Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 3, с. 302–313

Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке

И.М. Набиев

*Факультет прикладной математики и кибернетики
Бакинский государственный университет
ул. З. Халилова 23, Баку, AZ1148, Азербайджан*
E-mail:ibrahimn@aport.ru

Статья поступила в редакцию 2 января 2004 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Исследуется обратная задача спектрального анализа для оператора диффузии с регулярными неразделенными граничными условиями.

Досліджується обернена задача спектрального аналізу для оператора дифузії з регулярними нерозділеними граничними умовами.

1. Введение

Многие вопросы теории обратных задач спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля полностью исследованы в работах [1–4] (там же имеются исторический обзор и обширный список литературы). Однако для дифференциального уравнения диффузии

$$-y''(x) + [q(x) + 2\lambda p(x)]y(x) = \lambda^2 y(x),\ 0 \le x \le \pi, \tag{1}$$

являющегося естественным обобщением уравнения Штурма–Лиувилля, обратные спектральные задачи мало изучены. Задачи о восстановлении этого уравнения по спектрам двух краевых задач решены в [5–7], где обобщаются на случай $p(x) \not\equiv 0$ соответствующие результаты работ [8–10]. Теорема единственности решения обратной задачи по трем спектрам для уравнения (1) доказана в работе [11].

Рассмотрим краевую задачу, порожденную уравнением (1) с вещественными коэффициентами $q(x) \in L_2[0,\pi], p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ и граничными условиями

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0,\ \ \overline{\omega} y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 34B24, 34L05.

где ω — комплексное и α — действительное числа, причем $|\omega| = 1$. Эту задачу будем обозначать через $L(\omega, \alpha)$.

В данной статье исследуется обратная задача восстановления таких краевых задач. Получены достаточные условия для того, чтобы две последовательности вещественных чисел были спектрами задач вида $L(\omega, \alpha_1), L(\omega, \alpha_2)$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$, приведены теоремы единственности решения обратной задачи. Отметим, что обратные задачи в случае $p(x) \equiv 0$ в различных постановках ранее полностью решены (см. [12, 13] и приведенную там библиографию).

2. О представлении некоторых целых функций

Следующие утверждения играют важную роль при доказательстве основной теоремы обратной задачи.

Лемма 1. *Для того чтобы функции $F(z)$ и $G(z)$ допускали представления*

$$F(z) = \sin \pi(z-a) + A_0 \pi \frac{4(z-a)}{4(z-a)^2 - 1} \cos \pi(z-a) + \frac{f(z-a)}{z-a},$$

$$G(z) = \cos \pi(z-a) + B_0 \pi \frac{\sin \pi(z-a)}{z-a} + \frac{g(z-a)}{z-a},$$

где

$$f(z) = a_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{itz} dt,\ \tilde{f}(t) \in L_2[-\pi, \pi],\ f(0) = f'(0) = 0, \tag{3}$$

$$g(z) = a_1 \cos \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(t) e^{itz} dt,\ \tilde{g}(t) \in L_2[-\pi, \pi],\ g(0) = 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$F(z) = \pi(z-a) \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{u_k - z}{k},\ u_k = k + a - \frac{A_0}{k} + \frac{\delta_k}{k},$$

$$G(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{v_k - z}{k^*},\ v_k = k^* + a - \frac{B_0}{k} + \frac{\tilde{\delta}_k}{k},$$

где a, a_0, a_1, A_0, B_0 — некоторые числа, $k^* = k - \frac{1}{2}\operatorname{sign} k$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}' \{|\delta_k|^2 + |\tilde{\delta}_k|^2\} < \infty$, а штрихом у знака произведения или суммы здесь и далее отмечено, что отсутствует член с номером $k = 0$.

Эта лемма является обобщением леммы 3.4.2 монографии [1] и приведена в [6](см. также [14]).

Лемма 2. *Для целых функций*

$$l(z)=\pi^2(z-\alpha_0^-)(\alpha_0^+-z)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(\alpha_k^- - z)(\alpha_k^+ - z)}{4k^2},$$

$$m(z)=4\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\beta_k^- - z)(\beta_k^+ - z)}{(2k+1)^2},$$

$$n(z)=(M+1)\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma_k^- - z)(\gamma_k^+ - z)}{4k^2-\varphi^2}$$

имеют место следующие представления:

$$l(z)=2[\cos\pi(z-a)-1]+A\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a}+\frac{f_1(z-a)}{z-a},$$

$$m(z)=2[\cos\pi(z-a)+1]+A\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a}+\frac{f_2(z-a)}{z-a},$$

$$n(z)=M+\cos\pi(z-a)+B\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a}+\frac{f_3(z-a)}{z-a},$$

где $\alpha_k^\pm = 2k+a+\frac{A^\pm}{2k}+\frac{\delta_k^\pm}{k}$, $\beta_k^\pm = 2k+1+a+\frac{A^\mp}{2k+1}+\frac{\tilde\delta_k^\pm}{k}$, $\gamma_k^\pm = 2k+a\pm\varphi+\frac{B}{2k\pm\varphi}+\frac{\theta_k^\pm}{k}$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\{|\delta_k^\pm|^2+|\tilde\delta_k^\pm|^2+|\theta_k^\pm|^2\}<\infty$, $f_1(z)=M_1\sin^2\frac{\pi z}{2}+m_1(z)$, $f_2(z)=M_2\cos^2\frac{\pi z}{2}+m_2(z)$, $f_3(z)=M_3(M+\cos\pi z)+m_3(z)$, $m_p(z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde m_p(t)e^{itz}dt$, $\tilde m_p(t)\in L_2[-\pi,\pi]$, $m_p(0)=0$ $(p=1,2,3)$, $M\neq\pm1$, $\varphi=\frac{1}{\pi}\arccos(-M)$, $A=A^++A^-$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$l(z)=\frac{4(z-\alpha_0^-)(\alpha_0^+-z)}{(z-a)^2}l^-(z)l^+(z), \tag{5}$$

$$m(z)=4m^-(z)m^+(z), \tag{6}$$

$$n(z)=\frac{2(z-\gamma_0^-)(\gamma_0^+-z)}{z^-z^+}n^-(z)n^+(z), \tag{7}$$

где

$$l^\pm(z)=\frac{\pi(z-a)}{2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\alpha_k^\pm - z}{2k},\ m^\pm(z)=(\beta_0^\pm - z)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\beta_k^\pm - z}{2k^*},$$

$$n^{\pm}(z)=\frac{\pi z^{\pm}}{2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\gamma_k^{\pm}-z}{2k},\ z^{\pm}=z-a\mp\varphi.$$

Согласно лемме 1

$$l^{\pm}(z)=\sin\frac{\pi(z-a)}{2}-\frac{A^{\pm}\pi}{2}\cdot\frac{z-a}{(z-a)^2-1}\cos\frac{\pi(z-a)}{2}+\frac{1}{z-a}f^{\pm}\left(\frac{z-a}{2}\right),$$

$$m^{\pm}(z)=\cos\frac{\pi(z-a)}{2}-\frac{A^{\mp}\pi}{2(z-a)}\sin\frac{\pi(z-a)}{2}+\frac{1}{z-a}g^{\pm}\left(\frac{z-a}{2}\right),$$

$$n^{\pm}(z)=\sin\frac{\pi z^{\pm}}{2}-\frac{B\pi}{2}\cdot\frac{z^{\pm}}{(z^{\pm})^2-1}\cos\frac{\pi z^{\pm}}{2}+\frac{1}{z^{\pm}}f_1^{\pm}\left(\frac{z^{\pm}}{2}\right),$$

где функции $f^{\pm}(z), f_1^{\pm}(z)$ и $g^{\pm}(z)$ обладают свойствами, аналогичными (3), (4). Подставляя эти выражения в правые части (5)–(7) и используя теорему Пели–Винера [15, с. 47], получаем требуемые представления для функций $l(z)$, $m(z)$ и $n(z)$. Лемма доказана.

3. Достаточные условия разрешимости обратной задачи

В дальнейшем будем считать, что j принимает значения 1 и 2. Сначала рассмотрим случай $\omega=-1$.

Теорема 1. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел $\left\{\alpha_{1,k}^{\pm}\right\}$ и $\left\{\alpha_{2,k}^{\pm}\right\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots,$ были соответственно спектрами краевых задачи вида $L(-1,\alpha_1)$ и $L(-1,\alpha_2)$, у которых $\alpha_1<\alpha_2$, $p(0)=p(\pi)$, достаточно выполнение следующих условий:*

1) имеют место асимптотические формулы

$$\alpha_{j,k}^{\pm}=2k+a+\frac{A_j^{\pm}}{2k}+\frac{\delta_{j,k}^{\pm}}{k}\ \text{при}\,|k|\to\infty,$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left|\delta_{j,k}^{\pm}\right|^2<\infty$, $A_j^{\pm}=C+C_j\pm|C_j|$, C, C_j *— вещественные числа, причем* $C_1<C_2$;

2) числа $\alpha_{j,k}^{\pm}$ удовлетворяют системе неравенств

$$0<\alpha_{1,0}^{+}<\alpha_{2,0}^{+}<\alpha_{1,1}^{-}\le\alpha_{2,1}^{-}\le\alpha_{1,1}^{+}\le\alpha_{2,1}^{+}<\alpha_{1,2}^{-}\le\alpha_{2,2}^{-}\le\dots,$$

$$0>\alpha_{1,0}^{-}>\alpha_{2,0}^{-}>\alpha_{1,-1}^{+}\ge\alpha_{2,-1}^{+}\ge\alpha_{1,-1}^{-}\ge\alpha_{2,-1}^{-}>\alpha_{1,-2}^{+}\ge\alpha_{2,-2}^{+}\ge\dots,$$

причем, если два последовательных элемента из $\left\{\alpha_{1,k}^{\pm}\right\}$ $\left(\left\{\alpha_{2,k}^{\pm}\right\}\right)$ совпадают, то элемент из $\left\{\alpha_{2,k}^{\pm}\right\}$ $\left(\left\{\alpha_{1,k}^{\pm}\right\}\right)$, который совпадает с этими двумя *элементами, отличается от других элементов последовательности* $\left\{\alpha^{\pm}_{2,k}\right\}$ $\left(\left\{\alpha^{\pm}_{1,k}\right\}\right)$;

$$3)\ l_1(k+a)-l_2(k+a)=\frac{(-1)^k\tilde{C}}{k^2}+\frac{\theta_k}{k^2},\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\theta_k^2<\infty; \tag{8}$$

где

$$l_j(z)=\pi^2(z-\alpha^-_{j,0})(\alpha^+_{j,0}-z)\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(\alpha^-_{j,k}-z)(\alpha^+_{j,k}-z)}{4k^2}, \tag{9}$$

$\tilde{C}=2\pi^2C\,(C_2-C_1)$;

$$4)\ u(0)>0,\quad |u\,(\lambda_k)|\geq 2,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'k^2\left(u^2\,(\lambda_k)-4\right)<\infty,$$

где

$$u(z)=\frac{C_2l_1(z)-C_1l_2(z)}{C_2-C_1}+2, \tag{10}$$

λ_k, $k=\pm1,\,\pm2,\,\ldots,$ — *нули функции* $l_1(z)-l_2(z)$.

Доказательство. Согласно лемме 2 функция $l_j(z)$, построенная по заданной последовательности $\left\{\alpha^{\pm}_{j,k}\right\}$ с помощью формулы (9), допускает представление

$$l_j(z)=2[\cos\pi(z-a)-1]+A_j\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a}+\frac{p_j(z-a)}{z-a}, \tag{11}$$

где $A_j=A_j^-+A_j^+$, $p_j(z)=B_j\sin^2\frac{\pi z}{2}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{p}_j(t)e^{itz}dt$, $\tilde{p}_j(t)\in L_2[-\pi,\pi]$, $p_j(0)=0$. Ясно, что $l_1(k+a)-l_2(k+a)=\frac{p_1(k)-p_2(k)}{k}$. Отсюда в силу (8) получаем $p_1(k)-p_2(k)=\frac{(-1)^k\tilde{C}}{k}+\frac{\theta_k}{k}$. Из этого равенства согласно лемме Римана–Лебега следует, что $B_1-B_2=0$. Так как $t=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kt}{k}$ при $-\pi<t<\pi$ (см., напр., [16, с. 449]) и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}'\theta_k^2<\infty$, то из разложения

$$\tilde{p}_1(t)-\tilde{p}_2(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[p_1(k)-p_2(k)\right]e^{-ikt}$$

$$=\frac{\tilde{C}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^k}{k}e^{-ikt}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\theta_k}{k}e^{-ikt}=\frac{\tilde{C}it}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\theta_k}{k}e^{-ikt}$$

вытекает, что функция $\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_2(t)$ имеет суммируемую с квадратом производную на $(-\pi,\ \pi)$.

Рассмотрим функцию

$$s(z) = \frac{l_1(z) - l_2(z)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \tag{12}$$

где $\alpha_j = 2\pi C_j$. Принимая во внимание (11), применяя формулу интегрирования по частям и используя теорему Пели–Винера, получаем

$$(z-a)s(z) = \sin\pi(z-a) + \frac{4M_1(z-a)}{4(z-a)^2-1}\cos\pi(z-a) + \frac{\psi(z-a)}{z-a},$$

где $M_1 = \frac{\tilde{p}_1(\pi)-\tilde{p}_1(-\pi)-\tilde{p}_2(\pi)+\tilde{p}_2(-\pi)}{\alpha_1-\alpha_2}$, $\psi(z) = D\sin\pi z + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{\psi}(t)e^{itz}dt$, $\psi(t) \in L_2[-\pi,\pi]$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, D — некоторая постоянная. Отсюда и из (12) видно, что

$$l_1(k+a) - l_2(k+a) = (\alpha_1-\alpha_2)s(k+a)$$

$$= \frac{4(\alpha_1-\alpha_2)M_1(-1)^k}{4k^2-1} + \frac{r_k}{k^2}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' r_k^2 < \infty.$$

Сравнивая это равенство с (8), имеем $M_1 = -C\pi$. В силу леммы 1 нули λ_k, $k = \pm1, \pm2, \dots$, функции $(z-a)s(z)$ при $|k| \to \infty$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\lambda_k = k + a - \frac{C}{k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \tau_k^2 < \infty. \tag{13}$$

В силу (10) и (11) имеем

$$u(z) = 2\cos\pi(z-a) + 2C\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a} + \frac{p_3(z-a)}{z-a}, \tag{14}$$

где $p_3(z) = B_1\sin^2\frac{\pi z}{2} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{p}_3(t)e^{itz}dt$, $\tilde{p}_3(t) \in L_2[-\pi,\pi]$.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^2\left[u^2(\lambda_k) - 4\right]$ следует, что $u^2(\lambda_k) - 4 = o(k^{-2})$ при $|k| \to \infty$. Отсюда, принимая во внимание (13) и (14), получаем $B_1 = 0$.

Из второго и четвертого условий теоремы в силу (9), (12) следует, что числа $\alpha_{1,k}^{\pm}$, $\alpha_{2,k}^{\pm}$ и λ_k удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_{1,0}^{+} < \alpha_{2,0}^{+} < \lambda_1 < \alpha_{1,1}^{-} \le \alpha_{2,1}^{-} \le \lambda_2 \le \alpha_{1,1}^{+} \le \alpha_{2,1}^{+} < \dots\,, \\ &0 > \alpha_{1,0}^{-} > \alpha_{2,0}^{-} > \lambda_{-1} > \alpha_{1,-1}^{+} \ge \alpha_{2,-1}^{+} \ge \lambda_{-2} \ge \alpha_{1,-1}^{-} \ge \alpha_{2,-1}^{-} > \dots\,, \end{aligned} \tag{15}$$

Ввиду (12) имеет место $l_1(\lambda_k) = l_2(\lambda_k)$. Поэтому из (10) получаем, что $u(\lambda_k) = l_j(\lambda_k) + 2$. Согласно (9) и второму условию теоремы справедливо неравенство $\Delta_j(0) > 0$. Тогда четвертое условие и неравенства (15) показывают, что

$$\ldots,\ u(\lambda_{-2}) \geq 2,\ u(\lambda_{-1}) \leq -2,\ u(\lambda_1) \leq -2,\ u(\lambda_2) \geq 2,\ \ldots .$$

Поэтому существует такое h_k, что

$$u(\lambda_k) = 2(-1)^k \mathrm{ch} h_k. \tag{16}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию $v(z)$ такую, что

$$|v(\lambda_k)| = \sqrt{u^2(\lambda_k) - 4}. \tag{17}$$

Отсюда с учетом (16) получаем $|v(\lambda_k)| = 2|\mathrm{sh} h_k|$. Пусть

$$v(\lambda_k) = 2\sigma_k |\mathrm{sh} h_k|, \tag{18}$$

где $\{\sigma_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — произвольная последовательность, членами которой являются числа -1, 0 и 1. Построим теперь функцию $v(z)$ следующим образом:

$$v(z) = 2s(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sigma_k |\mathrm{sh} h_k|}{(z - \lambda_k)\, s'(\lambda_k)}. \tag{19}$$

Из асимптотической формулы (13), условия $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^2 \left[u^2(\lambda_k) - 4\right] < \infty$ и соотношений (17), (18) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' (\lambda_k \mathrm{sh} h_k)^2 \leq C_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^2 \left[u^2(\lambda_k) - 4\right] < \infty \ \ (C_3 > 0)\,.$$

Тогда известно [6], что функция $v(z)$ является целой и допускает представление

$$v(z) = \frac{1}{z - a} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{it(z-a)} dt, \tag{20}$$

где $h(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t) dt = 0$.

Поскольку функция

$$s_1(z) = \frac{1}{2}[u(z) - v(z)] \tag{21}$$

согласно формулам (14) и (20) имеет вид

$$s_1(z) = \cos\pi(z-a) + C\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a} + \frac{p_4(z-a)}{z-a},$$

$\left(p_4(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{p}_4(t)e^{itz}dt,\ \tilde{p}_4(t) \in L_2[-\pi,\pi]\right)$, то в силу леммы 1 ее нули ν_k, $k = \pm1, \pm2, \dots$, удовлетворяют асимптотической формуле

$$\nu_k = k - \frac{1}{2}\mathrm{sign}\, k + a + \frac{C}{k} + \frac{\xi_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \xi_k^2 < \infty. \tag{22}$$

Полагая в (21) $z = \lambda_k$ и учитывая (16), (18), получим $s_1(\lambda_k) = (-1)^k \mathrm{ch} h_k - \sigma_k|\mathrm{sh} h_k| = (-1)^k \mathrm{ch} h_k\left[1 - (-1)^k\sigma_k|\mathrm{th} h_k|\right]$. Так как $|\mathrm{th} h_k| < 1$, то

$$s_1(\lambda_k) = (-1)^k. \tag{23}$$

Отметим, что до сих пор последовательность $\{\sigma_k\}$ была произвольной. Теперь покажем, что ее можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$s_1(0) > 0. \tag{24}$$

В силу (21) это неравенство равносильно следующему:

$$v(0) < u(0). \tag{25}$$

Так как $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ и $l_2(0) > l_1(0)$, то из (12) получаем $s(0) > 0$. Далее, ввиду (19) имеем

$$v(0) = 2s(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sigma_k|\mathrm{sh} h_k|}{-\lambda_k s'(\lambda_k)}.$$

Поэтому (25) равносильно неравенству

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{2\sigma_k|\mathrm{sh} h_k|}{-\lambda_k s'(\lambda_k)} < \frac{u(0)}{s(0)}. \tag{26}$$

Так как $u(0) > 0$ и $s(0) > 0$, то правая часть этого неравенства положительна. Следовательно, если взять, например, $\sigma_k = \mathrm{sign}\,(\lambda_k s'(\lambda_k))$, то очевидно, что неравенство (26) будет справедливым, поскольку левая часть будет отрицательной.

В силу (23) и (24) в каждом интервале $\dots, (\lambda_{-2}, \lambda_{-1}),\ (\lambda_{-1}, 0),\ (0, \lambda_1),\ (\lambda_1, \lambda_2), \dots$ лежит один и в силу асимптотической формулы (22) только один нуль $s_1(z)$. Значит, нули функций $s_1(z)$ и $s(z)$ перемежаются в следующем смысле:

$$\ldots < \lambda_{-2} < \nu_{-2} < \lambda_{-1} < \nu_{-1} < 0 < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \ldots \quad .$$

Далее, последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ подчиняются асимптотикам вида (13) и (22). Тогда согласно работе [6] существуют единственные вещественные функции $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ такие, что $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке $[0,\pi]$ одним и тем же уравнением $y'' + \left[\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)\right] y = 0$ и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{27}$$

и $y(0) = y'(\pi) = 0$, и, кроме того, $s(\lambda) = s(\lambda,\pi)$, $s_1(\lambda) = s'(\lambda,\pi)$, где $s(\lambda,x)$ — решение этого уравнения при начальных данных

$$s(\lambda,0) = s'(\lambda,0) - 1 = 0. \tag{28}$$

Легко убедиться, что спектры построенных краевых задач $L(-1,\alpha_1)$ и $L(-1,\alpha_2)$ совпадают с последовательностями $\left\{\alpha_{1,k}^{\pm}\right\}$ и $\left\{\alpha_{2,k}^{\pm}\right\}$. Теорема доказана.

Аналогичным образом устанавливаются достаточные условия разрешимости обратной задачи в случае $\omega = 1$.

Рассмотрим теперь случай $|\omega| = 1$ $(\omega \neq \pm 1)$. Сформулируем основную теорему обратной задачи для рассматриваемого случая, доказательство которой во многом аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел $\left\{\gamma_{1,k}^{\pm}\right\}$ и $\left\{\gamma_{2,k}^{\pm}\right\}$, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, были соответственно спектрами краевых задач вида $L(\omega,\alpha_1)$, $L(\omega,\alpha_2)$ $(\alpha_1 < \alpha_2,\ p(0) = p(\pi))$, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\gamma_k^{\pm} = 2k + a \pm \varphi + \frac{D_j}{2k} + \frac{\tau_{j,k}^{\pm}}{k}$, где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left|\tau_{j,k}^{\pm}\right|^2 < \infty$, φ, $D_j = C + C_j$ — вещественные числа, причем $C_1 < C_2$, $0 < \varphi < \frac{1}{2}$;

2) $\ldots < \gamma_{2,-1}^{+} < \gamma_{1,-1}^{+} < \gamma_{2,0}^{-} < \gamma_{1,0}^{-} < 0 < \gamma_{1,0}^{+} < \gamma_{2,0}^{+} < \gamma_{1,1}^{-} < \gamma_{2,1}^{-} < \ldots$;

3) $n_1(k+a) - n_2(k+a) = \frac{(-1)^k \tilde{C}}{k^2} + \frac{r_k}{k^2}$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2 < \infty$,

где $n_j(z) = 4\sin^2\frac{\pi\varphi}{2} \prod\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\gamma_{j,k}^{-} - z\right)\left(\gamma_{j,k}^{+} - z\right)}{4k^2 - \varphi^2}$;

4) $u_1(0) > 0$, $|u_1(\lambda_k)| \geq 2$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^2\big[u_1^2(\lambda_k) - 4\big] < \infty$,

где $u_1(z) = \frac{C_2 n_1(z) - C_1 n_2(z)}{C_2 - C_1} + 2\cos\pi\varphi$, λ_k — *нули функции* $n_1(z) - n_2(z)$.

З а м е ч а н и е. Доказательства теорем 1 и 2 дают также алгоритм восстановления соответствующих краевых задач. Из результатов работ [17, 18] следует, что условия этих теорем также являются необходимыми, если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (2), выполняется неравенство

$$\alpha|y(\pi)|^2 + \int\limits_0^\pi \Big[\big|y'(x)\big|^2 + q(x)|y(x)|^2\Big]dx > 0.$$

(Заметим, что это неравенство заведомо выполняется, если $\alpha \geq 0$, $q(x) > 0$.) Однако построенная вещественная функция $q(x)$ при доказательстве теорем 1 и 2 не обязана удовлетворять этому неравенству.

4. Теоремы единственности

Приведем теоремы единственности восстановления краевых задач типа $L(\omega,\alpha)$, доказательства которых вполне аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для операторов Штурма–Лиувилля (см. [13]).

Теорема 3. *Краевые задачи* $L(-1,\alpha_1)$, $L(-1,\alpha_2)$ *(или* $L(1,\alpha_1)$, $L(1,\alpha_2)$*) однозначно, с точностью до знака* $p(0) - p(\pi)$, *восстанавливаются, если известны их спектры и последовательность знаков* $\sigma_k = \operatorname{sign}(1 - |s'(\lambda_k,\pi)|)$, *где* $s(\lambda,x)$ — *решение уравнения (1) при начальных условиях (28),* λ_k, $k = \pm1, \pm2, \dots$, — *собственные значения краевой задачи (1), (27).*

Теорема 4. *Краевые задачи* $L(\omega,\alpha_1)$, $L(\omega,\alpha_2)$ *при* $|\omega| = 1$, $\omega \neq \pm1$ *однозначно, с точностью до знака* $\operatorname{Im}\omega$ *и* $p(0) - p(\pi)$, *восстанавливаются своими спектрами и последовательностью знаков* $\{\sigma_k\}$.

Список литературы

[1] *В.А. Марченко*, Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев (1977).

[2] *Б.М. Левитан*, Обратные задачи Штурма–Лиувилля. Наука, Москва (1984).

[3] *E.Ya. Khruslov and D.G. Shepelsky*, Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory. — *Inverse Problems* (1994), v. 10, № 1, p. 1–37.

[4] *В.А. Юрко*, Обратные спектральные задачи и их приложения. Изд-во Сарат. пед. ин-та, Саратов (2001).

[5] *М.Г. Гасымов, Г.Ш. Гусейнов*, Определение оператора диффузии по спектральным данным. — *Докл. АН АзССР* (1981), т. 37, № 2, с. 19–23.

[6] *Г.Ш. Гусейнов*, Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале. — В сб.: *Спектральная теория операторов и ее приложения* (1986), вып. 7, с. 51–101.

[7] *И.М. Гусейнов, И.М. Набиев*, Об одном классе обратных задач для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля. — *Диф. ур.* (2000), т. 36, № 3, с. 418–420.

[8] *М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан*, Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. — *Успехи мат. наук* (1964), т. 19, № 2, с. 3–63.

[9] *В.А. Марченко, И.В. Островский*, Характеристика спектра оператора Хилла. — *Мат. сб.* (1975), т. 97, № 4, с. 540–606.

[10] *М.Г. Гасымов, И.М. Гусейнов, И.М. Набиев*, Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями. — *Сиб. мат. журн.* (1990), т. 31, № 6, с. 46–54.

[11] *В.Н. Пивоварчик*, Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач. — *Функц. анализ и его прил.* (1999), т. 33, № 3, с. 87–90.

[12] *О.А. Плаксина*, Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями. — *Мат. сб.* (1986), т. 131, № 1, с. 3–26.

[13] *И.М. Гусейнов, И.М. Набиев*, Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля. — *Мат. сб.* (1995), т. 186, № 5, с. 35–48.

[14] *Т.В. Мисюра*, Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1979), т. 31, с. 102–109.

[15] *Б.Я. Левин*, Целые функции. Изд-во МГУ, Москва (1971).

[16] *Г.М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Наука, Москва (1969).

[17] *И.М. Набиев*, Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля. — *Мат. заметки* (2000), т. 67, № 3, с. 369–381.

[18] *И.М. Набиев*, Асимптотические формулы для спектра квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля. — Матер. конф. “Вопросы функц. анализа и мат. физики”. БГУ, Баку (1999), с. 374–376.

Inverse spectral problem for diffusion operator on the segment

I.M. Nabiev

The inverse problem of the spectral analysis for diffusion operator with regular nonseparated boundary conditions is studied.