}) = S(I_v) = 2. \tag{0.6}$$

Допустим, что $\widetilde{I}$ гомотетичен B. Тогда отношение

$$\frac{h_{\widetilde{I}}(v)}{h_{\widetilde{I}}(w)} = \frac{h_B(v)}{h_B(w)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

должно равняться отношению $\frac{S_I(\overline{w})}{S_I(\overline{v})}$, но из (0.5) и (0.6)

$$\frac{S_I(\overline{w})}{S_I(\overline{v})} \geq \frac{5\sqrt{2}}{8} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h_B(v)}{h_B(w)}.$$

Это противоречие и доказывает утверждение 2.

Доказательство утверждения 3. Повернем квадрат $k_1p_1k_3p_2$ в $\mathbb{R}^3$ около прямой (k_1k_3) на $\pi/2$. Получим квадрат $k_1p_1'k_3p_2'$, который в силу симметрии B также лежит на поверхности I. На поверхности I будет лежать и квадрат $p_1p_1'p_2p_2'$, который получается из $k_1p_1k_3p_2$ поворотом на $\pi/2$ около прямой (p_1p_2). Поскольку отрезки $[p_1;p_1']$ и $[t_1;t_2]$ проходят через точку k_2, взаимно перпендикулярны и принадлежат поверхности I, то ромб, натянутый на эти отрезки как на диагонали, в силу выпуклости I, есть плоской гранью в ∂I, что доказывает утверждение 3.

Исследуя в (0.4) другое граничное значение $\gamma = \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}$, при $\delta \to 0+$, получим точку $k_1(1;0)$. Следовательно в окрестности точки k_1 прямолинейных отрезков на границе I_w нет.

Таким образом, поверхность изопериметрикса ∂I куба B как на каркас натянута на октаэдр $Q = k_1p_1k_3p_2p_1'p_2'$. Вершины этого октаэдра соответствуют центрам граней куба B. Каждое ребро Q является диагональю ромба, который есть плоской гранью поверхности ∂I. Хорошо известны уравнения огибающей семьи опорных прямых (см., напр., [5])

$$\begin{cases} x = h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi, \\ y = h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi, \end{cases}$$

где $h(\varphi)$ — опорное число.

Протабулировав данную функцию, построим эскиз сечения поверхности изопериметрикса ∂I плоскостью $T_o(\overline{w})$. Результат изображен на рис. 2,а в виде кривой $k_1q_1t_1k_2t_2q_2k_3q_3t_3k_4t_4q_4$. Сечение ∂I плоскостью $T_o(\overline{v})$ изображено на этом же рисунке в виде квадрата $k_1p_1k_3p_2$.

Форму поверхности изопериметрикса I, заключенную в пределах одной грани октаэдра Q иллюстрирует рис. 2,б.

Автор благодарит профессора В.И. Дисканта за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] *H. Minkowski*, Teorie der konvexen Körper, inbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. — *Ges. Abh.* Leipzig–Berlin (1911), Bd. 2, S. 151–229.

[2] *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen. Leipzig–Berlin (1910).

[3] *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Москва, Наука (1985).

[4] *H. Busemann*, The isoperimetric problem for Minkowski area. — *Amer. J. Math.* (1949), v. 71, p. 743–762.

[5] *О.А. Борисенко*, Диференціальна геометрія і топологія. Харків, Основа (1995).

A isoperimetrix of a polyhedron in a Minkowski geometry

R.M. Didkowsky

The article is devoted to study of properties of an isoperimetrix in the three-dimensional Minkowski space, in case it his normalising skew field is preassigned by a polyhedron. It is shown, that under such circumstances isoperimetrix is not a polyhedron, and the second isoperimetrix is not homothetic to an initial polyhedron.