Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 4, с. 484–491

О сильных асимптотических местах мероморфных функций конечного нижнего порядка

И.И. Марченко

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

Szczecin University, Institute of Mathematics
15 Wielkopolska Str., Szczecin, 70451, Poland

E-mail:iim@ukr.net
marchenko@wmf.univ.szczecin.pl

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2004 г.

В работе вводится новое понятие — сильное асимптотическое место мероморфной функции. Для сильных асимптотических мест мероморфных функций конечного нижнего порядка получен аналог классической теоремы Данжуа–Карлемана–Альфорса.

В роботі запроваджено нове поняття — сильне асимптотичне місце мероморфної функції. Для сильних асимптотичних місць мероморфних функцій скінченного нижнього порядку отримано аналог класичної теореми Данжуа–Карлемана–Альфорса.

Посвящается Иосифу Владимировичу Островскому

Напомним определение асимптотического значения мероморфной функции ([1, с. 233]; [2]). Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется асимптотическим значением мероморфной функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$, задаваемая уравнением $z = z(t)$, $0 \le t < \infty$, $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, такая, что

$$\lim_{z\to\infty, z\in\Gamma} f(z) = \lim_{t\to\infty} f(z(t)) = a.$$

В этом случае пара $\{a, \Gamma\}$ называется асимптотическим местом. Два асимптотических места $\{a_1, \Gamma_1\}$, $\{a_2, \Gamma_2\}$ считаются одинаковыми, если $a_1 = a_2 = a$

Mathematics Subject Classification 2000: 30D30, 30D35.

и существует последовательность непрерывных кривых γ_k таких, что один конец γ_k лежит на Γ_1, другой на Γ_2 и

$$\lim_{k\to\infty}\min_{z\in\gamma_k}|z|=\infty,\qquad \lim_{z\to\infty, z\in\bigcup\limits_k\gamma_k} f(z)=a.$$

В случае целых функций конечного нижнего порядка известна классическая теорема Данжуа–Карлемана–Альфорса.

Теорема А ([1, с. 226]; [3]). *Целая функция конечного нижнего порядка λ не может иметь более $\max\{[2\lambda],1\}$ различных асимптотических мест.*

Для целых функций бесконечного нижнего порядка множество асимптотических мест может быть равно ∞. Легко увидеть, что это справедливо для функции e^{e^z}.

В 1999 году автор ввел понятие сильного асимптотического места целых функций.

Определение 1 [4]. *Будем говорить, что a является сильным асимптотическим значением целой функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma: z=z(t)$, $0\le t<\infty$, $z(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, такая, что*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log|f(z(t))-a|^{-1}}{\log M(|z(t)|,f)}=1,\quad \textit{если}\ \ a\neq\infty\ ;$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log|f(z(t))|}{\log M(|z(t)|,f)}=1,\quad \textit{если}\ \ a=\infty,$$

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Если a — сильное асимптотическое значение функции $f(z)$, то асимптотическое место $\{a,\Gamma\}$ будем называть сильным асимптотическим местом.

В работе [4] автор получил точные оценки числа сильных асимптотических мест $\{\infty,\Gamma_j\}$ целых функций через величины $\beta(\infty,f)$, введенные В.П. Петренко [5] и величины $b(\infty,f)$, введенные в работах А. Еременко [6], В. Бергвайлера и Г. Бока [7].

В 1987 году А. Еременко доказал следующий результат.

Теорема В [8]. *Для каждого числа $0\le\rho\le\infty$ существует мероморфная функция порядка ρ, для которой множество асимптотических значений совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью.*

Различным обобщениям теоремы Данжуа–Карлемана–Альфорса на случай мероморфных функций посвящены работы Л. Альфорса [9], А.А. Гольдберга [10], М. Хейнса [11], А. Аветисяна, А. Аракеляна, А.А. Гончара [12].

В работе вводится понятие сильного асимптотического значения и сильного асимптотического места мероморфной функции.

Определение 2. *Число a называется α_0-сильным асимптотическим значением мероморфной функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma : z = z(t)$, $0 \le t < \infty$, $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, такая, что*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log |f(z(t)) - a|^{-1}}{T(|z(t)|, f)} = \alpha(a) \ge \alpha_0 > 0, \quad \text{если } a \ne \infty \ ;$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log |f(z(t))|}{T(|z(t)|, f)} \ge \alpha_0 > 0, \quad \text{если } a = \infty,$$

где $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика мероморфной функции $f(z)$. Если $a - \alpha_0$ — сильное асимптотическое значение мероморфной функции $f(z)$, то асимптотическое место $\{a, \Gamma\}$ будем называть α_0-сильным асимптотическим местом.

Если $a - \alpha_0$ — сильное асимптотическое значение мероморфной функции $f(z)$, то величина отклонения в смысле Петренко $\beta(a, f) \ge \alpha_0$. Поэтому из наших (с А.И. Щербой) результатов [13] следует, что число различных сильных асимптотических значений мероморфной функции конечного нижнего порядка λ не превосходит $\frac{2\pi\lambda}{\alpha_0}$ при $\lambda \ge 1/2$ и $\frac{2\pi\lambda}{\alpha_0 \sin \pi\lambda}$ при $\lambda < 1/2$. В настоящей работе этот результат распространяется на сильные асимптотические места мероморфных функций конечного нижнего порядка.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, $\{a_i, \Gamma_i\}$, $i = 1, 2, \dots, p-\alpha_0$ — сильные асимптотические места $f(z)$. Тогда*

$$p \le \begin{cases} \left[\frac{2\pi\lambda}{\alpha_0}\right], & \text{если} \quad \lambda \ge \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{2\pi\lambda}{\alpha_0 \sin \pi\lambda)}\right], & \text{если} \quad \lambda < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Пример функции e^{e^z} показывает, что условие конечности нижнего порядка в теореме 1 является существенным. Оценка в теореме 1 для $\lambda = n/2$ ($n = 2, 3, \dots$) и $\alpha_0 = \pi$ достигается. Это легко следует из соответствующего примера мероморфной функции (см. [1, с. 317]).

В связи с неравенством $\alpha(a) \ge \alpha_0 > 0$ следует отметить, что А.А. Гольдберг [14] показал, что существует мероморфная функция конечного порядка, которая имеет бесконечное число асимптотических значений, асимптотическими кривыми являются лучи $\{\arg z = \theta_n\}$ и выполняется неравенство

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\theta_n})-a_n|^{-1}}{T(r,f)}>0.$$

Доказательство теоремы 1. Теорему достаточно доказать в случае, если ∞ не является сильным асимптотическим значением функции $f(z)$. В противном случае следует рассмотреть функцию $\widetilde{f}(z)=\frac{1}{f(z)-a}$, где $a-$ число для которого величина отклонения $\beta(a,f)=0$.

Пусть $\{a_1,\Gamma_1^1\},\dots,\{a_1,\Gamma_{i_1}^1\},\dots,\{a_m,\Gamma_1^m\},\dots,\{a_m,\Gamma_{i_m}^m\}$, $i_1+i_2+\dots+i_m=p$, — p различных сильных асимптотических мест мероморфной функции $f(z)$, $c=\min\limits_{i\neq j}|a_i-a_j|>0$. Для $p\le 1$ теорема следует из теоремы Петренко [5] об оценке величины отклонения.

Будем предполагать, что $p\ge 2$.

Пусть R_n — последовательность такая, что

$$\lambda=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log T(4R_n,f)}{\log R_n}.$$

Тогда существует число n_0 такое, что при $n\ge n_0$ выполняются неравенства

$$T(R_n,f)<R_n^{\lambda+1},\qquad 5R_n^{-2}<\frac{c}{4}.$$

Далее для каждого $n\ge n_0$ рассмотрим множество

$$G_n=\{z:|z|<R_n,|f'(z)|<R_n^{-2-\lambda}\}.$$

Обозначим через $G_{n,k}$ множество, состоящее из объединения тех связных компонент G_n, в каждой из которых есть точка z_1 такая, что $|f(z_1)-a_k|<\frac{c}{4}$. В работе [15] показано, что при $n\ge n_0$ эти множества попарно не пересекаются. Пусть $G_{n,k}=\bigcup\limits_{j=1}^{j_k}G_{n,k,j}$, где $G_{n,k,j}$ — компоненты множества $G_{n,k}$. Далее при $n\ge n_0$ положим

$$u_{n,k,j}(z)=\begin{cases}\log\frac{1}{|f'(z)|}, & \text{если}\quad z\in G_{n,k,j}\\ (\lambda+2)\log R_n, & \text{если}\quad z\notin G_{n,k,j},\end{cases}$$

$$k=1,2,\dots,m,\ 1\le j\le j_k.$$

Доказательство теоремы 1 базируется на одном результате, доказанном автором в работе [15, с. 224].

Лемма 1. *Пусть τ — произвольное положительное число,*

$$B(\tau)=\begin{cases}\pi\tau, & \textit{если}\quad \tau>\frac12\\ \frac{\pi\tau}{\sin\pi\tau}, & \textit{если}\quad \tau\le\frac12,\end{cases}$$

$$A = \{r : \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{j_k} \max_{|z|=r} u_{n,k,j}(z) - B(\tau)\ T(r, f') - B(\tau)\pi q(\lambda+2)\log R_n > 0\},$$

$$q = j_1 + j_2 + \cdots + j_m.$$

Тогда

$$\tau \int\limits_{A\cap[R_0,R_n]} \frac{dt}{t} \le \log T(4R_n, f) + \log\log R_n + O_\tau(1), \quad n \to \infty.$$

Если $f(z)$ — рациональная функция, то теорема 1 очевидна. Пусть $f(z)$ — трансцендентная мероморфная функция, т.е. $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = \infty$. Выберем $\varepsilon(R) \to 0$ так, чтобы функция $\varphi(R) = \frac{T(R^{\varepsilon(R)},f)}{\log R} \to \infty$ при $R \to \infty$. Пусть $r \in [R_n^{\varepsilon(R_n)}, R_n]$. Тогда

$$T(r, f) \ge T(R_n^{\varepsilon(R_n)}, f) = \log R_n \varphi(R_n).$$

Поэтому $\log R_n = o(T(r, f))$, $r \in [R_n^{\varepsilon(R_n)}, R_n]$, $n \to \infty$.

Далее нам понадобится следующий вариант леммы о логарифмической производной.

Лемма 2 [15, с. 221]. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция,* $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. *Тогда вне множества конечной меры справедливо соотношение*

$$\log^+ M\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log(rT(r, f))) \quad (r \to \infty).$$

Продолжим доказательство теоремы 1.

В силу леммы 2 имеем

$$\log^+ \frac{1}{|f(z) - a_k|} = \log^+ \frac{1}{|f'(z)|} + O(\log T(r, f)), \tag{1}$$

$$|z| = r \notin E_k, \quad mesE_k < \infty$$

Поскольку $\{a_k, \Gamma_1^k\}, \ldots, \{a_k, \Gamma_{i_k}^k\}$, $k = 1, \ldots, m$ — сильные асимптотические места $f(z)$, то

$$\liminf_{z\to\infty,\, z\in\Gamma_{i_l}^k} \frac{\log^+ \frac{1}{|f(z)-a_k|}}{T(|z|, f)} \ge \alpha_0 > 0,\ l = 1, \ldots, i_k.$$

Поэтому

$$\liminf_{z\to\infty,\, z\in\Gamma_{i_l}^k,\ |z|\notin E_{i_l}^k} \frac{\log\frac{1}{|f'(z)|}}{T(|z|,f)} \geq \alpha_0 > 0,$$

где $mesE_{i_l}^k < \infty$. Отсюда следует, что на асимптотических кривых $\Gamma_{i_l}^k$

$$\log^+\frac{1}{|f'(z)|} > \frac{\alpha_0}{2}T(|z|,f) > (\lambda+2)\log R_n, \quad |z| \in [R_n^{\varepsilon(R_n)}, R_n],$$

$$|z| \notin E_{i_l}^k, \quad mesE_{i_l}^k < \infty, n\to\infty.$$

Таким образом, часть асимптотической кривой $\Gamma_{i_l}^k$ принадлежит некоторой компоненте множества $G_{n,k}$. Следовательно, при $n \geq n_0$ число компонент $\{G_{n,k,j}\}$ не меньше числа асимптотических кривых $\{\Gamma_i^j\}$, т.е. числа p.

Ясно, что вне множества конечной меры

$$T(r,f') \leq 2T(r,f) + O(1), \quad r\to\infty, \quad r\notin E, mesE<\infty.$$

Из леммы 1 следует, что для всех $r\in[R^{\varepsilon(R_n)}, R_n]\backslash A$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{i_k}\max_{|z|=r} u_{n,k,i}(z) < (2B(\tau)+o(1))T(r,f), \quad n\to\infty$$

и

$$\tau\int\limits_{[R_n^{\varepsilon(R_n)},R_n]\backslash A}\frac{dt}{t} \geq \tau(1-\varepsilon(R_n))\log R_n - \log T(4R_n,f) - \log\log R_n + O_\tau(1).$$

Из последнего неравенства и определения последовательности R_n следует

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\log R_n}\int\limits_{[R_n^{\varepsilon(R_n)},R_n]\backslash A}\frac{dt}{t} \geq 1-\frac{\lambda}{\tau}.$$

Отсюда и соотношения (1) получаем, что для каждого $\tau>\lambda$ существует последовательность $r_n\in[R_n^{\varepsilon(R_n)}, R_n]$ такая, что

$$p(\alpha_0+o(1))T(r_n,f) \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{i_k}\max_{|z|=r_n} u_{n,k,i}(z) < (2B(\tau)+o(1))T(r_n,f), \quad n\to\infty.$$

Следовательно,

$$p(\alpha_0+o(1)) \leq 2B(\tau)+o(1), \quad n\to\infty.$$

В этом неравенстве устремляем $n\to\infty$:

$$p\alpha_0 \leq 2B(\tau).$$

В силу произвольности числа $\tau>\lambda$ приходим к утверждению теоремы 1.

Автор выражает признательность А.Ф. Гришину за внимание к работе.

Список литературы

[1] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский,* Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970).

[2] *P. Boutroux,* Sur les zéros des fonctions entières. — *Acta Math.* (1897), v. 20, p. 357–396.

[3] *L. Ahlfors,* Uber die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. — *Acta Acad. Aboensis. Math. Phys.* (1932), v. 6, No. 9, p. 1–8.

[4] *И.И. Марченко,* Об асимптотических значениях целых функций. — *Изв. РАН. Сер. мат.* (1999), т. 63, № 3, с. 133–146.

[5] *В.П. Петренко,* Рост мероморфных функций. Вища школа, Харьков (1978).

[6] *A. Eremenko,* An analogue of the defect relation for the uniform metric. — *Compl. Variables Theory Appl.* (1997), v. 34. p. 83–97.

[7] *W. Bergweiler and H. Bock,* On the growth of meromorphic functions of infinite order. — *J. Anal. Math.* (1994), v. 64. No. 9, p. 327–336.

[8] *А.Э. Еременко,* Обратная задача теории распределения значений для мероморфных функций конечного порядка. — *Сиб. мат. журн.* (1986), т. 27, № 3, с. 87–102.

[9] *R. Nevanlinna,* Analytic functions. Springer, Berlin (1970).

[10] *А.А. Гольдберг,* Некоторые асимптотические свойства мероморфных функций. — *Учен. зап. Львовск. ун-та* (1956), т. 36, с. 54–73.

[11] *M. Heins,* On a notion of convexity connected with a method of Carleman. — *J. Anal. Math.* (1959), т. 7, с. 53–77.

[12] *А. Аветисян, А. Аракелян, А.А. Гончар,* Об асимптотических свойствах мероморфных функций. — *Изв. АН АрмССР. Сер. мат.* (1989), т. 24, № 3, с. 207–225.

[13] *И.И. Марченко, А.И. Щерба,* О величинах отклонений мероморфных функций. — *Мат. сб.* (1990), т. 181, № 1, с. 3–24.

[14] *А.А. Гольдберг,* О дефектах мероморфных функций. — *Докл. АН СССР* (1954), т. 98, с. 893–895.

[15] *И.И. Марченко,* Об аналоге второй основной теоремы для равномерной метрики. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1998), т. 5, № 3/4, с. 212–227.

On strong asymptotic spots of meromorphic functions of finite order

I.I. Marchenko

In this article the concept of a strong asymptotic spot for meromorphic functions has been introduced. It is obtained an analogue of the Denjoy–Carleman–Ahlfors theorem for distinct strong asymptotic spots of meromorphic functions of finite lower order.