Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 3, с. 282–301

Изометрические расширения коммутативных систем линейных операторов

В.А. Золотарев

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Vladimir.A.Zolotarev@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 ноября 2003 г.

Для коммутативной системы линейных ограниченных операторов $\{T_1, T_2\}$, заданных в гильбертовом пространстве H, построено коммутативное изометрическое расширение $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^2$. Конструкция изометрической дилатации для двупараметрической полугруппы $T(n) = T_1^{n_1} T_2^{n_2}$, где $n = (n_1; n_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, опирается на характерные свойства данного коммутативного изометрического расширения. Описаны основные свойства характеристической функции $S(z)$, отвечающей коммутативному изометрическому расширению $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^2$. Доказан аналог теоремы Гамильтона–Кэли; показано, что в случае конечномерности дефектных подпространств системы $\{T_1, T_2\}$ существует полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ такой, что $\mathbb{P}(T_1, T_2) = 0$.

Для комутативної системи лінійних обмежених операторів $\{T_1, T_2\}$, які задано у гільбертовому просторі H, побудовано комутативне ізометричне розширення $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^2$. Конструкція ізометричної дилатації для двопараметричної півгрупи $T(n) = T_1^{n_1} T_2^{n_2}$, де $n = (n_1; n_2)$, опирається на характерні властивості даного комутативного ізометричного розширення. Описані основні властивості характеристичної функції $S(z)$, що відповідає комутативному ізометричному розширенню $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^2$. Доведено аналог теореми Гамільтона–Келі; показано, що у випадку скінченновимірності дефектних підпросторів системи $\{T_1, T_2\}$ існує поліном $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ такий, що $\mathbb{P}(T_1, T_2) = 0$.

Mathematics Subject Classification 2000: 47A45.
Работа выполнена при поддержке фонда Варрон научного института Вейцмана, Израиль.

© В.А. Золотарев, 2004

Построение функциональных моделей для сжимающих операторов T основано на теории унитарных дилатаций Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша [4], а конструкция дилатации связана с изучением основных свойств изометрических расширений V_T и отвечающих им открытых систем. Перенесение этих конструкций на случай коммутативных систем линейных ограниченных операторов $\{T_k\}_1^n$ (сжатий, например) до сих пор не имеет должного развития. В отличие от коммутативных систем линейных ограниченных несамосопряженных операторов $\{A_k\}_1^n$, изучение которых обрело законченные формы и имеет многочисленные приложения [2, 3], построение аналогичных конструкций для систем операторов $\{T_k\}_1^n$ наталкивалось на существенные трудности. Так, построение для каждого из сжатий T_k системы перестановочных операторов $\{T_k\}_1^n$ унитарной дилатации U_k, $1 \leq k \leq n$, при условии сохранения условия коммутативности $[U_k, U_s] = 0$ оказалось не всегда возможным в силу контрпримера С. Паррота [4, 5].

В данной работе предлагается новая конструкция изометрического расширения $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^2$, в которой помимо традиционной изометричности V_s и $\overset{+}{V}_s$ фигурируют дополнительные условия 3) – 5) (11), являющиеся следствием коммутативности исходной системы операторов T_1, T_2. В разделе. 2 описан полный набор инвариантов коммутативной системы линейных ограниченных операторов T_1, T_2. Следствием данных построений является соответствующий аналог теоремы Гамильтона–Кэли, а именно, показано, что в случае конечномерности дефектных подпространств системы T_1, T_2 всегда существует такой полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$, обладающий "симметрией" относительно единичной окружности $z_1 \to \bar{z}^{-1}$, что $\mathbb{P}(T_1, T_2) = 0$.

1. Предварительные сведения

I. Любой ограниченный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, обладает изометрическим (в индефинитной метрике, вообще говоря) расширением [8–11]. А именно, существуют гильбертовы пространства E и $\tilde{E}$ и операторы Φ: $E \to H$, Ψ: $H \to \tilde{E}$, K: $E \to \tilde{E}$, что оператор расширения

$$V_T = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \to H \oplus \tilde{E} \tag{1}$$

обладает свойствами

$$V_T^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{bmatrix} V_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad V_T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix} V_{T^*} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где σ и $\tilde{\sigma}$ — самосопряженные обратимые (ограниченно) операторы в E и $\tilde{E}$, соответственно. Расширение V_T (1.1) строится по оператору T неоднозначным образом. Приведем два способа построения таких расширений. Рассмотрим операторы $D = T^*T - I$ и $\tilde{D} = TT^* - I$, играющие роль дефектных операторов [4, 7, 8] для T; и пусть $E = \overline{\tilde{D}H}$, $\tilde{E} = \overline{DH}$ — соответствующие им дефектные подпространства [4, 7, 8]. Наиболее часто используемый способ построения V_T (1) состоит в следующем: $\Phi = \sqrt{|\tilde{D}|}$: $E \to H$, $\Psi = \sqrt{|D|}$: $H \to \tilde{E}$, $K = T^*$: $E \to \tilde{E}$, а $\sigma = -\operatorname{sign} \tilde{D}$, $\tilde{\sigma} = -\operatorname{sign} D$, при этом $\sqrt{|A|}$ и $\operatorname{sign} A$ для самосопряженного оператора A понимаются в смысле соответствующих спектральных разложений [8]

$$A = \int\limits_a^b \lambda dE_\lambda; \quad \sqrt{|A|} = \int\limits_a^b \sqrt{|\lambda|} dE_\lambda; \quad \operatorname{sign} A = \int\limits_a^b \operatorname{sign} \lambda dE_\lambda.$$

Второй способ, который лежит в основе дальнейших рассмотрений, заключается в том, что $\Phi = \tilde{D}$: $E \to H$; $\Psi = P_{\tilde{E}}$: $H \to \tilde{E}$ — ортопроектор в H на $\tilde{E}$, $K = T^*$: $E \to \tilde{E}$ и, наконец, $\sigma = -\tilde{D}$, $\tilde{\sigma} = -D$. В случае сжатия T ($\|T\| \le 1$) дефектные операторы D и $\tilde{D}$ неположительны, $D \le 0$, $\tilde{D} \le 0$; и значит, в силу первого способа построения V_T, мы можем считать, что $\sigma = I_E$, а $\tilde{\sigma} = I_{\tilde{E}}$, [4, 7, 8], т.е. V_T является унитарным оператором из $H \oplus E$ в $H \oplus \tilde{E}$.

Обозначим через $h_n \in H$, $u_n \in E$, $v_n \in \tilde{E}$ вектор-функции дискретного аргумента, $n \in \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \ge 0\}$, в соответствующих гильбертовых пространствах. Рассмотрим далее систему уравнений, которую принято [1, 7] называть открытой системой расширения V_T (1.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{n+1} = Th_n + \Phi u_n, \quad h_0 = h; \\ v_n = \Psi h_n + K u_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \end{array} \right. \qquad V_T \begin{bmatrix} h_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{n+1} \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Из первого соотношения в (2) вытекает следующий **закон сохранения**:

$$\|h_n\|^2 + \langle \sigma u_n, u_n \rangle = \|h_{n+1}\|^2 + \langle \tilde{\sigma} v_n, v_n \rangle. \tag{4}$$

Отметим, что если $u_n \equiv 0$, то h_n порождается полугруппой $T(n) = T^n$ дискретного аргумента $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. $h_n = T(n)h$, а $v_n = \Psi T(n) h$.

Рассмотрим теперь вектор-функции $\tilde{h}_n \in H$; $\tilde{u}_n \in E$; $\tilde{v}_n \in \tilde{E}$ аргумента $n \in \mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ и зададим двойственную открытую систему (по отношению к (3)), которая отвечает расширению V_T^*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_{n-1} = T^* \tilde{h}_n + \Psi^* \tilde{v}_n, \quad \tilde{h}_{-1} = \tilde{h}; \\ \tilde{u}_n = \Phi^* \tilde{h}_n + K^* \tilde{v}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_-; \end{array} \right. \qquad V_T^* \begin{bmatrix} \tilde{h}_n \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{n-1} \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Тогда при $\tilde{v}_n \equiv 0$ вектор-функция $\tilde{h}_{n-1} = T^*\left(|n|\right)\tilde{h}$ порождается полугруппой $T^*\left(|n|\right) = \left(T^*\right)^{|n|}$, где $(-n) \in \mathbb{Z}_+$, а $\tilde{u}_{n-1} = \Phi^* T^*\left(|n|\right)h$. Закон сохранения для (5) имеет тот же вид (4), если положить $h_n = \tilde{h}_{-n-1}$, $v_n = \tilde{\sigma}^{-1}\tilde{v}_{-n-1}$, $u_n = \sigma^{-1}\tilde{u}_{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $u_n = z^n u_0$, $z \in \mathbb{C}$, $u_0 \in E$, тогда, полагая, что h_n и v_n зависят от $n \in \mathbb{Z}_+$ аналогичным образом, $h_n = z^n h_0$, $v_n = z^n v_0$, из уравнений (3) для открытой системы получим, что $h_0 = (zI - T)^{-1}\Phi u_0$, $v_0 = S(z)u_0$, где

$$S(z) = S_\Delta(z) = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi \tag{6}$$

является характеристической оператор-функцией М.С. Лившица расширения V_T (1), [4, 8].

Оператор U, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией [4] оператора T, который задан в пространстве H, если

$$\mathcal{H} \subseteq H, \quad T^n = P_H U^n\big|_H, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

где P_H — ортопроектор на H. Если оператор U унитарен, то дилатация U называется унитарной дилатацией оператора T. Для оператора сжатия T ($\|T\| \le 1$) построение дилатации U основано на конструкции расширения V_T (1) и законе сохранения (4). Оказывается, что любой сжимающий оператор T всегда обладает унитарной дилатацией U (теорема Б. Секефальви-Надя [4, 8]), а пространство дилатации $\mathcal{H}$ при этом имеет вид,

$$\mathcal{H} = D_- \oplus H \oplus D_+, \tag{7}$$

где $D_- = l^2_{\mathbb{Z}_-}(E)$ и $D_+ = l^2_{\mathbb{Z}_+}(\tilde{E})$. Как обычно, через $l^2_M(G)$ обозначено гильбертово пространство G-значных функций $u_k \in G$, где $k \in M$, M — подмножество в $\mathbb{Z}$, $M \subseteq \mathbb{Z}$, причем $\sum\limits_{k\in M}\|u_k\|^2 < \infty$. Дилатация U на функцию $f = (u_k; h; v_k)$ из $\mathcal{H}$ ($\|f\|^2 = \|u_k\|^2_{l^2_{\mathbb{Z}_-}} + \|h\|^2 + \|v_k\|^2_{l^2_{\mathbb{Z}_+}}$) действует следующим образом [4, 8]:

$$Uf = (P_{D_-}u_{k-1}; \tilde{h}; \tilde{v}_k), \tag{8}$$

где $\tilde{h} = Th + \Phi u_{-1}$, $\tilde{v}_0 = \Psi h + Ku_{-1}$, $\tilde{v}_k = v_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Унитарность U (8) следует из закона сохранения (4) для расширения V_T (1), т.к. в случае сжатия T операторы $\sigma = I$ и $\tilde{\sigma} = I$.

Напомним, что унитарная дилатация U называется минимальной дилатацией для сжатия T [4, 8], если

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{U^n h : h \in H, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{9}$$

Минимальные унитарные дилатации определяются сжимающим оператором T с точностью до унитарного изоморфизма [4]. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что дилатация U является минимальной и имеет приведенную выше структуру (7) и (8).

II. Обобщение конструкции п. 1, предложенное Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем в [4] на случай коммутативной системы сжатий $\{T_k\}_1^n$ ($[T_k, T_s] = T_kT_s - T_sT_k = 0$, $1 \leq k$, $s \leq n$) не очевидно. А именно, построение коммутативной системы унитарных операторов $\{U_k\}_1^n$ в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathcal{H} \supseteq H$ и

$$T_1^{m_1} \cdots T_n^{m_n} = P_H U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n}|_H \quad (\forall m_k \in \mathbb{Z}_+)$$

оказалось не всегда возможным, а дополнительные условия, при которых такая система унитарных операторов $\{U_k\}_1^n$ вообще существует, носят нелинейный и весьма сложный характер [4]. В случае, когда $n = 2$, такая унитарная дилатация была построена Т. Андо [4], но она не обладала необходимой минимальностью, что не позволяло производить построение функциональной модели. При $n \geq 3$, как показывает контрпример С. Паррота [4, 5], существование такой унитарной дилатации для коммутативной системы сжатий $\{T_k\}_1^n$ не всегда возможно. Каждый из операторов T_k, $k = 1, 2$, действующий из H в H, имеет, как следует из п. 1, свое "изометрическое" расширение $V_k = V_{T_k}$: $H \oplus E_k \to H \oplus \tilde{E}_k$, $k = 1, 2$ (1.1); но, во-первых, пространства E_1, E_2, как и $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, не обязаны совпадать, да это и не всегда так; во-вторых, даже если $E_k = \tilde{E}_k$, то коммутативность $[T_1, T_2] = 0$ расширениями V_1 и V_2, вообще говоря, не наследуется, т.е. $[V_1, V_2] \neq 0$.

Тем не менее, можно утверждать, что всегда существует следующее расширение [6].

Определение 1. *Пусть в гильбертовом пространстве H задана коммутативная система линейных ограниченных операторов $\{T_1, T_2\}$. Совокупность отображений*

$$\begin{aligned} V_s &= \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \to H \oplus \tilde{E}, \\ \overset{+}{V_s} &= \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi_s^* \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} : H \oplus \tilde{E} \to H \oplus E, \end{aligned} \tag{10}$$

где E и $\tilde{E}$ — некоторые гильбертовы пространства ($s = 1, 2$), назовем коммутативным изометрическим расширением коммутативной системы линейных ограниченных операторов T_1, T_2 в H, $[T_1, T_2] = 0$, если в гильбертовых пространствах E и $\tilde{E}$ существуют такие операторы σ_s, τ_s, N_s, Γ и $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\tau}_s$, $\tilde{N}_s$, $\tilde{\Gamma}$, соответственно (σ_s, τ_s и $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\tau}_s$ — самосопряжены), $s = 1, 2$, что *выполняются соотношения:*

$$
\begin{array}{ll}
1) & V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_s \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix}, \quad s = 1, 2; \\
2) & \overset{+}{V_s^*} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix} \overset{+}{V_s} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix}, \quad s = 1, 2; \\
3) & T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi \Gamma, \quad \tilde{N}_1 \Psi T_2 - \tilde{N}_2 \Psi T_1 = \tilde{\Gamma} \Psi; \\
4) & \tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2 = K\Gamma - \tilde{\Gamma} K; \\
5) & K N_s = \tilde{N}_s K, \quad s = 1, 2.
\end{array}
\tag{11}
$$

Прежде всего покажем, что такое расширение V_s, $\overset{+}{V_s}$ (10) для любой коммутативной системы T_1, T_2 существует. Пусть $D_s = T_s^* T_s - I$, $\tilde{D}_s = T_s T_s^* - I$ — дефектные операторы ($s = 1,\ 2$). Рассмотрим операторы в H $N_1 = \tilde{D}_1 T_2^*$, $N_2 = \tilde{D}_2 T_1^*$, $\tilde{N}_1 = T_2^* D_1$, $\tilde{N}_2 = T_1^* D_2$. Определим далее гильбертовы пространства

$$
\begin{aligned}
E &= \operatorname{span}\left\{ \tilde{D}_k H + N_s^* H; k, s = 1, 2 \right\}, \\
\tilde{E} &= \operatorname{span}\left\{ D_k H + \tilde{N}_s H; k, s = 1, 2 \right\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Пусть

$$
\begin{array}{cccc}
N_1 = \tilde{D}_1 T_2^*, & N_2 = \tilde{D}_2 T_1^*, & \tilde{N}_1 = T_2^* D_1, & \tilde{N}_2 = T_1^* D_2, \\
\tilde{\sigma}_1 = -D_1, & \tilde{\sigma}_2 = -D_2, & \sigma_1 = -T_2 \tilde{D}_1 T_2^*, & \sigma_2 = -T_1 \tilde{D}_2 T_1^*, \\
\tau_1 = -\tilde{D}_1, & \tau_2 = -\tilde{D}_2, & \tilde{\tau}_1 = -T_2^* D_1 T_2, & \tilde{\tau}_2 = -T_1^* D_2 T_1, \\
\Gamma = \tilde{D}_1 - \tilde{D}_2, & \tilde{\Gamma} = D_1 - D_2, & K = T_1^* T_2^*. &
\end{array}
\tag{13}
$$

Нетрудно видеть, что операторы

$$
V_s = \begin{bmatrix} T_s & P_E N_s \\ P_{\tilde{E}} & K \end{bmatrix}, \quad \overset{+}{V_s} = \begin{bmatrix} T_s^* & P_{\tilde{E}} \tilde{N}_s^* \\ P_E & K^* \end{bmatrix}, \quad s = 1, 2,
\tag{14}
$$

удовлетворяют условиям 1), 2) (11), где P_E и $P_{\tilde{E}}$ — ортопроекторы в H на E и $\tilde{E}$, соответственно. Соотношения 3) (11) вытекают из тождеств

$$
T_2 \tilde{D}_1 T_2^* - T_1 \tilde{D}_2 T_1^* = \tilde{D}_1 - \tilde{D}_2, \quad T_2^* D_1 T_2 - T_1^* D_2 T_1 = D_1 - D_2,
\tag{15}
$$

а условия 4) и 5) (11) проверяются непосредственно. Включение $KE \subseteq \tilde{E}$ является очевидным следствием соотношений

$$
T_1^* T_2^* \tilde{D}_1 H = T_2^* D_1 T_1^* H \subset \tilde{N}_1 T_1^* H \subseteq \tilde{E},
$$

$$
T_1^* T_2^* N_1^* H = D_1 T_1^* H + \tilde{N}_2 \tilde{D}_1 H \subseteq \tilde{E}
$$

и аналогичных им.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что операторы V_s и $\overset{+}{V}_s$ (10) связаны друг с другом сотношениями

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{N}_s \end{bmatrix} V_s = \left(\overset{+}{V}_s\right)^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_s \end{bmatrix} \quad s = 1, 2. \tag{16}$$

III. Зададим в узлах целочисленной решетки $n = (n_1; n_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ ($n_k \geq 0$, $k = 1, 2$, $n_k \in \mathbb{Z}$), вектор-функции дискретного аргумента $h_n \in H$, $u_n \in E$, $v_n \in \tilde{E}$. Рассмотрим далее двупеременный аналог системы (3)

$$\begin{cases} \partial_1 h_n = T_1 h_n + \Phi N_1 u_n, & h_{(0,0)} = h_0; \\ \partial_2 h_n = T_2 h_n + \Phi N_2 u_n, & n \in \mathbb{Z}_+^2; \\ v_n = \Psi h_n + K u_n; \end{cases} \qquad V_s \begin{bmatrix} h_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_s h_n \\ v_n \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где $s = 1, 2$, $\partial_1 h_n = h_{(n_1+1;n_2)}$ и $\partial_2 h_n = h_{(n_1;n_2+1)}$ — соответствующие сдвиги по разным переменным. Отметим, что из (17) при $u_n \equiv 0$ следует, что h_n порождается двупараметрической полугруппой $T(n) = T_1^{n_1} T_2^{n_2}$, $n = (n_1; n_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, т.е. $h_n = T(n) h_0$, а вектор-функция $v_n = \Psi T(n) h_0$.

Теорема 1. *Система (17) будет совместной, если вектор-функция u_n является решением уравнения*

$$\{N_2 \partial_1 - N_1 \partial_2 + \Gamma\} u_n = 0. \tag{18}$$

Доказательство теоремы следует из равенства смешанных сдвигов $\partial_1 \partial_2 h_n = \partial_2 \partial_1 h_n$ с учетом условия 3) (11).

Теорема 2. *Предположим, что u_n является решением уравнения (18), а вектор-функции h_n и v_n заданы сотношениями (17), тогда v_n удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\left\{\tilde{N}_2 \partial_1 - \tilde{N}_1 \partial_2 + \tilde{\Gamma}\right\} v_n = 0. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из (17) и 3), 5) (11) следует, что

$$\left\{\tilde{N}_2 \partial_1 - \tilde{N}_1 \partial_2\right\} v_n = K \{N_2 \partial_1 - N_1 \partial_2\} u_n + \left\{\tilde{N}_2 \Psi T_1 - \tilde{N}_1 \Psi T_2\right\} h_n$$
$$+ \left\{\tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2\right\} u_n\,,$$

а используя теперь уравнение (18) и соотношения 3), 4) (11), получим

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{N}_2 \partial_1 - \tilde{N}_1 \partial_2\right\} v_n &= -K\Gamma u_n - \tilde{\Gamma}\Psi h_n + \{K\Gamma - \tilde{\Gamma} K\} u_n \\ &= -\tilde{\Gamma}\{\Psi h_n + K u_n\} = -\tilde{\Gamma} v_n, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. ■

Аналогично (4) для открытой системы (17) справедливы следующие законы сохранения:

$$\begin{array}{ll} 1) & \|\partial_s h_n\|^2 + \langle \tilde{\sigma}_s v_n, v_n \rangle = \|h_n\|^2 + \langle \sigma_s u_n, u_n \rangle, \quad s = 1,2; \\ 2) & \langle (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)\, v_n, v_n \rangle + \langle \tilde{\sigma}_2 \partial_1 v_n, \partial_1 v_n \rangle - \langle \tilde{\sigma}_1 \partial_2 v_n, \partial_2 v_n \rangle \\ & = \langle (\sigma_1 - \sigma_2)\, u_n, u_n \rangle + \langle \sigma_2 \partial_1 u_n, \partial_1 u_n \rangle - \langle \sigma_1 \partial_2 u_n, \partial_2 u_n \rangle. \end{array} \tag{20}$$

Очевидно, что соотношения 1) (20) являются простым следствием 1) (11); что же касается 2) (20), то это равенство вытекает из совпадения норм $\|\partial_1\partial_2 h_n\|^2 = \|\partial_2\partial_1 h_n\|^2$ и в дальнейшем будет играть важную роль.

IV. Отвечающие V_s (10) уравнения (17) описывают "динамику" уходящих волн, заданных на $\mathbb{Z}^2_+$. Чтобы изучить двойственную ситуацию, рассмотрим в узлах целочисленной решетки $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2_-$ $(n_k < 0,\ \ k = 1,2;$ $n_k \in \mathbb{Z})$ вектор-функции $\tilde{h}_n \in H$, $\tilde{u}_n \in E$, $\tilde{v}_n \in \tilde{E}$. Определим, аналогично (5), двупеременный дуальный вариант открытой системы в духе (17)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\partial}_1 \tilde{h}_n = T_1^* \tilde{h}_n + \Psi^* \tilde{N}_1^* \tilde{v}_n, & \tilde{h}_{(-1;1)} = \tilde{h}_{-1}; \\ \tilde{\partial}_2 \tilde{h}_n = T_2^* \tilde{h}_n + \Psi^* \tilde{N}_2^* \tilde{v}_n, & n \in \mathbb{Z}^2_-; \\ u_n = \Phi^* \tilde{h}_n + K^* \tilde{v}_n; & \end{array} \right. \qquad \overset{+}{V}_s \begin{bmatrix} \tilde{h}_n \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\partial}_s \tilde{h}_n \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $s = 1,2$, $\tilde{\partial}_1 \tilde{h}_{(n_1-1;n_2)}$ и $\tilde{\partial}_2 \tilde{h}_n = \tilde{h}_{(n_1;n_2-1)}$ — сдвиги по разным переменным, формально сопряженные к ∂_1 и ∂_2 в том смысле, что $\tilde{\partial}_s = \partial_s^*$, $s = 1,2$, в метрике пространства l^2. Как и в случае системы (17), при $\tilde{v}_n \equiv 0$ вектор-функции $\tilde{h}_n$ и $\tilde{u}_n$ порождаются полугруппой $T^*(n) = T_1^{*n_1} T_2^{*n_2}$, $n_k \in \mathbb{Z}_+$, $k = 1,2$, а именно $\tilde{h}_n = T^*(-n_1 - 1, -n_2 - 1)\, \tilde{h}_{-1}$ и $\tilde{u}_n = \Phi^* T^*(-n_1 - 1, -n_2 - 1)$ $\times h_{-1}$, $\ n \in \mathbb{Z}^2_-$. Для системы (21) справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2.

Теорема 3. *Совместность системы уравнений (21) будет иметь место, если $\tilde{v}_n$ является решением уравнения*

$$\left\{ \tilde{N}_2^* \tilde{\partial}_1 - \tilde{N}_1^* \tilde{\partial}_2 + \tilde{\Gamma}^* \right\} \tilde{v}_n = 0. \tag{22}$$

Теорема 4. *Вектор-функция $\tilde{u}_n$ (21) удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\left\{ N_2^* \partial_1 - N_1^* \partial_2 + \Gamma^* \right\} \tilde{u}_n = 0 \tag{23}$$

при условии, что $\tilde{v}_n$ является решением (22), а $\tilde{h}_n$ заданы при помощи соотношений (21).

Аналогично (20), в силу 2) (11), для двойственной открытой системы (21) справедливы следующие законы сохранения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \left\|\tilde{\partial}_s\tilde{h}_s\right\|^2 + \langle \tau_s\tilde{u}_n, \tilde{u}_n\rangle = \left\|\tilde{h}_n\right\|^2 + \langle \tau_s\tilde{v}_n, \tilde{v}_n\rangle, \quad s=1,2;\\
&2)\quad \langle (\tau_1-\tau_2)\,\tilde{u}_n, \tilde{u}_n\rangle + \left\langle \tau_2\tilde{\partial}_1\tilde{u}_n, \tilde{\partial}_1\tilde{u}_n\right\rangle - \left\langle \tau_1\tilde{\partial}_2\tilde{u}_n, \tilde{\partial}_2\tilde{u}_n\right\rangle \\
&\quad = \langle (\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_2)\,\tilde{v}_n, \tilde{v}_n\rangle + \left\langle \tilde{\tau}_2\tilde{\partial}_1\tilde{v}_n, \tilde{\partial}_1\tilde{v}_n\right\rangle - \left\langle \tilde{\tau}_1\tilde{\partial}_2\tilde{v}_n, \tilde{\partial}_2\tilde{v}_n, \right\rangle.
\end{aligned} \tag{24}$$

Как будет показано в дальнейшем, соотношения изометрического характера 2) (20) и 2) (24) приводят к нетривиальным соотношениям для характеристической функции $S_1(z)$ оператора T_1, которые и лежат в основе конструктивных построений функциональных и треугольных моделей для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$.

2. Основные свойства характеристической функции

I. Предположим, что h_n, u_n, v_n в уравнениях открытой системы (17) имеют вид $u_n = z^n u_0$, $h_n = z^n h_0$, $v_n = z^n v_0$, где $z=(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$, а $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$, при этом $n=(n_1;n_2)\in\mathbb{Z}_+^2$. Тогда из первых двух соотношений в (17) следует, что

$$h_0 = (z_1 I - T_1)^{-1}\,\Phi N_1 u_0 = (z_2 I - T_2)^{-1}\,\Phi N_2 u_0. \tag{25}$$

Совпадение двух различных представлений для h_0 (25) эквивалентно уравнению

$$\{N_2 z_1 - N_1 z_2 + \Gamma\}\,u_0 = 0, \tag{26}$$

которое является очевидным следствием условия совместности (18) при данном выборе зависимости от “n” векторов u_n. А так как $v_0 = S_k(z_k)\,u_0$, где $S_k(z_k) = K + \Psi\,(z_k I - T_k)^{-1}\,\Phi N_k$ — характеристическая функция расширения V_k (10), $k=1,2$ [6], то мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Если точка $z=(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$ и вектор $u_0\in E$ таковы, что имеет место (26), то*

$$S_1(z_1)\,u_0 = S_2(z_2)\,u_0.$$

Из уравнения (19) также следует, что вектор-функция $v_0 = S_1(z_1)\,u_0$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\tilde{N}_2 z_1 - \tilde{N}_1 z_2 + \tilde{\Gamma}\right\} v_0 = 0 \tag{27}$$

при условии, что для u_0 имеет место (26). Поэтому в предположении, что N_1^{-1} существует, можем записать

$$\left\{\begin{array}{l} N_1^{-1}\,(N_2 z_1 + \Gamma)\,u_0 = z_2 u_0,\\ \left(\tilde{N}_2 z_1 + \tilde{\Gamma}\right) v_0 = z_2 \tilde{N}_1 v_0. \end{array}\right.$$

Применяя к первому из равенств $S_1(z_1)$ и учитывая то, что $v_0 = S_1(z_1)\, u_0$, приходим к следующей важной теореме.

Теорема 6. *Если оператор N_1 обратим, то для $S_1(z_1)$ выполняется условие сплетаемости*

$$\left(\tilde{N}_2 z_1 + \tilde{\Gamma}\right) = \tilde{N}_1 S_1(z_1)\, N_1^{-1}(N_2 z_1 + \Gamma). \tag{28}$$

Если $\dim E < \infty$ и $\dim \tilde{E} < \infty$, то нетривиальность u_0 и v_0, удовлетворяющих (26) и (27), соответственно, будет иметь место, если только точка $z = (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ будет лежать на алгебраических кривых

$$\mathbb{Q} = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \mathbb{Q}(z_1, z_2) = 0\right\}, \quad \tilde{\mathbb{Q}} = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2) = 0\right\}, \tag{29}$$

где $\mathbb{Q}(z_1, z_2)$ и $\tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2)$ — полиномы, задаваемые формулами

$$\mathbb{Q}(z_1, z_2) = \det(N_2 z_1 - N_1 z_2 + \Gamma), \quad \tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2) = \det\left(\tilde{N}_2 z_1 - \tilde{N}_1 z_2 + \tilde{\Gamma}\right). \tag{30}$$

Отметим, что, если помимо N_1 также и $\tilde{N}_1$ обратим, то, как следует из условия сплетаемости (28), характеристическая функция $S_1(z_1)$ отображает собственные векторы линейного пучка $N_1^{-1}(N_2 z_1 + \Gamma)$ в собственные векторы пучка $\tilde{N}_1^{-1}\left(\tilde{N}_2 z_1 + \tilde{\Gamma}\right)$, которые отвечают одному и тому же собственному числу z_2. Более того, $S_1(z_1)$ отображает соответствующие корневые подпространства, отвечающие одной и той же точке спектра z_2, друг в друга. Таким образом, $S_1(z)$ является морфизмом расслоений из E слоя над $\mathbb{Q}$ в $\tilde{E}$ слой над $\tilde{\mathbb{Q}}$. А если функция $S_1(z)$ обратима хотя бы в одной точке своей области голоморфности, то $\dim E = \dim \tilde{E}$ $(< \infty)$ и $\mathbb{Q}(z_1, z_2) = \tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2)$ и, значит, алгебраические кривые $\mathbb{Q}$ и $\tilde{\mathbb{Q}}$ (29) совпадают.

Применяя аналогичные рассуждения к дуальной системе уравнений (21), придем к характеристическим функциям $\overset{+}{S}_p(z_p) = K^* + \Phi^*(z_p I - T_p^*)^{-1}\Psi^*\tilde{N}_p^*$, $p = 1, 2$. При этом будут иметь место соотношения, аналогичные равенствам (25)–(28), которые представляют собой "сопряжения" равенств (25)–(28).

II. Из законов сохранения 1) (20) и 1) (24) вытекают следующие формулы для $S_1(z)$ и $\overset{+}{S}_1(z)$:

$$\frac{S_1^*(w)\tilde{\sigma}_1 S_1(z) - \sigma_1}{1 - z\bar{w}} = N_1^*\Phi^*(\bar{w}I - T_1^*)^{-1}(zI - T_1)^{-1}\Phi N_1,$$

$$\frac{\overset{+}{S}{}_1^*(w)\tau_1 \overset{+}{S}_1(z) - \tilde{\tau}_1}{1 - z\bar{w}} = \tilde{N}_1\Psi(\bar{w}I - T_1)^{-1}(zI - T_1^*)^{-1}\Psi^*\tilde{N}_1^*.$$

Поэтому ядро

$$K(z,w) = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1^*(w)\tilde{\sigma}_1 S_1(z) - \sigma_1}{1 - z\bar{w}} & N_1^* \dfrac{\overset{+}{S}_1(z) - \overset{+}{S}_1(\bar{w})}{\bar{w} - z} \\ \tilde{N}_1 \dfrac{S_1(z) - S_1(\bar{w})}{\bar{w} - z} & \dfrac{\overset{+}{S}{}^*(w)\tau_1 \overset{+}{S}(z) - \tilde{\tau}_1}{1 - z\bar{w}} \end{bmatrix} \tag{31}$$

является положительно определенным ядром [1, 4], т.к. для любых конечных наборов $\{z_k, f_k\}_1^N$, $N < \infty$, где $z_k \in \mathbb{C}$, а $f_k \in E \oplus \tilde{E}$, имеет место

$$\sum_{k,s=1}^{N} \langle K(z_k, z_s) f_k, f_s \rangle \geq 0,$$

потому что $K(z,w) = Y*(w)Y(z)$, причем

$$Y(z) = \left[(zI - T_1)^{-1} \Phi N_1, (zI - T_1^*)^{-1} \Psi^* \tilde{N}_1^* \right].$$

Рассмотрим следующее подпространство в H:

$$H_1 = \operatorname{span}\left\{ T_1^{n_1} T_2^{n_2} \Phi g + T_1^{*m_1} T_2^{*m_2} \Psi^* f : g \in E; f \in \tilde{E}; n_k, m_k \in \mathbb{Z}_+, k = 1, 2 \right\}. \tag{32}$$

Теорема 7. *Предположим, что операторы N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы, тогда подпространство H_1 (32) приводит каждый из операторов T_1 и T_2, причем сужения T_1 и T_2 на $H_0 = H \ominus H_1$ являются унитарными операторами.*

Доказательство. Вначале покажем, что H_1 (32) приводит оператор T_1, для этого достаточно установить, что

$$T_1 T_1^{*n_1} T_2^{*n_2} \Psi^* \tilde{E} \subset H_1, \quad T_1^* T_1^{n_1} T_2^{n_2} \Phi E \subset H_1$$

для любых $n_1, n_2 \geq 0$. Докажем первое включение (второе доказывается аналогично). Из 3) (11) следует, что $T_2^* \Psi^* = T_1^* \Psi^* \tilde{N}_2^* \tilde{N}_1^{*-1} + \Psi^* \tilde{\Gamma}^* \tilde{N}_1^{*-1}$, поэтому

$$T_1^{*n_1} T_2^{*n_2} \Psi^* \tilde{E} \subset \operatorname{span}\left\{ T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

А так как $T_1 T_1^* = I - \Phi \tau_1 \Phi^*$ и $T_1 \Psi^* + \Phi \tau_1 K^* \tilde{N}_1^{*-1} = 0$ (в силу 2) (11)), то по индукции легко показать, что $T_1 T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E} \subset H_1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Итак, подпространство H_1 приводит оператор T_1, а т.к. $H_0 \subset \operatorname{Ker}(I - T_1^* T_1)$ и $H_0 \subset \operatorname{Ker}(I - T_1 T_1^*)$, потому что $(I - T_1^* T_1) H = \Psi^* \tilde{\sigma}_1 \Psi H \subset H_1$ и $(I - T_1 T_1^*) H = \Phi \tau_1 \Phi^* H \subset H_1$, то получим, что оператор T_1 индуцирует на H_0 унитарный оператор.

Для доказательства того, что H_1 также приводит оператор T_2 (в силу аналогичных рассуждений), достаточно показать, что имеют место

$$T_2 T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E} \subset H_1, \quad T_2^* T_1^m \Phi E \subset H_1, \forall n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Докажем, например, первое включение. Пусть $L^n = \overline{T_2 T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E}}$ и пусть $L^n = L_1^n \oplus L_0^n$, где $L_s^n = P_s L^n$, причем P_s — ортопроектор на H_s, $s = 0, 1$. В силу приводимости оператора T_1 подпространством H_1, имеем, что $T_1 L_1^n \subset H_1$ и $T_1 L_0^n \subset H_0$. А с другой стороны, $T_1 T_2 T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E} = T_2 T_1 T_1^{*n} \Psi^* \tilde{E}$ и, значит, при $n = 0$ $T_2 T_1 \Psi^* \tilde{E} \subset H_1$ в силу $T_1 \Psi^* N_1 + \Phi \tau_1 K* = 0$, т.е. $L_0^0 = 0$; а при $n \geq 1$, используя $T_1 T_1^* = I - \Phi \tau_1 \Phi^*$, будем иметь, что $T_1 L^n \subset \operatorname{span}\left\{L^{n-1} + H_1\right\}$. Следовательно, $P_0 T_1 L_0^n \subset L_0^{n-1}$ и, значит, $P_0 T_1^n L_0^n \subset L_0^0 = \{0\}$, т.е. $L_0^n = \{0\}$ в силу унитарности сужения T_1 на H_0. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что в случае обратимости операторов N_1 и $\tilde{N}_1$ простую компоненту H_1 (2.8) порождает оператор T_1, т.е.

$$H_1 = \operatorname{span}\left\{T_1^n \Phi g + T_1^{*m} \Psi^* f : g \in E; f \in \tilde{E}; n, m \in \mathbb{Z}_+\right\}. \tag{33}$$

Расширение V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10) будем называть простым расширением, если H_1 (32) совпадает с H, $H_1 = H$.

Рассмотрим наряду с коммутативной системой T_1, T_2 в H другую коммутативную систему операторов T_1', T_2' в H'. Расширение V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10) системы T_1, T_2 назовем унитарно эквивалентным расширению V_s', $\overset{+}{V}{}_s'$ (10) системы T_1', T_2', если:

1) совпадают внешние пространства $E = E'$ и $\tilde{E} = \tilde{E}'$, а также совпадают соответствующие операторы, действующие в них, σ_s, τ_s, N_s, Γ и $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\tau}_s$, $\tilde{N}_s$, $\tilde{\Gamma}$;

2) существует такой унитарный оператор U из H в H', что

$$U T_s = T_s' U, \quad s = 1, 2; \quad U \Phi = \Phi'; \quad \Psi' U = \Psi.$$

Очевидно, что у унитарно-эквивалентных расширений совпадают характеристические функции $S_1(z)$.

Теорема 8. *Предположим, что задано простое коммутативное изометрическое расширение V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10) коммутативной системы операторов T_1, T_2 и простое изометрическое коммутативное расширение V_s', $\overset{+}{V}{}_s'$ (10) системы перестановочных операторов T_1', T_2'. И пусть у этих расширений* *совпадают внешние пространства $E = E'$, $\tilde{E} = \tilde{E}'$ и соответствующие операторы равны $\Gamma = \Gamma'$, $N_s = N_s'$, $\sigma_s = \sigma_s'$, $\tau_s = \tau_s'$, а также $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}'$, $\tilde{N}_s = \tilde{N}_s'$, $\tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_s'$, $\tilde{\tau}_s = \tilde{\tau}_s'$, $s = 1, 2$. Тогда, если в некоторой общей области аналитичности имеет место $S_1(z) = S_1'(z)$, а операторы N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы, то коммутативные расширения V_s, $\overset{+}{V}_s$ и V_s', $\overset{+}{V}{}_s'$ унитарно-эквивалентны.*

Доказательство. Как легко видеть, из 3) (11) следует, что

$$\begin{aligned} &(zI - T_1)^{-1} \Phi \left(N_2 z + \Gamma\right) = \Phi N_2 + (zI - T_1)^{-1} T_2 \Phi N_1, \\ &\left(\tilde{N}_2 z + \tilde{\Gamma}\right) \Psi \left(zI - T_1\right)^{-1} = \tilde{N}_2 \Psi + \tilde{N}_1 \Psi T_2 \left(zI - T_1\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

Поэтому после необходимого числа итераций справа $N_1^{-1}\left(N_2 z + \Gamma\right)$ и слева $\left(N_2^* \bar{w} + \Gamma^*\right) N_1^{*-1}$ к блоку $K_{(z,w)}^{1,1}$ ядра $K(z,w)$ (31) получим, что для расширений V_s, $\overset{+}{V}_s$ и V_s', $\overset{+}{V}{}_s'$ (10) совпадают выражения

$$\Phi^* T_2^{*m} \left(\bar{w} I - T_1^*\right)^{-1} \left(zI - T_1\right)^{-1} T_2^n \Phi; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

т.к. $S_1(z) = S_1'(z)$. Использование аналогичных соображений для других блоков ядра $K(z,w)$ (31) приводит к совпадению выражений

$$\Psi T_2^m \left(zI - T_1\right)^{-1} \left(\bar{w} I - T_1^*\right)^{-1} T_2^{*n} \Psi^*, \quad \Psi T_2^m \left(zI - T_1\right)^{-1} \left(\bar{w} I - T_1\right)^{-1} T_2^n \Phi$$

при n, $m \in \mathbb{Z}_+$. Зададим оператор U из H в H' формулами

$$U T_1^{n_1} T_2^{n_2} \Phi g = \left(T_1'\right)^{n_1} \left(T_2'\right)^{n_2} \Phi' g, \quad g \in E;$$

$$U T_1^{*n_1} T_2^{*n_2} \Psi^* f = \left(T_1'\right)^{*n_1} \left(T_2'\right)^{*n_2} \Psi'^* f, \quad f \in \tilde{E}; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

Унитарность U, как и выполнение условий унитарной эквивалентности, следует из совпадения приведенных выше выражений. Теорема доказана. ■

III. Характеристическая функция $S_1(z)$ коммутативного изометрического расширения V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10), помимо традиционной эрмитовой неотрицательности ядра $K(z,w)$ (31), обладает дополнительными свойствами, которые наследуются перестановочностью операторов T_1 и T_2. Предположим, что N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы, тогда имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &1) \quad S_1(z) N_1^{-1} \left(N_2 z + \Gamma\right) = \tilde{N}_1^{-1} \left(\tilde{N}_2 z + \Gamma\right) S_1(z), \\ &2) \quad K_{(z,w)}^{1,1} - \left(N_2^* \bar{w} + \Gamma^*\right) N_1^{*-1} K_{(z,w)}^{1,1} N_1^{-1} \left(N_2 z + \Gamma\right) \\ &\qquad = S_1^*(w) \tilde{\sigma}_2 S_1(z) - \sigma_2, \\ &3) \quad K_{(z,w)}^{2,2} - \left(\tilde{N}_2 \bar{w} + \tilde{\Gamma}\right) \tilde{N}_1^{-1} K_{(z,w)}^{2,2} \tilde{N}_1^{*-1} \left(\tilde{N}_2^* z + \tilde{\Gamma}^*\right) \\ &\qquad = \overset{+}{S}{}_1^*(w) \tau_2 \overset{+}{S}_1(z) - \tilde{\tau}_2, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\left\{K^{p,s}_{(z,w)}\right\}$ — соответствующие блоки ядра (31). Если соотношение сплетаемости 1) (35) следует из (28), то равенства 2) и 3) в (35) вытекают из законов сохранения 2) (20) и из 2) (24), соответственно, при условии, конечно, что имеют место (26) и (27).

Замечание 3. Приравнивая коэффициенты в (35) при одинаковых степенях мы получим дополнительные соотношения между внешними параметрами σ_s, N_s, τ_s, Γ и $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{N}_s$, $\tilde{\tau}_s$, $\tilde{\Gamma}$ расширения (10). В частности, совпадение коэффициентов при $z\bar{w}$ в 2) и 3) (35) приводит к равенствам

$$K^*\left(\tilde{\sigma}_2-\tilde{N}_2^*\tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\sigma}_1\tilde{N}_1^{-1}\tilde{N}_2\right)K=\sigma_2-N_2^*N_1^{*-1}\sigma_1N_1^{-1}N_2,$$

$$K\left(\tau_2-N_2N_1^{-1}\tau_1N_1^{*-1}N_2^*\right)K^*=\tilde{\tau}_2-\tilde{N}_2\tilde{N}_1^{-1}\tilde{\tau}_1\tilde{N}_1^{*-1}N_2^*.$$

Вероятно, это — не единственные соотношения зависимости между внешними параметрами расширения V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10).

IV. Ниже мы займемся описанием того класса функций $S_1(z)$, которые являются характеристическими функциями расширения V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10).

Теорема 9. *Предположим, что оператор-функция $S_1(z)$, отображающая E в $\tilde{E}$, такова, что в гильбертовом пространстве E существуют такие операторы σ_s, τ_s, N_s, Γ, и соответственно в пространстве $\tilde{E}$ операторы $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\tau}_s$, $\tilde{N}_s$, $\tilde{\Gamma}$, где σ_s, τ_s, $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\tau}_s$ самосопряжены, $s=1$, 2, а операторы N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы, причем выполняются следующие условия:*

1) Ядро $K(z,w)$ (31) является положительно-определенным, причем $S_1^+(z)=N_1^{*-1}S_1^*(\bar{z})\tilde{N}_1^*$.

2) Для функции $S_1(z)$ и блоков ядра $K(z,w)$ (31) выполняются соотношения (35).

3) Функция $S_1(z)$ и ядро $K(z,w)$ аналитичны по z и $\bar{w}$ в области $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|\geq R\}$ для некоторого $R>>1$, причем $S_1(\infty)\neq 0$ и $K(\infty,\infty)\neq 0$.

Тогда существует гильбертово пространство H и коммутативная система ограниченных операторов T_1, T_2 в H, что для ее коммутативного расширения V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10) справедливы соотношения 1)–5) (11) с заданными выше операторами $\{\sigma_s,\tau_s,N,\Gamma\}$ и $\left\{\tilde{\sigma}_s,\tilde{\tau}_s,\tilde{N}_s,\tilde{\Gamma}\right\}$, причем характеристическая функция расширения V_1 оператора T_1 совпадает с $S_1(z)$.

Доказательство. Зададим на декартовом произведении $D\times(E\oplus\tilde{E})$ вектор-функцию e_zh, носитель которой сосредоточен в точке z, а $h^T=(u;v)$, где $u\in E$, $v\in\tilde{E}$. Определим на множестве линейных формальных комбинаций $\sum\limits_{1}^{N} e_{z_k} h_k$, $N<\infty$ метрику при помощи ядра $K(z,w)$ (2.7)

$$\langle e_z h, e_w g\rangle_K = \langle K(z,w)h, g\rangle_{E\oplus\tilde{E}}.$$

После замыкания и факторизации по ядру данной метрики получим гильбертово пространство H. Через H_E и $H_{\tilde{E}}$ обозначим подпространства в H, порождаемые элементами $e_z(u;0)^T = e_z u$ и $e_z(0;v)^T = e_z v$, соответственно.

Вначале определим расширения V_1 и V_2 на $H_E\oplus E$ следующим образом:

$$V_1\begin{bmatrix} e_z u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z e_z u \\ S_1(z)u \end{bmatrix}; \quad V_2\begin{bmatrix} e_z u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_z N_1^{-1}\left(N_2 z+\Gamma\right)u \\ S_1(z)u \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где $u\in E$. Легко видеть, что для V_s (36) будут выполняться соотношения 1) (11) в силу вида блока $K^{1,1}(z,w)$ ядра $K(z,w)$ (31) и равенства 2) (35). Аналогичным образом зададим $\overset{+}{V}_s$ на $H_{\tilde{E}}\oplus\tilde{E}$, а именно, пусть

$$\overset{+}{V}_1\begin{bmatrix} e_z v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z e_z v \\ \overset{+}{S}_1(z)v \end{bmatrix}, \quad \overset{+}{V}_2\begin{bmatrix} e_z v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_z N_1^{*-1}\left(\tilde{N}_2^* z+\tilde{\Gamma}^*\right)v \\ \overset{+}{S}_1(z)v \end{bmatrix}, \tag{37}$$

где $\overset{+}{S}_1(z) = N_1^{*-1} S_1^*(\bar{z})\tilde{N}_1^*$, а $v\in\tilde{E}$. Для операторов $\overset{+}{V}_s$ (37) также будут выполняться соотношения 2) (11), что легко следует из вида блока $K^{2,2}(z,w)$ ядра $K(z,w)$ (31) и соотношения 3) (35).

Важным обстоятельством является то, что имеет место равенство

$$\left\langle \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{N}_s \end{bmatrix} V_s \begin{bmatrix} e_z u \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e_w v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_K = \left\langle \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z u \\ u \end{bmatrix}, \overset{+}{V}_s \begin{bmatrix} e_w v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_K, \tag{38}$$

которое легко вытекает из соотношения сплетаемости 1) (35). Это равенство позволяет корректным образом продолжить V_s (36), как и $\overset{+}{V}_s$ (37), на все $H\oplus E$ (соответственно на $H\oplus\tilde{E}$); действительно, из (38) следует (см. (16)), что

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{N}_s \end{bmatrix} V_s\Big|_{H\oplus E} = \overset{+}{V}{}_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_s \end{bmatrix}_{H\oplus E}.$$

Нетрудно проверить, что в результате такого продолжения для V_s (36) и $\overset{+}{V}_s$ (37) будут выполняться условия 1) и 2) (11). Из формул (36)–(37) следует, что операторы T_s, Φ, Ψ, K (блочные элементы V_s и $\overset{+}{V}_s$, $s=1,2$) имеют вид

$$T_1 e_z u = z e_z u - e_0 u, \quad T_1 e_z v = \frac{1}{z}\left\{e_z v - e_0 \tau_1 \overset{+}{S}_1(z)v\right\},$$

$$T_1^* e_z v = z e_z v - e_0 v, \quad T_1^* e_z u = \frac{1}{z} \left\{ e_z u - e_0 \tilde{\sigma}_1 S_1(z) u \right\},$$
$$T_2 e_z u = e_z \left[N_1^{-1} \left(N_2 z + \Gamma \right) \right] u - e_0 N_1^{-1} N_2 u$$
$$T_2 e_z \left[\tilde{N}_1^{*-1} \left(\tilde{N}_2^* z + \tilde{\Gamma}^* \right) \right] v = e_z v - e_0 \tau_1 \overset{+}{S_1} (z) v,$$
$$T_2^* e_z v = e_z \left[\tilde{N}_1^{*-1} \left(\tilde{N}_2^* z + \tilde{\Gamma}^* \right) \right] v - e_0 \tilde{N}_1^{*-1} \tilde{N}_2^* v,$$
$$T_2^* e_z \left[N_1^{-1} \left(N_2 z + \Gamma \right) \right] u = e_z u - e_0 \tilde{\sigma}_2 S_1(z) u,$$
$$K = S_1(\infty), \quad \Psi e_z u = \left[S_1(z) - S_1(\infty) \right] u,$$
$$\Psi e_z v = \frac{1}{z} \tilde{N}_1^{*-1} \left\{ \tilde{\tau}_1 - K \tau_1 \overset{+}{S_1} (z) \right\} v, \quad \Psi^* v = e_0 \tilde{N}_1^{*-1} v,$$
$$\Phi u = e_0 N_1^{-1} u, \quad \Phi^* e_z v = \left(\overset{+}{S_1} (z) - \overset{+}{S_1} (\infty) \right) v,$$
$$\Phi^* e_z u = \frac{1}{z} N_1^{*-1} \left\{ \sigma_1 - K^* \tilde{\sigma}_1 S_1(z) \right\} u, \tag{39}$$

при этом $e_0 f = s - \lim\limits_{z\to\infty} z e_z f \in H$, где $f^T = (u; v) \in E \oplus \tilde{E}$. Нетрудно убедиться в том, что данный предел существует и принадлежит пространству H в виду аналитичности $K(z,w)$ (31) в $D \times D$. Наконец, тривиальная проверка показывает, что выполняются соотношения 3)–5) (11) и, кроме того, характеристическая функция расширения V_1 оператора T_1 совпадает с $S_1(z)$ (в силу (36)). ■

Замечание 4. Из теорем 8 и 9 следует, что в случае обратимости операторов N_1 и $\tilde{N}_1$ совокупность

$$\left\{ S_1(z); \sigma_s; \tau_s; N_s; \Gamma; \tilde{\sigma}_s; \tilde{\tau}_s; \tilde{N}_s; \tilde{\Gamma} \right\}_{(s=1,2)}$$

является полным набором инвариантов коммутативной системы операторов T_1, T_2.

V. Обратимся теперь к формулам (39) и зададим операторы N_s, $s = 1, 2$, и Γ на вектор-функциях $e_z u$ следующим образом: $N_s e_z u = e_z N_s u$, $s = 1, 2$, $\Gamma e_z u = e_z \Gamma u$. Легко видеть, что из (39) следует, что

$$\left\{ N_2 T_1 - N_1 T_2 + \Gamma \right\} e_z u = 0 \tag{40}$$

$\forall e_z u \in H_E$ $(\subseteq H)$. Затем, в случае $\dim E < \infty$, из очевидного равенства

$$\left\{ N_2 z_1 - N_1 z_2 + \Gamma \right\}^{-1} = \frac{1}{\mathbb{Q}(z_1, z_2)} B(z_1, z_2),$$

где $\mathbb{Q}(z_1, z_2)$ — полином (30), а $B(z_1, z_2)$ — матричнозначный многочлен, образованный алгебраическими дополнениями пучка $N_2 z_1 - N_1 z_2 + \Gamma$, следует, что

$$\mathbb{Q}(z_1, z_2)\, I_E = B\,(z_1, z_2)\,\{N_2 z_1 - N_1 z_2 + \Gamma\}\,. \tag{41}$$

Поэтому из (40) имеем, что $\mathbb{Q}(T_1, T_2)\, f = 0$ для любого из векторов f из H_E. Аналогичные рассуждения, примененные к операторам T_1^*, T_2^* (39), приводят к тому, что $\bar{\tilde{\mathbb{Q}}}\,(T_1^*, T_2^*)\, f' = 0$ для любых $f' \in H_{\tilde{E}}$, где $\tilde{\mathbb{Q}}\,(z_1, z_2)$ имеет вид (30), а черта означает, что $\bar{\tilde{\mathbb{Q}}}\,(z_1, z_2)$ имеет комплексно-сопряженные коэффициенты, $\bar{\tilde{\mathbb{Q}}}\,(z_1, z_2) = \overline{\tilde{\mathbb{Q}}\,(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}$.

Из (39) вытекает, что

$$\begin{gathered} T_1 e_z v = e_z v - e_0 \tau_1 \overset{+}{S_1}(z) v, \\ T_2 e_z \left[\tilde{N}_1^{*-1}\left(\tilde{N}_2^* z + \tilde{\Gamma}^*\right)\right] v = e_z v - e_0 \tau_2 \overset{+}{S_1}(z) v; \end{gathered} \tag{42}$$

следовательно,

$$T_1 e_z z v - T_2 e_z \left[\tilde{N}_1^{*-1}\left(\tilde{N}_2^* z + \tilde{\Gamma}^*\right)\right] v = e_0\,(\tau_2 - \tau_1)\,\overset{+}{S_1}(z) v.$$

Таким образом,

$$T_1 e_z v - T_2 e_z \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{N}_2^* v - T_2 e_z \frac{1}{z}\tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\Gamma}^* v = e_0 \frac{1}{z}\,(\tau_2 - \tau_1)\,\overset{+}{S_1}(z) v;$$

используя теперь первое соотношение в (42), получим, что

$$T_1 e_z v - T_2 e_z \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{N}_2^* v - T_2 T_1 e_z \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\Gamma}^* v = e_0 \frac{1}{z}\,(\tau_2 - \tau_1)\,\overset{+}{S_1}(z) v$$

$$-T_2 e_0 \frac{1}{z}\tau_1 \overset{+}{S_1}(z)\tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\Gamma}^* v.$$

Следовательно,

$$\left\{T_2 \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{N}_2^* - T_1 + T_1 T_2 \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\Gamma}^*\right\} e_z v \in H_E, \tag{43}$$

где, как и выше, операторы $\tilde{N}_s^*$, $s = 1, 2$, и $\tilde{\Gamma}^*$ на вектор-функциях $e_z v$ действует по формулам $\tilde{N}_s^* e_z v = e_z \tilde{N}_s^* v$, $s = 1, 2$, и $\tilde{\Gamma}^* e_z v = e_z \tilde{\Gamma}^* v$. Аналогично (41) для пучка $\tilde{N} z_2 - \tilde{N}_1^* z_1 + \tilde{\Gamma}^* z_1 z_2$ получим, что

$$\tilde{\mathbb{Q}}^*\,(z_1, z_2)\, I_{\tilde{E}} = B^*\,(z_1, z_2)\, N_1^*\left(z_2 \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{N}_2^* - z_1 + z_1 z_2 \tilde{N}_1^{*-1}\tilde{\Gamma}^*\right), \tag{44}$$

где $B^*(z_1, z_2)$ — матричнозначный полином, образованный алгебраическими дополнениями пучка $\tilde{N}_1^* z_1 - \tilde{N}_2^* z_2 - \tilde{\Gamma}^* z_1 z_2$, при этом многочлен $\tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2)$ имеет вид

$$\tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2) = \det\left\{\tilde{N}_2^* z_2 - \tilde{N}_1^* z_1 + z_1 z_2 \tilde{\Gamma}^*\right\}, \tag{45}$$

и кроме того очевидно, что

$$\tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2) = (z_1 z_2)^{\tilde{r}}\, \overline{\tilde{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}\right)}, \tag{46}$$

где $\tilde{r} = \dim \tilde{E}$, а $\tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2)$ имеет вид (30). Пусть $r = \tilde{r}$, где $r = \dim E$, тогда, считая, что матричные коэффициенты $B^*(T_1, T_2)$ действуют в H_E аналогично операторам N_s, $s = 1, 2$, и Γ, мы получим, что $\tilde{\mathbb{Q}}(T_1, T_2)\, e_z v \in H_E$, и, значит, $\mathbb{Q}(T_1, T_2)\, \tilde{\mathbb{Q}}^*(T_1, T_2)\, f = 0\ \forall f \in H_F$. Рассмотрим теперь полином

$$\mathbb{P}(z_1, z_2) = \mathbb{Q}(z_1, z_2) \cdot \tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2), \tag{47}$$

где многочлены $\mathbb{Q}(z_1, z_2)$ и $\tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2)$ имеют соответственно вид (30) и (46). Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 10. *Предположим, что изометрическое коммутативное расширение V_s, $\overset{+}{V}_s$ (10) коммутативной системы линейных операторов T_1, T_2 является простым $H = H_1$ (32), причем операторы N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы и $\dim E = \dim \tilde{E} < \infty$. Тогда*

$$\mathbb{P}(T_1, T_2)\, f = 0 \tag{48}$$

для любого $f \in H$, где полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ имеет вид (47), а многочлены $\mathbb{Q}(z_1, z_2)$ и $\tilde{\mathbb{Q}}^*(z_1, z_2)$ заданы формулами (30) и (46), соответственно.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что если характеристическая функция $S_1(z)$ обратима хотя бы в одной точке голоморфности $z \in \mathbb{C}$ и пространства E и $\tilde{E}$ конечномерны, то $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$, и кроме того кривые (30) совпадают, $\mathbb{Q}(z_1, z_2) = \tilde{\mathbb{Q}}(z_1, z_2)$. Поэтому в данном случае полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ (47) имеет вид

$$\mathbb{P}(z_1, z_2) = \mathbb{Q}(z_1, z_2)\, \mathbb{Q}^*(z_1, z_2), \tag{49}$$

где многочлен $\mathbb{Q}^*(z_1, z_2)$ строится по полиному $\mathbb{Q}(z_1, z_2)$ согласно правилу (46). Очевидно, что полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ обладает следующей симметрией относительно единичной окружности $\mathbb{T}$:

$$\overline{\mathbb{P}\left(\frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}\right)} = (z_1 z_2)^{-2r}\, \mathbb{P}(z_1, z_2), \tag{50}$$

в силу определения $\mathbb{Q}^*(z_1, z_2)$ (46).

При изучении коммутирующих систем линейных ограниченных несамосопряженных операторов М.С. Лившиц [2] показал, что в случае конечномерности дефектного пространства $\operatorname{span}\{(A_1 - A_1^*) H + (A_2 - A_2^*) H\}$ всегда существует так называемая дискриминантная кривая, полином $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ такой, что $\mathbb{P}(A_1, A_2) = 0$. Этот важный результат имеет далеко идущие последствия. Отметим, что данный аналог теоремы Гамильтона–Кэли для операторов T_1 и T_2 несколько отличается от соответствующей теоремы М.С. Лившица [2] и учитывает специфику симметрии относительно единичной окружности $(z \to \dfrac{1}{\bar{z}})$.

Список литературы

[1] *М.С. Лившиц*, Коммутирующие операторы и порождаемые ими решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. — *Сообщ. А ГССР* (1978), т. 91, № 2, с. 281–284.

[2] *M.S. Livšic, N. Kravitsky, A. Markus, and V. Vinnikov*, Theory of commuting nonselfadjoint operators. Math. and Appl., v. 332, Kluver Acad. Publ. Groups, Dordrecht (1995).

[3] *В.А. Золотарев*, Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности. — *Мат. сб.* (1990), т. 181, № 7, с. 965–995.

[4] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970).

[5] *S. Parrot*, Unitary dilations for commuting contractions. Preprint, University of Boston No 3142, Boston (1969).

[6] *В.А. Золотарев*, Модельные представления коммутирующих систем линейных операторов. — *Функц. анализ и его прил.* (1988), № 22, с. 66–68.

[7] *М.С. Бродский*, Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. — *Успехи мат. наук* (1978), т. 33, № 4, с. 141–168.

[8] *В.А. Золотарев*, Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Изд-во Харьк. ун-та *MagPress*, Харьков (2003).

[9] *Ch. Davis*, J-unitary dilation of general operator. — *Acta Sci. Math. Szeged.* (1970), No. 31, p. 75–86.

[10] *А.В. Кужель*, J-самосопряженнные и J-унитарные дилатации линейных операторов. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 75–76.

[11] *М.С. Лившиц, А.А. Янцевич*, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков (1971).

Isometric expansions of commutative systems of linear operators

V.A. Zolotarev

The commutative isometric expansion $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^{2}$ for a commutative system $\{T_1, T_2\}$ of linear bounded operators in Hilbert space H is constructed. Building of the isometric dilation for two parameter semigroup $T(n) = T_1^{n_1} T_2^{n_2}$, where $n = (n_1; n_2)$, is based on characteristic qualities of given commutative isometric expansion. Main properties of a characteristic function $S(z)$, corresponding to the commutative isometric expansion $\left\{V_s, \overset{+}{V}_s\right\}_{s=1}^{2}$ are described. An analogue of Hamilton–Cayley theorem is proved. It is shown that there exists polynomial $\mathbb{P}(z_1, z_2)$ such as $\mathbb{P}(T_1, T_2) = 0$ when the defect subspaces of system $\{T_1, T_2\}$ are of finite dimension.