Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 4, с. 380–407

К теореме И.И. Привалова о преобразовании Гильберта липшицевых функций

Ю.С. Белов, В.П. Хавин

Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет
пл. Библиотечная, 2, Петродворец, 198504, Россия

E-mail:j_b_juri_belov@mail.ru
havin@VH1621.spb.edu

Статья поступила в редакцию 26 сентября 2004 г.

Известно, что преобразование Гильберта $h(f)$ ограниченной функции f, удовлетворяющей условию Липшица (порядка 1) на $\mathbb{R}$, равномерно непрерывно (h понимается как сингулярный интегральный оператор с ядром Коши, регуляризованным в бесконечности, так что h определен на всех функциях, суммируемых на $\mathbb{R}$ по мере Пуассона). В статье показано, что эта теорема утрачивает силу (в весьма сильном смысле) при отказе от предположения ограниченности функции f. Найдены достаточные (и "почти необходимые") условия липшицевости функции $h(f)$. Результаты имеют отношение к некоторым теоремам единственности анализа Фурье.

Відомо, що перетворення Гільберта $h(f)$ обмеженої функції f, яка задовольняє умові Ліпшиця (роду 1) на $\mathbb{R}$, рівномірно неперервно (h розуміється як сингулярний інтегральний оператор з ядром Коші, що регуляризоване у нескінченності, так що h визначено на всіх функціях, які сумуються на $\mathbb{R}$ за мірою Пуассона). У статті показано, що ця теорема втрачає силу (у досить сильному значенні) при відмові від припущення обмеженості функції f. Знайдено достатні (та "майже необхідні") умови ліпшицевості функції $h(f)$. Результати мають відношення до деяких теорем єдиності аналізу Фур'є.

Mathematics Subject Classification 2000: 30D55, 47A15.
Ключевые слова: преобразование Гильберта, теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе.

Посвящается 70-летию Иосифа Владимировича Островского

1. Введение

1.1. Преобразование Гильберта

1.1.1. *Преобразованием Гильберта функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы называем функцию $h(f)$, заданную формулой

$$h(f)(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)dt. \tag{1}$$

Эта формула определяет число $h(f)(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$, если f суммируема по пуассоновой мере P,

$$d\mathrm{P}(x) = \frac{dx}{\pi(1+x^2)},$$

(короче, если $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$), см. [1, с. 137–138].

Термин "преобразование Гильберта"(на прямой $\mathbb{R}$) часто понимается как оператор $f \mapsto h^0(f)$, где

$$h^0(f)(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt. \tag{2}$$

Однако такое определение имеет смысл лишь для $f \in \mathrm{L}^1((1+|x|)^{-1}m)$ (через m мы обозначаем меру Лебега на $\mathbb{R}$). Для наших целей (см. ниже п. 1.3) последний класс слишком узок. Чтобы определить преобразование Гильберта на нужном классе $\mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, приходится заменить "чистое"ядро Коши $\dfrac{1}{\pi(x-t)}$ ядром $\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{x-t} + \dfrac{t}{t^2+1}\right)$.

Иногда бывает удобно считать, что преобразование Гильберта функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого наподобие неопределенного интеграла функции f. Понимаемое таким образом преобразование Гильберта функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ будем обозначать через $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(x) = h(f)(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $h(const) = 0$, так что оператор $f \mapsto \widetilde{f}$ фактически действует из $\mathrm{L}^1(\mathrm{P})/\mathbb{R}$ в $\mathrm{L}^0/\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ обозначает пространство констант, а L^0 — пространство измеримых по Лебегу m-почти везде конечных функций на $\mathbb{R}$. По известной теореме Колмогорова вместо $\mathrm{L}^0/\mathbb{R}$ мы могли бы написать $w\mathrm{L}^1(\mathrm{P})/\mathbb{R}$, где

$$w\mathrm{L}^1(\mathrm{P}) = \{g \in \mathrm{L}^0 : \mathrm{P}(\{|g(x)| > a\}) = o(1/a), a \to +\infty\}.$$

1.1.2. Напомним еще одно (равносильное) определение функции $h(f)$. Решив с помощью интеграла Пуассона задачу Дирихле для верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, построим функцию $u : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$:

$$u(x+iy) = (f * p_y)(x), p_y(t) = \frac{y}{\pi(t^2+y^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},\, y > 0,$$

гармоническую в $\mathbb{C}^+$ и такую, что $u(x)(:= \lim_{y\to 0} u(x+iy)) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Применимость интеграла Пуассона обеспечена включением $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$. Функция $h(f)$ совпадает п.в. на $\mathbb{R}$ с граничным значением функции v, гармонически сопряженной с u в $\mathbb{C}^+$ и исчезающей в точке i:

$$u + iv \text{ аналитична в } \mathbb{C}^+, v(i) = 0, h(f)(x) = \lim_{y\to 0} v(x+iy) \text{ при п.в. } \ x \in \mathbb{R}.$$

По этой причине функцию $h(f)$ (а иногда и весь класс $\widetilde{f}$) называют *функцией, сопряженной с f*.

1.1.3. Наконец, заметим, что если $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|}dt < +\infty$, то $h(f)$ лишь постоянным слагаемым отличается от $h^0(f)$, и

$$\widetilde{f} = h^0(f) + \mathrm{const}.$$

Оператор h^0 коммутирует со сдвигами и растяжениями прямой. Точнее: положим $f^\tau(x) = f(x+\tau), f_\lambda(x) = f(\lambda x), \tau, \lambda \in \mathbb{R}$; тогда

$$h^0(f^\tau) = (h^0(f))^\tau, h^0(f_\lambda) = \mathrm{sgn}\lambda(\mathrm{h}^0(\mathrm{f}))_\lambda. \tag{3}$$

В частности, оператор h^0 меняет четность функции на противоположную.

1.1.4. Цель этой работы — исследовать характер непрерывности функции $h(f)$. Конкретные вопросы, на которые мы постараемся ответить, возникли в связи с некоторыми задачами гармонического анализа ("принцип неопределенности"в духе известной теоремы Берлинга–Мальявена о мультипликаторе (см. п. 1.3)). Новое ее доказательство дано в статье [2], а настоящая работа есть своего рода комментарий к [2].

1.2. Теоремы приваловского типа на прямой

1.2.1. Через $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathrm{I})$, где $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ — промежуток, а $\alpha \in (0,1]$, мы обозначим множество всех функций $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Липшица порядка α:

$$|f(t') - f(t'')| \le K|t' - t''|^\alpha, \qquad t', t'' \in \mathrm{I}.$$

Заметим, что $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, если $0 < \alpha < 1$, так что $h(f)$ имеет смысл для $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$. Если $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ и $0 < \alpha \leq 1$, то формула (1) определяет $h(f)(x)$ *при всех* (а не только при почти всех) $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если* $0 < \alpha < 1$, *то* $h(\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$.

Основным для нас является случай $\alpha = 1$, который не столь прост уже потому, что $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}) \not\subset \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$. Условимся называть функции класса $\mathcal{R} = \mathrm{L}^1(\mathrm{P}) \bigcap \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$ *правильными.*

Теорема 2. *Если f правильна, а промежуток* I *ограничен, то для любых* $x',\ x'' \in \mathrm{I}$

$$|h(f)(x') - h(f)(x'')| \leq C(|x' - x''||\log|x' - x''|| + |x' - x''|), \tag{4}$$

где $C = C(\mathrm{I}, f)$; *в частности* $h(f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathrm{I})$ *при любом* $\alpha \in (0, 1)$.

Этот результат принадлежит И.И. Привалову. Его обычно формулируют для функций, заданных на окружности ([1, с. 131]), но только что сформулированный вариант не содержит сколько-нибудь значительных отличий от цитированного классического утверждения. Иначе обстоит дело с *глобальным* вариантом теоремы Привалова, когда речь идет не о следах функции $h(f)$ на *ограниченных* промежутках I, а о ее *равномерной непрерывности на всей прямой* $\mathbb{R}$. Это свойство можно гарантировать, если f не просто *правильна*, но еще и *ограничена*:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < +\infty. \tag{5}$$

Теорема 3. *Если* $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$ *и выполнено условие* (5), *то оценка* (4) *верна для любых* $x', x'' \in \mathbb{R}$, *причем* $C = C(f)$.

Подчеркнем, что оценка (4) в теореме 3 верна *для любых* — больших и малых — расстояний $|x' - x''|$, причем случай больших расстояний для нас едва ли не важней, чем случай $|x' - x''| \ll 1$.

Теоремы 1–3 аналогичны классическим теоремам Привалова, относящимся к липшицевым функциям на окружности, причем теорема 2, как уже говорилось, фактически совпадает с одной из теорем Привалова. А теоремы 1 и 3 относятся к разряду "хорошо известных"фактов, для которых мы, однако, не можем дать точной ссылки, хотя близкие утверждения и встречаются в литературе. В монографии [3, §5.15] доказаны аналоги теорем 1 и 3 для оператора h^0 вместо h и для функций $f \in \mathrm{L}^p(m)$ при $p \in (1, +\infty)$. Последнее ограничение возникло лишь для того, чтобы обеспечить существование функции $h^0(f)$. Заменив в рассуждениях из [3] h^0 на h и лишь слегка изменив доказательство, можно получить теоремы 1 и 3 в полном объеме. Еще одно доказательство теоремы 3 будет следовать из нашей теоремы 5.

1.2.2. Для интересующих нас приложений к гармоническому анализу (о чем будет сказано ниже) "глобальный"результат теоремы 3 никакого интереса не представляет, ибо условие (5) соответствует лишь вырожденному варианту упомянутой выше теоремы Берлинга–Мальявена. Для нас первостепенный интерес представляет именно переход от условия (5) к условию правильности, разрешающему рост величины $|f(t)|$ при $|t| \to +\infty$. В литературе мы не нашли ответа на вопрос о том, в какой мере такой переход возможен. В разделе 2 мы покажем, что он, вообще говоря, *влечет полную утрату* равномерной непрерывности функции $h(f)$.

Логически мыслима такая гипотеза: если f правильна и, кроме того,

$$|f(t)| \le H(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где H — достаточно медленно и правильно растущая функция, то $\widetilde{f}$ остается равномерно непрерывной, а неограниченность f, регулируемая условием (6), приводит лишь к ухудшению модуля непрерывности $\omega_{\widetilde{f}}$ функции $\widetilde{f}$ (так что, скажем, $\omega_{\widetilde{f}}(\delta)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$ медленнее, чем $\delta|\log\delta|$ — величина, отвечающая условию (6)).

В действительности замена условия (5) условием (6) — при сколь угодно медленно растущей мажоранте H — приводит, вообще говоря, к *полному* разрушению равномерной непрерывности функции $\widetilde{f}$. Более того, для любой липшицевой и неограниченной H найдется такая правильная f, подчиненная условию (6), что разность $\Delta_t\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x+t) - \widetilde{f}(x)$ — неограниченная функция *при любом* $t \neq 0$. Этот факт будет доказан в разд. 2 (теорема 9). Перед этим, исходя из довольно общих соображений, мы докажем существование правильных функций f с неограниченной разностью $\Delta_1\widetilde{f}$ (теорема 9). Как обычно в подобных случаях, такие f преобладают (составляют множество второй категории) в пространстве правильных функций.

Эти результаты отрицательного характера дополняет теорема 10, утверждающая, что неправильное поведение функций $\widetilde{f}$, о которых идет речь в теореме 6, обладает довольно сильной устойчивостью: для любого $C > 0$ и для любой измеримой функции g, удовлетворяющей условиям

$$g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P}) \text{ и } \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| < C, \tag{7}$$

функция $\widetilde{g}$ *не может быть липшицевой.* Подчеркнем, что липшицевость самой g не предполагатся (для липшицевых g, подчиненных условию (7), наше утверждение доказывается совсем просто (см. замечание в п. 2.4)).

Раздел 3 посвящен некоторым критериям равномерной непрерывности или липшицевости функции $\widetilde{f}$. В наших критериях существенную роль играет интеграл

$$J_f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\Delta_t^2(x)}{t^2} dt,$$

где Δ_t^2 — оператор второй разности:

$$(\Delta_t^2 f)(x) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = \Delta_t f(x) - \Delta_{-t} f(x).$$

В разделе 3 рассматриваем лишь правильные функции f класса $C^2(\mathbb{R})$ с ограниченной второй производной. Для задач гармонического анализа, которые мотивируют наш интерес к свойствам непрерывности функций вида $\widetilde{f}$, это предположение не умаляет общности.

Теорема 4. *Если f правильна, $f \in C^2(\mathbb{R})$, и $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)| < +\infty$, то следующие условия равносильны:*

(a) $\widetilde{f}$ удовлетворяет условию Липшица (порядка 1);

(b) $\sup_{s\in\mathbb{R}} |J_f(s)| < +\infty$.

Теорема 5. *Если f правильна и удовлетворяет условию (b) теоремы 4, то*

$$|\widetilde{f}(t') - \widetilde{f}(t'')| \le C(|t'-t''| + |t'-t''||log|t'-t''||), \quad t',\ t'' \in \mathbb{R}.$$

Теорема 5 есть обобщение цитированного выше классического результата об ограниченных правильных функциях (теорема 3; все они, очевидно, удовлетворяют условию (b) теоремы 4).

1.3. Связь с теоремой Берлинга–Мальявена

В этом разделе мы остановимся на задачах гармонического анализа, упомянутых в п. 1.1. Именно эти задачи определяют наш интерес к свойствам непрерывности функции $\widetilde{f}$ для правильных и *неограниченных* f. Преобразование Фурье $\hat{F}$ функции F запишем в следующей форме:

$$\hat{F}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} F(t) e^{2\pi i t\xi} dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с "принципом неопределенности" ненулевая функция F и ее Фурье-образ $\hat{F}$ не могут быть слишком малыми одновременно. Одной из важных реализаций этого эвристического положения служит следующая

Теорема 6. *Пусть функция $F \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ имеет ограниченный спектр (т.е. $\hat{F} \equiv 0$ вне некоторого ограниченного промежутка). Если*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log|F(t)|}{1+t^2}dt = -\infty,$$

то $F \equiv 0$.

Пространством Пэли–Винера (порядка $\sigma > 0$) будем называть подпространство в $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, состоящее из функций F со спекторм в $[-\sigma, \sigma]$ (т.е. с $\hat{F}(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| > \sigma$); будем обозначать это пространство символом PW_σ.

Функцию ω, заданную на $\mathbb{R}$, будем называть *допустимой мажорантой* для PW_σ (и писать $\omega \in \mathrm{Adm}(\sigma)$), если $0 \le \omega \le 1$, и существует ненулевая функция $F \in \mathrm{PW}_\sigma$, удовлетворяющая неравенству

$$|F(t)| \le \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Положим $\Omega = |\log \omega|$. Из теоремы 6 следует, что при любом $\sigma > 0$ условие

$$\Omega \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P}) \tag{8}$$

необходимо для включения $\omega \in \mathrm{Adm}(\sigma)$. Простые примеры показывают, что оно не достаточно (хотя оно достаточно, если ω четна и убывает на луче $(0, +\infty)$, см. [4, с. 276–277]).

Глубокий результат о допустимости некоторых колеблющихся мажорант ω принадлежит Берлингу и Мальявену. По причинам, на которых мы здесь не останавливаемся, этот результат принято называть "теоремой о мультипликаторе". Используя терминологию, введенную в начале п. 1.2.1, теорему о мультипликаторе можно сформулировать так.

Теорема 7. *Функция ω допустима при любом $\sigma > 0$, если функция Ω правильна.*

Условие правильности функции Ω можно ослабить, заменив его условием $\Omega \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ в сочетании со следующим условием "плавности":

$$\sup\{|\Omega(x') - \Omega(x'')| : |x' - x''| \le 1\} < +\infty,$$

которому удовлетворяет любая функция Ω, равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ ([4, с. 329]).

Важность этого результата и трудность его доказательства побуждали не раз возвращаться к нему с разными подходами (в настоящее время известны шесть его доказательств [5, 6, 4, 7]).

В работах [8, 9] получено частичное его обобщение на широкий класс подпространств $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, содержащий пространства PW_σ как частный случай. В применении к пространствам Пэли–Винера подход, предложенный в [8] и [9], дает следующий результат.

Теорема 8. *Функция ω допустима для пространства PW_σ, если $\Omega \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, а $\widetilde{\Omega}$ удовлетворяет условию Липшица с липшицевой константой, меньшей $\pi\sigma$:*

$$|\widetilde{\Omega}(t') - \widetilde{\Omega}(t'')| \le c|t' - t''|, \quad t',\ t'' \in \mathbb{R},$$

где $c < \pi\sigma$.

На самом деле аналогичный результат в [9] доказан не только для пространств PW_σ, а для пространств более общего вида.

Из этой теоремы довольно легко выводится допустимость (при всех $\sigma > 0$) четных ω, убывающих на положительном луче и с конечным интегралом $\mathrm{P}(\Omega)$, а также всех ω из класса $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$, где $0 < \alpha < 1$.

Очевидный недостаток теоремы 8 (по сравнению с теоремой 7) состоит в том, что условие допустимости выражено в терминах, непосредственно относящихся не к Ω, а к $\widetilde{\Omega}$. Это сильно затрудняет проверку допустимости и, на первый взгляд, не позволяет сделать теорему 7 следствием теоремы 8. Именно в связи с этими обстоятельствами вопрос о критериях липшицевости функции $\widetilde{\Omega}$, выраженный в терминах, относящихся к Ω, приобретает значительный интерес. При этом случай *ограниченной* функции Ω (как в теореме 3) здесь совершенно бессодержателен: он отвечает мажоранте ω, *отделенной от нуля*, допустимость которой тривиальна.

Результаты этой статьи убеждают в том, что поиск эффективных критериев такого рода — дело довольно безнадежное. Однако имея в виду теорему 8, положение удается исправить, воспользовавшись следующим замечанием: *если для функции ω можно подобрать миноранту $\omega_1 \in \mathrm{Adm}(\sigma)$, $\omega_1 \le \omega$, то и $\omega \in \mathrm{Adm}(\sigma)$.* Иначе говоря, теорема 8 нуждается в липшицевости не функции $\widetilde{\Omega}$, а лишь некоторой функции $\widetilde{\Omega_1}$, где $\Omega_1 \ge \Omega$. Теорема Берлинга–Мальявена окажется следствием теоремы 8, если верна следующая

Гипотеза. *Для любой правильной функции $\Omega \ge 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\Omega_1 \ge \Omega$, что $\Omega_1 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P}), \widetilde{\Omega_1} \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, и $\|\widetilde{\Omega_1}'\|_\infty < \varepsilon$.*

В [9] такая регулярная мажоранта Ω_1 функции Ω была построена *при дополнительных условиях*, наложенных на Ω. Они-то и не позволили охватить принципиально важный случай произвольной правильной функции Ω. В [9] Ω_1 строилась как та или иная регуляризация функции Ω (например, как свертка $\Omega * \varphi$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi dm = 1$). Результаты настоящей работы (в особенности теорема 10) показывают, что для правильной функции Ω общего вида такой прием не может привести к цели. В самом деле, $\|\Omega * \varphi - \Omega\| < +\infty$, если Ω правильна, и для функции Ω из теоремы 10 липшицевость функции $h(\Omega * \varphi)$ невозможна. В нашей гипотезе функция Ω_1, вообще говоря, *обязана сильно отскакивать вверх* от Ω (т.е. непременно $\overline{\lim}_{|x|\to\infty}(\Omega_1(x) - \Omega(x)) = +\infty$) и никакое стандартное сглаживание $\Omega_1 = \Omega * \varphi$ (и вообще никакая Ω_1, удовлетворяющая условию $\|\Omega_1 - \Omega\|_\infty < +\infty$) не даст нужного результата.

Тем не менее, наша гипотеза *верна*: ее недавно доказал Ф.Л. Назаров [2]. Найденная им конструкция $\Omega \mapsto \Omega_1$ нелинейна, а его функция Ω_1 в общем случае, действительно, сильно отклоняется вверх от Ω.

В разделе 2 собраны отрицательные результаты: здесь речь идет о правильных функциях f с плохой (не равномерно непрерывной) сопряженной $\widetilde{f}$. Некоторые критерии равномерной непрерывности (и, в частности, липшицевости) сопряженной функции, выраженные через интеграл $J_f(x)$, получим в разд. 3.

2. Правильные функции с сильно колеблющейся сопряженной

С числом $t \in \mathbb{R}$ и с функцией $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ свяжем ее первую разность $\Delta_t g$ с шагом t:

$$(\Delta_t g)(x) = g(x+t) - g(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Функцию $g \in \mathcal{R}$ назовем *плохой*, если $h(g)$ сильно колеблется — в том смысле, что при любом $t > 0$ (или, что то же, при любом $t < 0$) функция $\Delta_t h(g)$ неограничена. Если g плохая, то $h(g)$ не может быть равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Более того, при любом $t > 0$ колебания функции $h(g)$ на всевозможных промежутках длины t не могут быть ограничены.

В этом разделе мы будем строить примеры *плохих* функций.

2.1. Основной зуб

2.1.1. Нам понадобится простейшая правильная функция З, которую назовем *основным зубом* (рис. 1).

$$\text{З}(t) = \varphi_+(t) + \varphi_+(-t), \qquad \varphi_+ = (1-x)\chi_{[0,1]}, \tag{9}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E.

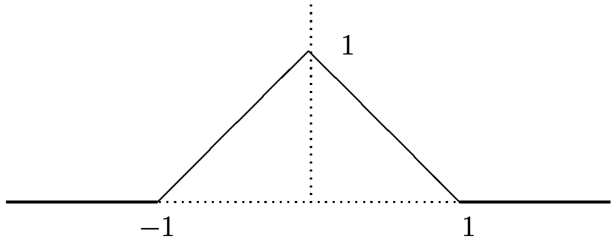


Рис. 1

Функция $h^0(\text{З})$, очевидно, нечетна, так что $h^0(\text{З})(0) = 0$. Из равенства $\int_{-1}^{1} \text{З}(x)dx = 1$ следует, что

$$h^0(\text{З})(x) = \frac{1}{\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad |x| \to \infty.$$

При $x \neq 0$

$$h^0(\varphi_+)(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.)\int\limits_0^1 \frac{1-t}{x-t}dt$$

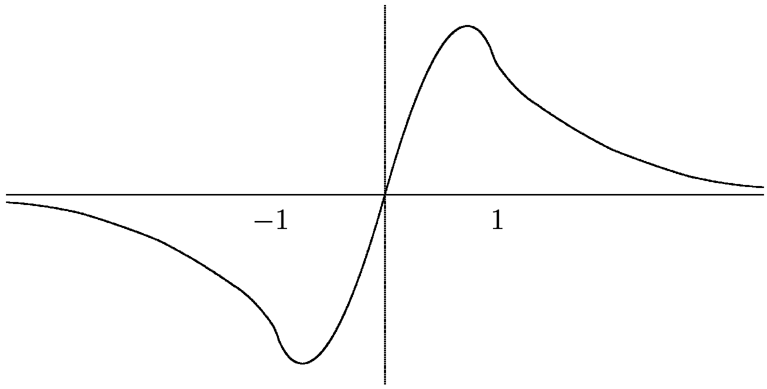
$$= \frac{1-x}{\pi}(v.p.)\int\limits_0^1 \frac{dt}{x-t} + \frac{1}{\pi} = \frac{x-1}{\pi}\log\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{\pi},$$

откуда в силу (3) следует, что

$$\begin{gathered} h^0(\text{З})(x) = h^0(\varphi_+)(x) - h^0(\varphi_+)(-x) \\ = \frac{1}{\pi}\Big[(x-1)\log|x-1| + (x+1)\log|x+1| - 2x\log|x|\Big] = \frac{1}{\pi}(\Delta_1^2 l)(x), \end{gathered} \tag{10}$$

где Δ_1^2 обозначает вторую разность с шагом 1, а $l(t) = t|\log t|$ при $t \neq 0$, $l(0) = 0$. Таким образом, функция $h^0(\text{З})$ непрерывна; она дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, и

$$\widetilde{\text{З}}'(x) = \frac{1}{\pi}\log\frac{|x^2-1|}{x^2}, \quad x \neq 0, \pm 1. \tag{11}$$



$y = h^0(З)(x)$

Рис. 2

Функция $\widetilde{З}'$ четна и убывает на промежутке $(0,1)$, так что при $t \in (0,x)$ и $0 < x < 1$

$$\widetilde{З}'(t) \geq \frac{1}{\pi} \log \frac{|1-x^2|}{x^2}\,. \tag{12}$$

При малых $x > 0$ правая часть в (12) больше, чем $\frac{|\log x|}{\pi}$.

2.1.2. Подобное преобразование функции и ее сопряженной. С каждой функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ свяжем ее подобные и сдвинутые копии $f_{n,c}$, где $n = 1, 2, \ldots, c \in \mathbb{R}$:

$$f_{n,c}(x) = nf\left(\frac{x-c}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Если $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, то и $f_{n,c} \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, и

$$\|f'\|_\infty = \|f'_{n,c}\|_\infty. \tag{13}$$

Если $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|} dx < +\infty, \tag{14}$$

то имеет смысл $h^0(f)$, и

$$h^0(f_{n,c}) = (h^0(f))_{n,c}. \tag{15}$$

Это следует из формул (3).

Нам понадобится оценка интеграла j:

$$j(=j_{p,n,c}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{n,c}(x)}{x^p}dx, \qquad p = 1,2; \qquad c \geq 2n,$$

для неотрицательной функции f, сосредоточенной на $[-1,1]$. Имеем

$$j = n\int\limits_{c-n}^{c+n} \frac{f\left(\frac{x-c}{n}\right)}{x^p}dx \leq \frac{n^2}{(c-n)^p}\int\limits_{-1}^{1} f(s)ds$$

$$\leq \frac{n^2}{c^p}\left(1-\frac{n}{c}\right)^{-p}\int\limits_{-1}^{1} f(s)ds \leq \frac{2^p n^2}{c^p}\int\limits_{-1}^{1} f(s)ds.$$

Поэтому полагая $p = 2$, а затем $p = 1$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{n,c}d\mathrm{P} \leq \int\limits_{-1}^{1} f, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{n,c}(x)}{1+|x|}dx \leq \frac{2n^2}{c}\int\limits_{-1}^{1} f. \tag{16}$$

2.1.3. В формулах этого подпункта ради краткости вместо $h^0(g)$ будем писать $\widetilde{g}$. При любом $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta_t(\widetilde{f}_{n,c})(x) = n\left[\widetilde{f}\left(\frac{x+t-c}{n}\right) - \widetilde{f}\left(\frac{x-c}{n}\right)\right].$$

Полагая $x = c$, получим полезное тождество

$$\Delta_t(\widetilde{f}_{n,c})(c) = t \cdot \frac{(\Delta_{t\backslash n}\widetilde{f})(0)}{t\backslash n}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

для $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (14).

2.1.4. Основной зуб З порождает серию своих увеличенных и сдвинутых копий $З_{n,c}$. Из (17) следует, что при $n > 1$, $t > 0$

$$(\Delta_t\widetilde{З}_{n,2n})(2n) = t\widetilde{З}(\xi_{n,t}), \tag{18}$$

где $0 < \xi_{n,t} < t\backslash n$. Из оценки (11) следует, что при любом $t > 0$

$$\Delta_t(\widetilde{З}_{n,2n})(2n) \geq \frac{t}{\pi}\left|\log\frac{t}{n}\right|, \qquad n > n(t). \tag{19}$$

2.2. Правильная функция f с неограниченной разностью $\Delta_1\widetilde{f}$

Существование такой функции совсем легко вывести из оценки (19) и из общих соображений. Превратим множество $\mathcal{R}$ всех правильных функций f в банахово пространство, полагая

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \|f'\|_\infty + \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{P})}.$$

Рассмотрим линейные операторы $A_n : \mathcal{R} \to \mathrm{L}^\infty, \qquad n = 1, 2, \dots,$

$$A_n(f) = \chi_{[-10n,10n]}\Delta_1\widetilde{f}$$

(напомним, что в силу теоремы 2 $\Delta_1\widetilde{f} \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$). Положим $З_n = З_{n,2n}$. Применив (13) и (15) к $f = З$, видим, что $\sup_n \|З_n\|_{\mathcal{R}} < +\infty$. В то же время при больших n

$$\|A_n(З_n)\|_\infty \ge |\Delta_1\widetilde{З}_n(2n)| \ge \frac{1}{\pi}\log n,$$

согласно (19). Таким образом, $\sup_n \|A_n\| = +\infty$. По теореме Банаха–Штейнгауза найдется такая функция $f \in \mathcal{R}$, что $\sup_n \|A_n(f)\|_\infty = +\infty$, так что $\sup_{\mathbb{R}} ||\Delta_1\widetilde{f}| = +\infty$.

Как водится в таких случаях, множество функций $f \in \mathcal{R}$ с неограниченной разностью $\Delta_1\widetilde{f}$ *преобладают* в $\mathcal{R}$, образуя множество второй категории.

Впрочем, функцию $f \in \mathcal{R}$ с неограниченной разностью $\Delta_1\widetilde{f}$ (и даже плохую функцию f) нетрудно построить явно, используя в качестве строительных блоков зубы $З_{n,c}$. В результате мы получим плохую и притом сколь угодно медленно растущую функцию.

2.3. Медленно растущие плохие функции

Напомним, что плохая функция не может быть ограниченной (см. теорему 3). Теорема 9, которую мы сейчас сформулируем, показывает, что существуют сколь угодно медленно растущие плохие функции.

Пусть H — неотрицательная функция класса $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$. Предположим, что

$$\sup_{\mathbb{R}} H = +\infty.$$

Теорема 9. *Существует плохая функция f, удовлетворяющая неравенству*

$$0 \le f(t) \le H(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Функция f, которую мы построим явно, будет удовлетворять условию (14), а $\widetilde{f}$ будем понимать как $h^0(f)$.

2.3.1. По поводу предположения липшицевости мажоранты H заметим, что без какого-то свойства ее "плавности"теорема 9 неверна. Действительно, если, скажем, $H|\mathbb{Z} = 0$, то любая правильная функция $f \geq 0$, удовлетворяющая условию (20), *ограничена* и по теореме 3 не может быть плохой.

2.3.2. Доказательство теоремы 9. Функцию f мы определим как "пилу"с "зубьями" $З_{n,c_n}$, причем центры c_n их оснований достаточно быстро стремятся к бесконечности. Точнее: последовательность чисел $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ выберем так, что

$$c_1 > 1, c_{n+1} \geq 3c_n, H(c_n) > (\|H'\|_\infty + 1)n, \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} З_{n,c_n}.$$

Заметим, что $c_n \geq 3^n, c_{n+1} - c_n \geq 2c_n$, а потому промежутки $I_n = [c_n - n, c_n + n]$ (основания зубов $З_{n,c_n}$) попарно дизъюнктны. Очевидно, $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$. Докажем оценку (20): если $t \in I_n$, то $H(t) \geq H(c_n) - \|H'\|_\infty n \geq n \geq З_{n,c_n}(t) = f(t)$. Обратимся к функции $\widetilde{f}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{c_n - n} < +\infty,$$

т.к. $\int_{\mathbb{R}} З_{n,c_n} = n^2$. Таким образом, функция $\widetilde{f}$ существует, и ее можно понимать как $h^0(f)$.

Проверим, что f — плохая. Зафиксируем число $t > 0$ и выберем столь большой номер $n > n(t)$, что $c_{n+1} - c_n > 2t$, и $c_n < c_n + t < c_{n+1}$. Учитывая (19), имеем

$$(\Delta_t \widetilde{f})(c_n) \geq \Delta_t \widetilde{З}_{n,c_n}(c_n) - \left(\sum_{k<n} + \sum_{k>n} \right) \left| \Delta_t \widetilde{З}_{k,c_k}(c_n) \right| \geq t \log \frac{n}{t} - S_1 - S_2. \quad (21)$$

Чтобы оценить сверху величины S_1 и S_2, заметим, что $\int_{\mathbb{R}} З_{k,c_k} = k^2$, а потому при $x \notin I_k$

$$|\widetilde{З}_{k,c_k}(x)| \leq \frac{k^2}{dist(x, I_k)}.$$

Кроме того, функция $|\widetilde{З}_{k,c_k}|$ монотонна на лучах $(c_k + k, +\infty), (-\infty, c_k - k)$. Поэтому

$$S_1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\widetilde{З}_{k,c_k}(c_n + t)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\widetilde{З}_{k,c_k}(c_n)| \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} |\widetilde{З}_{k,c_k}(c_n)|$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{c_n-c_k}\leq\frac{2(n-1)^3}{c_n-c_{n-1}}\leq\frac{2(n-1)^3}{3^{n-1}}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Аналогично получаем

$$S_2\leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{c_k-(c_n+t)}\leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{c_k-c_n}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{c_k-c_n}}.$$

Но $c_k-c_n\geq c_k\left(1-\dfrac{c_n}{c_k}\right)\geq\frac{2}{3}c_k\geq 2\cdot 3^{k-1}$, так что и $S_2\to 0$ при $n\to\infty$. Из (21) следует, что при любом $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_t\widetilde{f})(c_n)=+\infty,$$

и теорема доказана.

2.4. Устойчиво плохие функции

Так мы называем функции $f\in\mathcal{R}$, обладающие следующим свойством: если измеримая функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\|f-g\|_\infty<+\infty,\tag{22}$$

то включение $\Delta_t h(g)\in\mathrm{L}^\infty$ невозможно ни при каком $t\neq 0$.

Измеримость функции g здесь упомянута только для того, чтобы из (22) следовало, что $g\in\mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, и, тем самым, существовала $h(g)$.

В этом пункте покажем, что пила, построенная в теореме 9, устойчиво плохая, и укажем метод построения многих других устойчиво плохих пил.

Заметим, что если функция g, обладающая свойством (22), принадлежит $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, то при любом $t\in\mathbb{R}$

$$\Delta_t f=\Delta_t g+\Delta_t r,\qquad\text{где}\qquad r\in\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^\infty,$$

так что $\widetilde{r}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ (по теореме 3), а $\Delta_t\widetilde{r}$ ограничена; поэтому g обязана быть плохой, если плохой была f. Однако в определении устойчиво плохой функции о g не предполагается *ничего*, кроме условия (22) (измеримость не в счет). Впрочем, стоит отметить, что функция f, участвующая в (22), — липшицева, а потому g локально (т.е. на каждом ограниченом промежутке) *ограничена*.

В подпунктах 2.4.2 и 2.4.3 мы подготовим конструкцию устойчиво плохих пил, которые будут предъявлены в п. 2.5.3.

2.4.1.

Лемма. *Пусть* $b \in \mathrm{L}^\infty$*, причем* $b \equiv 0$ *вне некоторого ограниченного промежутка, а* $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ *локально ограничена. Тогда при любом* $t \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h(\Delta_t g) b = -\int\limits_{\mathbb{R}} g \cdot h(\Delta_{-t} b). \tag{23}$$

Доказательству предпошлем два замечания:

2.4.2. 1) Оба интеграла в (23) имеют смысл. Функция $\Delta_t g$ ограничена на некотором промежутке $[-2N, 2N]$, а b ограничена и сосредоточена на $[-N, N]$; функция $h(\chi_{[-2n,2n]} g)$ суммируема (с любой конечной степенью) на $[-2N, 2N]$ по теореме М. Рисса о сопряженных функциях, а $h(\chi_{\mathbb{R}\setminus[-2N,2N]} g)$ непрерывна на $[-N, N]$. Это доказывает суммируемость подынтегральной функции в левом интеграле в (23). Обратимся к правому интегралу. Функция $\Delta_{-t} b$ ограничена и сосредоточена на промежутке $[-A(t), A(t)] = j(t)$, а потому $g \cdot h(\Delta_{-t} b) \in \mathrm{L}^1(2j(t))$ по той же теореме М. Рисса. А при $x \notin 2j(t)$ из равенства $\int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_{-t} b = 0$ следует, что $|h(\Delta_{-t} b)(x)| \le \frac{c}{x^2}$, и интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2j(t)} |g| \cdot |h(\Delta_{-t} b)|$ конечен, т.к. $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$.

2) Если $F \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, то $h(\Delta_t F) = \Delta_t h(F) + c(t)$, где $c(t)$ — постоянная. Если $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|F(t)|}{1+|t|} dt < +\infty$, то

$$h^0(\Delta_t F) = \Delta_t h^0(F)$$

и

$$\Delta_t h(F) = \Delta_t h^0(F),$$

т.к. $h(F) = h^0(F) + const$.

В частности, в правом интеграле в (23) можно заменить $h(\Delta_{-t} b)$ на $h^0(\Delta_{-t} b) = \Delta_{-t} h^0(b)$.

2.4.3. Доказательство леммы. Если бы g (а с ней и $\Delta_t g$) была сосредоточена на ограниченном промежутке, то по замечанию 2) оператор h в (23) можно было бы заменить на h^0, а затем вывести (23) из тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F h^0(G) = -\int\limits_{\mathbb{R}} h^0(F) G,$$

справедливого для любых $F, G \in \mathrm{L}^2(m)$ (т.к. $\widehat{h^0(F)}(\xi) = -\mathrm{sgn}\xi \cdot \widehat{\mathrm{F}}(\xi)$, где $\widehat{\ }$ обозначает преобразование Фурье).

Положим $g_n = \chi_{[-n,n]} g$. В силу сказанного и учитывая замечание 2), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h^0(\Delta_t g_n) \cdot b = \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_t h^0(g_n) \cdot b = \int\limits_{\mathbb{R}} h^0(g_n) \cdot \Delta_{-t} b = -\int\limits_{\mathbb{R}} g_n \cdot h^0(\Delta_{-t} b)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} h(g_n)\cdot\Delta_{-t}b = -\int_{\mathbb{R}} g_n\cdot h(\Delta_{-t}b), \qquad n=1,2,\dots \tag{24}$$

(напомним, что $\int_{\mathbb{R}}\Delta_{-t}b = 0$). Остается перейти к пределу в обеих частях равенства (24) при $n\to\infty$. Но $h(g_n)\xrightarrow{n\to\infty} h(g)$ *равномерно* на промежутке $j(t)=[-A(t),A(t)]$, вне которого $\Delta_{-t}b\equiv 0$. Действительно, при $x\in j(t)$

$$|h(g_n)(x)-h(g)(x)| \le \int_{|s|\ge n} |g(s)|\frac{1+|x||s|}{|x-s|(s^2+1)}ds \le C(t)\int_{|s|\ge n}\frac{|g(s)|}{s^2}ds \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Поэтому левая часть равенства (24) стремится к $\int_{\mathbb{R}} h(g)\cdot\Delta_{-t}b$. Наконец,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g_n h(\Delta_{-t}b) - \int_{\mathbb{R}} g\cdot h(\Delta_{-t}b)\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |g||h(\Delta_{-t}b)| \le C(t,b)\int_{|s|\ge n}\frac{|g(s)|}{s^2}ds \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Лемма доказана.

2.5. t-атомы

Зафиксируем *отрицательное* число t и рассмотрим функцию $b\in\mathrm{L}^\infty$, сосредоточенную на промежутке I длины $|t|$, причем $\|b\|_\infty\le\frac{1}{2|t|}$. Тогда функция a при

$$a=-\Delta_{|t|}b \tag{25}$$

есть *атом* ([10, с. 273]): она сосредоточена на множестве $(I-|t|)\bigcup I$ длины $2|t|$, $\|a\|_\infty\le\frac{1}{|I|}$, и $\int_{\mathbb{R}} a=0$. Согласно замечанию 2) в 2.4.2, $h(a)=h^0(a)$; как известно [10, с. 273],

$$\|h^0(a)\|_{\mathrm{L}^1(m)}\le A, \tag{26}$$

где A — абсолютная постоянная. Атомы a вида (25) будем называть t-атомами.

2.5.1. Из леммы 2.4.1 теперь выведем оценку взаимодействия функции $f\in\mathcal{R}$ с t-атомами (точнее их сопряженными), предполагая, что некоторая функция $g\in\mathrm{L}^1(\mathrm{P})$ удовлетворяет неравенству (22):

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\cdot h^0(a)\right| \le A\|f-g\|_\infty + \left|\int_{\mathbb{R}}(\Delta_{|t|}h(g))a\right| \tag{27}$$

(мы используем оценку (26) и равенства $\Delta_{|t|}h(g) = h(\Delta_{|t|}g) + c(t)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} a = 0$; A — абсолютная постоянная из (26)). Поскольку $\|a\|_{\mathrm{L}^1(m)} \le 1$, то из (27) заключаем, что, *если найдется функция* g, *удовлетворяющая условию* (22) *и такая, что* $\Delta_{|t|}\widetilde{g} \in \mathrm{L}^\infty$, *то*

$$\sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f\cdot h^0(a)\right| : a - t\text{-атом}\right\} < +\infty. \tag{28}$$

2.5.2. Специальные t-атомы. Так мы будем называть t-атомы, отвечающие функциям b специального вида (по формуле (25)). А именно, зафиксируем какую-нибудь функцию $\varphi(= \varphi_t)$, обладающими следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \ge 0,\ \varphi \equiv 0 \text{ вне промежутка } [0, |t|],\\ \varphi \le \frac{1}{2|t|},\ \varphi\left(\frac{|t|}{2}\right) = \frac{1}{2|t|},\\ \varphi \text{ симметрична относительно точки } \frac{|t|}{2},\\ \text{т.е. } \varphi\left(\frac{|t|}{2} + s\right) \equiv \varphi\left(\frac{|t|}{2} - s\right) \text{ при} s \ge 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Функция $a_0 = -\Delta_{|t|}\varphi$ совпадает с φ на $[0, |t|]$ и *нечетна* (рис. 3).

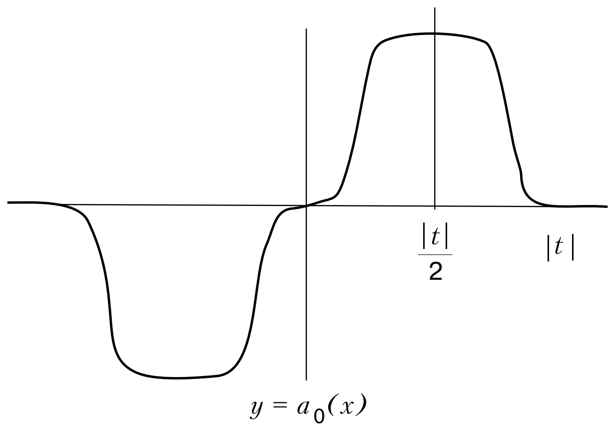


Рис. 3

Очевидно, a_0 есть t-атом. При любом $x \in \mathbb{R}$

$$h^0(a_0)(x) = \frac{2}{\pi}(v.p.)\int\limits_0^{|t|} \frac{s\varphi(s)}{x^2 - s^2}ds,$$

и при $|x| > |t|$

$$h^0(a_0)(x) = \frac{2}{\pi x^2} \int\limits_0^{|t|} \frac{s\varphi(s)}{1 - \frac{s^2}{x^2}} ds \geq \frac{c}{x^2}, \tag{30}$$

где $c = \frac{2}{\pi} \int_0^{|t|} s\varphi(s) ds > 0$.

2.5.3. Взаимодействие сдвигов функции $h^0(a_0)$ с зубьями пилы. Пусть числа B', A, B, k таковы, что $0 < B' < A < B, k > 0$, причем $A - B' \geq 2|t|, A > 2|t|$. Положим $C = \dfrac{A+B}{2}, l = \dfrac{B-A}{2}, I = [A, B], J = [B', A]$. Предположим, что кусок $f\mid_{(I \bigcup J)}$ правильной неотрицательной функции f устроен следующим образом (см. рис. 3):

$$f\mid_J \equiv 0, f(x) = k(x - A) \text{ при } x \in [A, C], f(x) = k(B - x) \text{ при } x \in [C, B].$$

Рассмотрим сдвиг a_τ атома a_0: $a_\tau = a_0(x - \tau)$, где $\tau = A - |t|$; t-атом a_τ сосредоточен в промежутке J.

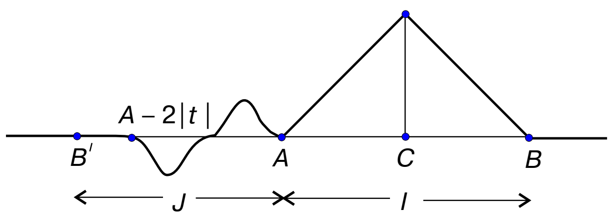


Рис. 4

Функция $h^0(a_\tau) = (h^0(a_0))_\tau$ неотрицательна в $\mathbb{R}\backslash J$, причем $h^0(a_\tau)(x) \geq \dfrac{c}{(x - (A - |\tau|))^2}$ при $x \geq A$ (см. (30)). Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f h^0(a_\tau) \geq \int\limits_A^C f \cdot h^0(a_\tau) \geq c \cdot k \int\limits_A^{A+l} (x - A) \frac{dx}{((x - A) + |t|)^2} = \frac{ck}{2} \log \frac{l + |t|}{|t|};$$

последняя величина — очень большая, если $l \gg 1$, а число k — не слишком мало. Вклад промежутка I в $\mathrm{L}^1(\mathrm{P})$-норму функции f не превышает $2 \int_A^C \dfrac{x - A}{x^2} dx = \dfrac{k}{2} \cdot \left(\dfrac{l}{A}\right)^2$.

Пусть же f — пила, составленная из зубьев, опирающихся на промежутки $I_n = [A_n, B_n]$, где $B_{n-1} < A_n < B_n, n = 2, 3, \ldots,$

$$f\mid_{J_n} = 0, \text{ где } J_n = [B_{n-1}, A_n], f(x) = k_n(x - A_n) \text{ при } x \in [A_n, C_n],$$

$$f(x) = k_n(B_n - x) \text{ при } x \in [C_n, B_n]$$

(C_n — центр промежутка I_n), а $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность положительных чисел. Наконец, $f\mid_{[-\infty, A_1]} = 0$. Очевидно, $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$; если же

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{l_n}{A_n}\right)^2 < +\infty,$$

где $l_n = C_n - A_n$, то $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, так что $f \in \mathcal{R}$.

2.5.4.

Теорема 10. *Если последовательности (A_n), (B_n) и (k_n) удовлетворяют вышеперечисленным условиям, причем*

$$(a) \lim_{n\to\infty} (A_n - B_{n-1}) = +\infty, \qquad (b) \lim_{n\to\infty} k_n \log l_n = +\infty, \tag{31}$$

то f устойчиво плохая.

Доказательство. Проверим, что при любом $t < 0$ разность $\Delta_t h(g)$ неограничена, какова бы ни была функция g, подчиненная условию (22).

При каждом $t < 0$ при всех больших n имеем, согласно ($31a$): $A_n > 2|t|$, $A_n - B_{n-1} > 2|t|$. При таком n, полагая $B' = B_{n-1}, A = A_n, B = B_n, k = k_n$, из оценок п. 2.5.3 заключаем, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f h^0(a_{\tau_n})\right| \geq k_n \log \frac{l_n + |t|}{|t|}, \tau_n = A_n - |t|, n > n(t). \tag{32}$$

Но если бы функция $\Delta_t h(g)$ оказалась ограниченной при каком-нибудь $t < 0$, то согласно (28) левая часть неравенства (32) была бы ограничена равномерно относительно всех t-атомов a_{τ_n}, что несовместимо с (32) в силу ($31b$). Теорема доказана.

2.5.5.

Примеры. Положим $A_n = 3^n - n, B_n = 3^n + n, k_n \equiv 1$, так что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n З\left(\dfrac{x - 3^n}{n}\right)$, где З — основной зуб. Эта пила плохая, как доказано в теореме 9. Но теперь мы можем утверждать, что она *устойчиво* плохая, т.к. выполнены все условия теоремы 10.

Пусть $A_n = 3^n - n^{\log n}$, $B_n = 3^n + n^{\log n}$, $k_1 = 1$, $k_n = \dfrac{1}{\log n}$. Условия теоремы 10 выполнены, причем $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$. Слегка сгладив каждый зуб $f|_{I_n}$ около точек A_n, C_n, B_n, мы превратим f в правильную, устойчиво плохую непрерывно дифференцируемую функцию, производная которой исчезает в бесконечности.

3. Некоторые критерии равномерной непрерывности сопряженной функции

3.1.

В этом разделе, ограничиваясь достаточно гладкими функциями, мы сформулируем некоторые условия, необходимые и достаточные для липшицевости *сопряженной* функции (теорема 4, см. Введение, п. 1.2.2). В теореме 5 мы найдем условия, достаточные для ее равномерной непрерывности.

Здесь и далее будем рассматривать правильные функции f, подчиненные условию $f(0)=0$. Нетрудно видеть, что это ограничение не умаляет общности теорем 4 и 5. Для таких f имеем

$$\widetilde{f}(s)=\frac{1}{\pi}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{1}{s-t}+\frac{1}{t}\right)dt+c. \tag{33}$$

(Напомним, что функцию $\widetilde{f}$ мы определяем с точностью до аддитивной константы.) Преобразуем интегральное выражение для $\widetilde{f}$, опуская константу c:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(s) &= \frac{1}{\pi}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{1}{s-t}+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{\pi}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{R}} f(s-t)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s-t}\right)dt\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(s-t)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s-t}\right)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f(s-t)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s-t}\right)\right)dt\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(s-t)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s-t}\right)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(s+t)\left(\frac{1}{s+t}-\frac{1}{t}\right)dt\right)\\
&= \int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{f(s-t)-f(s+t)}{t}+\frac{f(s-t)}{s-t}+\frac{f(s+t)}{s+t}\right]dt.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\widetilde{f}(s)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{f(s-t)-f(s+t)}{t}+g(s-t)+g(s+t)\right]dt, \tag{34}$$

где $g(s)=\frac{f(s)}{s}$. Напомним что через J_f мы обозначаем следующую функцию: $J_f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\Delta_t^2 f(x)}{t^2}dt$, где Δ_t^2 — оператор второй разности.

3.2.

Здесь мы покажем, что для правильной f и числа $h \in (0,1]$ при любом $s \in \mathbb{R}$

$$(\Delta_h \widetilde{f})(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_s^{s+h} (J_f(u) + r_1^f(u))du + r_2^f(s,h), \tag{35}$$

где функция r_1^f ограничена на $\mathbb{R}$, и

$$|r_2^f(s,h)| \le A_f(h + h|\log h|), \qquad s \in \mathbb{R}, 0 < h \le 1. \tag{36}$$

Из (35), (36) в п. 3.3 мы выведем наши теоремы 4, 5 об оценках разностей $\Delta_h \widetilde{f}$.

Для вывода формулы (35) зафиксируем число $h \in (0,1]$ и положим

$$K(f,s,t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(s-t) - f(s+t)}{t} + g(s-t) + g(s+t)\right].$$

Далее, положим $a_h(s) = \int_0^h K(f,s,t)dt$, $b_h(s) = \int_h^1 K(f,s,t)dt$, $c(s) = \int_1^{+\infty} K(f,s,t)dt$. Согласно (34)

$$\widetilde{f}(s) = a_h(s) + b_h(s) + c(s). \tag{37}$$

Заметим, что $b_1 \equiv 0$. При любом $k > 0$ и $s \in \mathbb{R}$ из (37) следует, что

$$\Delta_k \widetilde{f}(s) = (\Delta_k a_h)(s) + (\Delta_k b_h)(s) + (\Delta_k c)(s).$$

Полагая $k = h$, находим

$$(\Delta_h \widetilde{f})(s) = A + B + C, \tag{38}$$

где

$$A = (\Delta_h a_h)(s), B = (\Delta_h b_h)(s), C = (\Delta_h c)(s).$$

Чтобы оценить $|A|$, заметим, что

$$\begin{aligned} |K(f,s,t)| &\le \frac{1}{\pi} \cdot \frac{|f(s-t) - f(s+t)|}{t} + \frac{1}{\pi}|g(s+t)| + \frac{1}{\pi}|g(s-t)| \\ &\le \frac{1}{\pi}\Big[2C_f + C_f + C_f\Big] = \frac{4}{\pi}C_f \end{aligned}$$

при любых $s \in \mathbb{R}, t > 0$, где C_f — липшицева константа функции f, т.к. $|g(\xi)| = \left|\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\right| \le C_f$. Поэтому при любых $s \in \mathbb{R}$

$$|A| = |\Delta_h a_h(s)| = \left|\int\limits_0^h (\Delta_h K)(t)dt\right| \le \int\limits_0^h 8C_f dt = 8C_f h \tag{39}$$

(оператор Δ_h под знаком интеграла применяется по переменной s).

Оценим $|B|$:

$$|B| = |(\Delta_h b_h)(s)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_h^1 \frac{|(\Delta_h f)(s-t) - (\Delta_h f)(s+t)|}{t}dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_h^1 (\Delta_h g)(s-t)\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_h^1 (\Delta_h g)(s+t)dt\right| = B_1 + B_2 + B_3. \tag{40}$$

Имеем

$$B_1 \le \frac{1}{\pi}\int\limits_h^1 \frac{|(\Delta_h f)(s-t)| + |(\Delta_h f)(s+t)|}{t}dt \le \frac{1}{\pi}\int\limits_h^1 \frac{2C_f h}{t}dt = \frac{2}{\pi}C_f h|\log h|. \tag{41}$$

Далее, обозначив через G первообразную функции g, имеем

$$B_2 = \left|\int\limits_h^1 g(s+h-t)dt - \int\limits_h^1 g(s-t)dt\right| = \left|-\int\limits_{s+h-1}^{s} g(u)du + \int\limits_{s-1}^{s-h} g(u)du\right|$$
$$= |-(G(s) - G(s+h-1)) + (G(s-h) - G(s-1))|$$
$$\le |G(s) - G(s-h)| + |G(s-1) - G(s-1+h)| \le C_f h + C_f h = 2C_f h, \tag{42}$$

т.к. $|G'| = |g| \le C_f$. Аналогично получим оценку

$$|B_3| \le 2C_f h. \tag{43}$$

Комбинируя (40) с оценками (41)–(43), находим

$$|B| \le 4C_f(h + h|\log h|). \tag{44}$$

Напомним, что при $h = 1$ функция $b_h = b_1 \equiv 0$, так что $B = 0$. Проведем отдельную оценку величины B, дополнительно предположив, что

$$f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}), \sup_{s\in\mathbb{R}} |f''(s)| < +\infty. \tag{45}$$

В этом случае при любых $s \in \mathbb{R}$, $h \in (0,1]$ $|b'_h(s)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_h^1 \frac{f'(s-t)-f'(s+t)}{t}dt\right| \le \frac{2}{\pi}\sup_{s\in\mathbb{R}}|f''(s)|$, так что

$$|B| = |(\Delta_h b_h)(s)| \le \frac{2}{\pi}\sup_{s\in\mathbb{R}}|f''(s)|h. \tag{46}$$

Оценим $|C|$. Напомним, что $C = (\Delta_h c)(s)$, где $c(s) = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\left[\frac{f(s-t)-f(s+t)}{t} + g(s-t) + g(s+t)\right]dt$. Произведя в последнем интеграле преобразования, обратные тем, что привели формулу (33) к виду (34), получим

$$c(s) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t-s|>1} f(t)\left(\frac{1}{s-t}+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{s-1} + \int\limits_{s+1}^{+\infty}\right)f(t)\left(\frac{1}{s-t}+\frac{1}{t}\right)dt.$$

Продифференцируем это равенство по s, учитывая непрерывность функции f, удаленность точки s от множества интегрирования, а также включение $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$; получим

$$\pi c'(s) = f(s-1)\left(1+\frac{1}{s-1}\right) - f(s+1)\left(-1+\frac{1}{s+1}\right) - \int\limits_{|t-s|>1} f(t)\frac{dt}{(s-t)^2}$$

$$= -\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(s+t)+f(s-t)}{t^2}dt + f(s-1) + f(s+1) + g(s+1) - g(s-1)$$

$$= -J_f(s) + \pi r_1^f(s),$$

где $r_1^f(s) = (\Delta_1^2 f)(s) + g(s+1) - g(s-1)$. Итак,

$$\pi c'(s) = -J_f(s) + \pi r_1^f(s). \tag{47}$$

Из липшицевости функции f следует, что

$$|r_1^f(s)| \le 2C_f + C_f + C_f = 4C_f, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Наконец,

$$C = (\Delta_h c)(s) = \int\limits_s^{s+h} c'(u)du = -\frac{1}{\pi}\int\limits_s^{s+h}(J_f(u) + r_1^f(u))du. \tag{48}$$

Положим $r_2^f(s,h) = A + B$. Тогда из (48) и (38) следует формула (35), причем функция r_2^f обладает свойством (36), а при условии (45) — меньше правой части неравенства (46); функция r_1^f ограничена на $\mathbb{R}$.

3.3.

Здесь мы сформулируем и докажем основные результаты этого раздела.

Теорема 4. *Пусть правильная функция f удовлетворяет условиям* (45). *Тогда следующие условия равносильны:*

(a) $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$.

(b) $\sup_{s\in\mathbb{R}} |J_f(s)| < +\infty$.

З а м е ч а н и е. Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ верна для любой $f \in \mathcal{R}$, не обязательно дважды гладкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии (45) верна оценка (46), так что оценка

$$|(\Delta_h \widetilde{f})(s)| \le const \cdot h, \qquad 0 < h \le 1, s \in \mathbb{R}$$

при условии (b) следует из (35) (напомним, что функция r_1^f ограничена на $\mathbb{R}$). Если же $\widetilde{f}$ липшицева, то из (35) и (46) следует, что

$$\left| \int\limits_s^{s+h} J_f(u)du \right| \le const \cdot h, \qquad s \in \mathbb{R}, 0 < h \le 1,$$

так что $\sup_{s\in\mathbb{R}} |J_f(s)| < +\infty$. Доказательство завершено.

Теорема 5. *Если f правильна, а функция J_f ограничена на $\mathbb{R}$, то $\widetilde{f}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$; более того,*

$$|\Delta_h \widetilde{f}(s)| \le const \cdot (h + h|\log h|), \qquad s \in \mathbb{R}, 0 < h \le 1. \tag{49}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о немедленно следует из (35) и (36). Теорема 5 есть обобщение теоремы 3 из разд. 1 (если f *липшицева и ограничена на* $\mathbb{R}$, то $\widetilde{f}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет оценке (49)). Действительно, из ограниченности f следует, что и J_f ограничена. Но условиям теоремы 5 удовлетворяют и многие неограниченные функции. Так, например, если f правильна, и $\int_1^{+\infty} \frac{\omega_f(t)}{t^2} dt < +\infty$, где $\omega_f(t) = \sup_{h\in(0,t), s\in\mathbb{R}} |\Delta_h f(s)|$, то, очевидно, J_f — ограниченная функция. Конкретным примером может служить правильная функция f, совпадающая при больших $|t|$ с $|t|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (и вообще, правильные функции f, удовлетворяющие условию $\omega_f(t) = O(t^\alpha)$ при $t \to \infty$ и $0 < \alpha < 1$).

В заключение приведем один критерий ограниченности разности $\Delta_1 \widetilde{f}$. Обозначим через Φ первообразную функции J_f.

Теорема 11. *Пусть f — правильная функция. Функция $\Delta_1 \widetilde{f}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена функция $\Delta_1 \Phi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (35) (при $h = 1$)

$$\Delta_1 \widetilde{f} = \frac{1}{\pi} \Delta_1 \Phi + \theta,$$

где θ — ограниченная функция.

3.4. Заключительные замечания о функции J_f

1) Предположение (45) не слишком обременительно для наших целей, поскольку в задачах гармонического анализа, ради которых мы и обратились к проблеме липшицевости функции $\widetilde{f}$, важна не сама $f \in \mathcal{R}$, а *класс* функций $g \in \mathcal{R}$, удовлетворяющих условию $\|f-g\|_\infty < +\infty$ (или хотя бы одностороннему условию $g + const \geq f$). Между тем, для любой функции $f \in \mathcal{R}$ нетрудно посторить такую функцию f_1, что

$$f_1 \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}),\ \sup_{\mathbb{R}} |f_1'| + |f_1''| < +\infty,\ \|f - f_1\|_\infty < +\infty.$$

Условие правильности функции f можно даже ослабить, заменив его на

$$f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P}), \sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq 1\} < +\infty. \tag{50}$$

В самом деле, обозначим через S оператор, преобразующий локально суммируемую функцию F в абсолютно непрерывную функцию $x \mapsto \int_x^{x+1} F$. Если f удовлетворяет условиям (50), то $\|S(f) - f\|_\infty < \infty$, так что $S(f) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{P})$, причем $(S(f))' = \Delta_1 f \in \mathrm{L}^\infty$, и потому $S(f) \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, так что $S(f) \in \mathcal{R}$. Мы видим, что S преобразует функции, подчиненные условиям (50) (и в частности, правильные функции) в $\mathcal{R}$. Понятно, что в качестве f_1 можно взять функцию $S^3(f)$.

2) Если $f \in \mathcal{R}$, то, как нетрудно показать, $f(x) = o(|x|)$при $|x| \to \infty$. Поэтому, выполнив в интеграле J_f интегрирование по частям, получим

$$J_f(s) = \int_1^{+\infty} \frac{f'(s+t) - f'(s-t)}{t} dt + (\Delta_1^2 f)(s),$$

где интеграл понимается как несобственный $\left(\int_1^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A\right)$. Внеинтегральное слагаемое ограничено (т.к. $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$), и, значит, ограниченность функции J_f равносильна ограниченности функции $s \mapsto \int_1^{+\infty} \left(\frac{f'(s+t) - f'(s-t)}{t}\right) dt$.

3) Рассмотрим зависящую от параметра $s \in \mathbb{R}$ вероятностную меру μ_s на $\mathbb{R}$:

$$\mu_s(E) = \frac{1}{2} \int_{E \setminus (s-1, s+1)} \frac{dt}{(s-t)^2}.$$

Эта мера сосредоточена на лучах $(-\infty, s-1), (s+1, +\infty)$. Ограниченность функции J_f, где $f \in \mathcal{R}$, означает (как видно из вычислений п. 5.2) равномерную по $s \in \mathbb{R}$ ограниченность величины

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_s - f(s) = \int_{\mathbb{R}} (f - f(s)) d\mu_s.$$

Неограниченность функции J_f легко усматривается в том случае, когда f есть правильная плохая пила, построенная в п. 2.3:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n\text{З}\left(\frac{s - c_n}{n}\right).$$

Поскольку $f(c_n - n) \equiv 0$, то $\Delta^2_{c_n - n} f(t) = f(c_n - n + t) + f(c_n + n + t) \geq f(c_n - n + t)$ и

$$J_f(c_n - n) \geq \int_1^{\infty} \frac{f(c_n - n + t)}{t^2} dt \geq \int_1^{n} \frac{dt}{t} = \log n.$$

Список литературы

[1] *П. Кусис*, Введение в теорию пространств H^p. Мир, Москва (1984).

[2] *Д. Машреги, Ф.Л. Назаров, В.П. Хавин*, Теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство. (В печати)

[3] *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье. Гос. изд-во техн.-теорет. лит., Москва–Ленинград (1948).

[4] *V. Havin and B. Jöricke*, The uncertainly principle in harmonic analysis. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1994).

[5] *P. Koosis*, The logarithmic integral. 1. — *Cambridge Stud. Adv. Math.* (1988), v. 12, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[6] *P. Koosis*, The logarithmic integral. 2. — *Cambridge Stud. Adv. Math.* (1992), v. 21, Cambridge Univ. Press, Cambridge..

[7] *L.de Branges*, Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1968).

[8] *V. Havin and J. Mashreghi*, Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 1. — *Can. J. Math.* (2003), v. 55(6), p. 1231–1263.

[9] *V. Havin and J. Mashreghi*, Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 2. — *Can. J. Math.* (2003), v. 55(6), p. 1264–1301.

[10] *Дж. Гарнетт*, Ограниченные аналитические функции. Мир, Москва (1984).

On the I.I. Privalov theorem on the Hilbert transform of Lipschitz functions

Yu.S. Belov, V.P. Havin

It is known that the Hilbert transform $h(f)$ of a bounded Lipschitz (order one) function f on $\mathbb{R}$ is uniformly continuous (h is understood as the singular integral operator with the Cauchy kernel regularized at infinity, so that h is defined on the class of all functions summable on $\mathbb{R}$ w.r. to the Poisson measure). It is shown that the above theorem does not hold (in a very strong sense) for unbounded Lipschitz f's. Conditions sufficient (and "almost necessary") for $h(f)$ to be Lipschitz are given. The results are motivated by some uniqueness problems of the Fourier analysis.