Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 1, с. 25–72

Новые формулы для индикаторов субгармонических функций

А.Ф. Гришин

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:grishin@univer.kharkov.ua

Т.И. Малютина

Украинская академия банковского дела
ул. Петропавловская, 56, Сумы, 40030, Украина
E-mail:malyutina@abank.sumy.ua

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2004 г.

Статья относится к теории роста субгармонических функций конечного порядка. Важными характеристиками роста таких функций являются индикатор и нижний индикатор. Среди основных результатов статьи — теорема, где приводятся новые формулы для индикатора и нижнего индикатора. Как приложение получается критерий полной регулярности в смысле Левина–Пфлюгера для субгармонической функции, который формулируется для фиксированного луча. Он усиливает одну теорему Б.Я. Левина. К основным результатам также относится теорема, которую можно трактовать как далеко идущую разработку, связанную с теоремой Бернштейна. При исследовании субгармонической функции ее часто сравнивают с функцией, которую получают смещением риссовской меры первоначальной функции на конечное число лучей. Среди других результатов — новые свойства операции смещения.

Стаття відноситься до теорії росту субгармонічних функцій скінченного порядку. Важливими характеристиками росту таких функцій є індикатор і нижній індикатор. Серед головних результатів статті — теорема, де даються нові формули для індикатора та нижнього індикатора.

Mathematics Subject Classification 2000: 52A43, 31C05.

Як застосування одержано критерій повної регулярності росту в сенсі Левіна–Пфлюгера для субгармонічних функцій, який формулюється для фіксованого променя. Він підсилює одну теорему Б.Я. Левіна. До головних результатів також відноситься теорема, яку можна трактувати як далеко йдучу розробку, що пов'язана з однією теоремою Бернштейна. При дослідженні субгармонічної функції її часто порівнюють з функцією, яку одержують зміщенням ріссовської маси першої функції на скінченну кількість променів. Серед інших результатів — нові властивості операції зміщення.

Посвящается 70-летию Иосифа Владимировича Островского

1. Формулировка основных результатов, необходимые определения

Начнем с необходимых определений и обозначений. Буквой M будем обозначать постоянные, не обязательно равные. В то же время M с индексом – это символ для обозначения индивидуальной величины. Мы будем обозначать $x^+ = \max(x, 0)$, $l(x) = \max(\ln x, 1)$,

$$l_2(x) = \begin{cases} \ln\ln x, & x \geq e^e, \\ 1, & x \in (0, e^e]. \end{cases}$$

Приведем обозначения для наиболее часто встречающихся в статье множеств. Через $\mathbb{R}$ будем обозначать вещественную ось, через $\mathbb{C}$ — комплексную плоскость, $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Далее обозначаем

$$C(w, R) = \{z : |z - w| < R\}, \qquad B(w, R) = \{z : |z - w| \leq R\},$$

$$[R_1, R_2, \theta_1, \theta_2] = \{z : R_1 \leq |z| \leq R_2, \quad \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\},$$

$$A(\theta_1, \theta_2) = \{z : \theta_1 < \arg z < \theta_2\}.$$

Если в интеграле область интегрирования не указывается, то таковой является плоскость.

Дифференцируемую на полуоси $(0, \infty)$ функцию $\rho(r)$ называют уточненным порядком в смысле Валирона, если выполняются условия:

$$1)\ \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho, \qquad 2)\ \lim_{r\to\infty} r \ln r \rho'(r) = 0.$$

Наиболее простой случай $\rho(r) \equiv \rho$. Будем обозначать $V(r) = r^{\rho(r)}$. Важно поведение функции $V(r)$ в окрестности бесконечности. Однако при использовании $V(r)$ выкладки и формулировки упрощаются, если считать, что выполняются некоторые дополнительные условия. В нашей статье в случае $\rho > 0$ считаем, что функция $V(r)$ возрастает на полуоси $[0, \infty)$, непрерывна в нуле, причем $V(0) = 1$. Свойства уточненного порядка, которыми будем пользоваться, изложены в [1]. Важнейшим из них является

$$\frac{V(tr)}{V(r)} \rightrightarrows t^\rho, \quad r \to \infty, \quad t \in [a,b], \quad 0 < a < b < \infty.$$

Новые результаты по уточненному порядку можно найти в [2].

Определим классы субгармонических функций, которые рассматриваются в статье. Класс $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ субгармонических в углу $A(\theta_1, \theta_2)$ функций формального порядка $\rho(r)$ состоит из тех функций $v(z)$, для которых существует величина $M = M_v$ такая, что выполняется неравенство $v(re^{i\theta}) \le MV(r)$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. Если вместо угла $A(\theta_1, \theta_2)$ взять плоскость $\mathbb{C}$, то соответствующий класс обозначается $\mathrm{SF}(\rho(r))$.

Будем говорить, что субгармоническая в углу $A(\theta_1, \theta_2)$ функция v удовлетворяет условию Левина (относительно уточненного порядка $\rho(r)$), если существуют числа $\delta \in \left(0, \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$, $q \in (0,1)$, $N \in \mathbb{R}$, такие, что для каждого $R \ge 1$ на множестве $\left[qR, \dfrac{1}{q}R, \theta_1 + \delta, \theta_2 - \delta\right]$ найдется точка z_0, для которой выполняется неравенство $v(z_0) \ge NV(|z_0|)$.

Будем говорить, что функция v локально удовлетворяет условию Левина в углу $A(\theta_1, \theta_2)$, если существуют числа $\delta \in \left(0, \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$, $N \in \mathbb{R}$, такие, что множество

$$E = \left\{ R : \sup_{\theta \in (\theta_1 + \delta, \theta_2 - \delta)} v(Re^{i\theta}) \ge NV(R) \right\}$$

является неограниченным.

Класс $\mathrm{SHF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ функций полуформального порядка $\rho(r)$ в углу $A(\theta_1, \theta_2)$ состоит их тех функций класса $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, которые удовлетворяют условию Левина.

Класс $\mathrm{SFL}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ есть пересечение класса $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ с множеством функций, локально удовлетворяющих условию Левина. Очевидно, что

$$\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r)) \supset \mathrm{SFL}(\theta_1, \theta_2, \rho(r)) \supset \mathrm{SHF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r)).$$

Известно (см., напр., [3]), что если $\theta_2 - \theta_1 > \pi/\rho$, то все три класса совпадают. В противном случае эти классы различны.

Для функций класса $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ индикатор (индикатор роста или индикатор Фрагмена–Линделефа) $h(\theta)$ и нижний индикатор $\underline{h}(\theta)$ определяют с помощью формул

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

$$\underline{h}(\theta) = \underline{\lim_{r\to\infty}}^* \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)} := \sup_E \underline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\overline{\in} E}}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

где супремум вычисляется по всем множествам E нулевой линейной плотности.

Известно ([4], см. также [1]), что индикатор $h(\theta)$ является конечной ρ-тригонометрически выпуклой функцией или тождественно равен $-\infty$. Последний случай возможен. Условие $h(\theta) > -\infty$ эквивалентно условию $v \in \mathrm{SFL}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$. Если для некоторого $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ выполняется неравенство $\underline{h}(\theta) > -\infty$, то $v \in \mathrm{SHF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$. Обратное утверждение неверно.

Для общей теории субгармонических функций важным является класс SK, состоящий из субгармонических в $\mathbb{C}_+$ функций, которые в каждой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}_+$ имеют положительную гармоническую мажоранту. Введенные ранее классы являются подклассами этого класса. Перечислим некоторые свойства функций класса SK. Если $v \in \mathrm{SK}$, то почти в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ функция v имеет некасательное предельное значение $v(t)$, причем $v(t) \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$. На вещественной оси существует локально конечная граничная мера ν функции v, которая определяется из формулы

$$\lim_{y\to+0} \int_a^b v(x+iy)dx = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Выполняется равенство $d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t)$, где σ — мера, сингулярная относительно меры Лебега.

Для функций класса SK можно ввести понятие полной меры λ, которая для ограниченного борелевского множества E вычисляется следующим образом:

$$\lambda(E) = 2\pi \iint_{E\cap\mathbb{C}_+} \Im\zeta d\mu(\zeta) - \nu(E\cap\mathbb{R}),$$

где μ — риссовская мера функции $v(z)$. Мера λ обладает свойствами:

1) конечна на любом компакте;

2) ее ограничение на $\mathbb{C}_+$ есть положительная мера;

3) ее ограничение на открытую нижнюю полуплоскость — нулевая мера.

Обратно, если мера обладает этими тремя свойствами, то она является полной мерой некоторой функции из класса SK. Полная мера определяет функцию $v \in \mathrm{SK}$ с точностью до слагаемого $\Im g(z)$, где $g(z)$ — вещественная целая функция.

Для функций класса SK полная мера играет роль, аналогичную той, которую играет риссовская мера для функций, субгармонических во всей плоскости. Полная мера, вообще говоря, является знакопеременной мерой, хотя ее отрицательная часть сосредоточена только на вещественной оси. Поэтому, в некотором смысле, функции класса SK по своим свойствам больше напоминают δ-субгармонические функции (представимые в виде разности субгармонических) во всей плоскости, чем субгармонические. Определение полной меры впервые появилось в [5]. Мера λ_1, $d\lambda_1 = \dfrac{1}{|\zeta|} d\lambda(\zeta)$ использовалась в [3]. Мера λ_1 является локально конечной в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Стоит подчеркнуть, что риссовская мера μ и граничная мера ν известны давно. Класс SK изучался в [6], где также рассматривалась сумма $2\pi \Im \zeta d\mu(\zeta) - d\nu(\zeta)$, однако это не рассматривалось как единая мера.

Формулу Пуассона–Иенсена для субгармонической функции можно записать в виде

$$v(z) = -\int\limits_0^R \frac{\mu(B(z,t))}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Во многих вопросах второе слагаемое в правой части можно считать несущественным. Поэтому величины $\mu(B(z,t))$, $\displaystyle\int_0^R \frac{\mu(B(z,t))}{t} dt$ — важные характеристики субгармонической функции. Если на каком-либо множестве E величина $\mu(B(z,t))$ допускает удовлетворительные равномерные относительно z оценки, то такое множество E естественно считать обыкновенным для меры μ, а дополнение к нему — исключительным. Несколько способов построения и оценок исключительных множеств предложено в [3]. Так как в статье этот аппарат используется, то опишем его несколько подробнее.

Пусть μ — положительная локально конечная мера, $A(r)$, $r \in [0, \infty)$, и $\varphi(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$ – непрерывные возрастающие функции, причем $A(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$. Точку $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ назовем *исключительной* для меры μ, если найдется число $\alpha \in (0,1]$ такое, что

$$\mu(B(z, \alpha r)) \geq \varphi(\alpha) V(r), \quad r = |z|. \tag{1}$$

Через F обозначим множество всех исключительных точек для меры μ. Если $z \in F$, то среди чисел α, для которых выполняется неравенство (1), есть наибольшее α_z. Если $\alpha_z < 1$, то будет выполняться равенство

$$\mu(B(z, \alpha r)) = \varphi(\alpha) V(r). \tag{2}$$

Мы не умеем оценивать размеры множества F. Поэтому одновременно рассматривается множество

$$G = \bigcup_{z \in F} C(z, \alpha_z r).$$

Множество G — открытое, и, следовательно, оно представляется в виде объединения не более чем счетного множества связных компонент

$$G = \bigcap_{n=1}^{\omega} G_n, \quad \omega \leq \infty.$$

Если G_n — ограниченное множество, то обозначим через $A_n = C(w_n, \alpha_n |w_n|)$ круг наименьшего радиуса, который содержит множество G_n. Если центр такого круга есть 0, то обозначение $C(w_n, \alpha_n |w_n|)$ не применяется. Если же все компоненты G_n ограничены, то обозначим через $\mathcal{A}$ систему кругов A_n. Для системы кругов $\mathcal{A}$ можно получать удовлетворительные оценки при надлежащих ограничениях на $A(r)$, $\varphi(\alpha)$, μ, что подробно изучалось в работе [3]. В статье будут использоваться только исключительные множества, которые строятся с помощью функций $A(r) = V(r)$ и $\varphi(\alpha) = \dfrac{M}{\eta}\alpha$. Полученные таким способом множества F и G будем обозначать $F(\eta, M, \mu)$ и $G(\eta, M, \mu)$.
Пусть $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение, в область определения $\operatorname{dom} h$ которого входит угол $A(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$ и которое задается формулой

$$h(z) = \begin{cases} z, & z \in \operatorname{dom} h \setminus A(\theta - \Delta, \theta + \Delta), \\ re^{i(\theta+\Delta)}, & \arg z \in [\theta, \theta + \Delta), \\ re^{i(\theta-\Delta)}, & \arg z \in (\theta - \Delta, \theta), \quad r = |z|. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть μ — борелевская мера, сосредоточенная на $\operatorname{dom} h$, $\mu_h(E) = \mu(h^{-1}(E))$. Меру μ_h будем называть мерой, которая получается из меры μ смещением вдоль окружностей с центром в нуле, той ее части, которая расположена в углу $A(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$, на стороны этого угла.

Пусть $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $[\theta - \Delta, \theta + \Delta] \subset (\theta_1, \theta_2)$. Если в представлении функции $v(z)$ ее риссовскую меру μ заменить на μ_h, то получим функцию $v_\Delta(z)$. Детализируем это определение. Если $v \in \mathrm{SF}(0, \pi, \rho(r))$, $\rho \in (0, 1)$, $[\theta - \Delta, \theta + \Delta] \subset (0, \pi)$, то функция $v_\Delta(z)$ определяется из равенства

$$v_\Delta(z) - v(z) = \iint\limits_{A(\theta-\Delta,\theta+\Delta)} \left(\ln\left|1 - \frac{z}{h(\zeta)}\right| - \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| \right) d\mu(\zeta).$$

Приближение функции $v(z)$ функцией $v_\Delta(z)$ – один из способов исследования субгармонических функций. Поэтому нижеследующую теорему мы помещаем среди основных результатов статьи. Тем не менее, не она является главным объектом исследования. В связи с этим мы формулируем ее в той общности, которая достаточна для наших целей.

Теорема 1. *Пусть* $v \in \mathrm{SHF}(0,\pi,\rho(r))$ $\rho \in (0,1)$, *причем* $v(re^{i\varphi}) \le MV(r)$, $\varphi \in (0,\pi)$. *Пусть* Δ, $\Delta_1 \in (0,\frac{1}{2})$, $0 < \delta_1 \le \theta - \Delta < \theta + \Delta \le \pi - \delta_1$. *Тогда существует величина* $M_1 = M_1(\rho(\cdot), M, \delta_1)$ *такая, что выполняется неравенство*

$$\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} |v_\Delta(te^{i\theta}) - v(te^{i\theta})|dt \le M_1 \Delta R V(R), \quad R \ge 1. \tag{4}$$

Более того, если K — *произвольное вещественное число, то существуют величина* $M_2 = M_2(\rho(\cdot), M, K, \delta_1)$ *и бесконечно малая функция* $\varepsilon(R)$ *такие, что если*

$$\sup_{t\in[R,(1+\Delta_1)R]} \frac{v(te^{i\theta})}{V(t)} \ge K, \tag{5}$$

то выполняется неравенство

$$\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \left|v_\Delta(te^{i\theta}) - v(te^{i\theta})\right| dt \le \left(M_2 \max\left(\frac{\Delta}{k}, \frac{\Delta}{l\left(\frac{1}{2\Delta_1 + k\Delta}\right)} \right) + \varepsilon(R) \right) RV(R) \tag{6}$$

при любом $k \in [1, \frac{1}{2\Delta}]$. *Кроме того,* $v_\Delta(te^{i\theta}) \ge v(te^{i\theta})$.

К о м м е н т а р и й. Отметим некоторые особенности сформулированной теоремы. Величина M_1 не зависит от Δ, Δ_1, θ, R. Эти величины, конечно, не произвольные, а должны удовлетворять условиям теоремы. Левая часть неравенства (4) линейно зависит от Δ. Это достаточно редкий в теории субгармонических функций случай, когда смещение субгармонической функции допускает оценку, линейно зависящую от величины смещения. Заметим еще, что эта оценка точна по порядку. Линейную функцию Δ в правой части неравенства (4) нельзя заменить на более быстро убывающую функцию, если $\Delta_1 \ge \Delta$. Это видно на примере функции

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} V(R_n) \ln \left| 1 - \frac{z}{iR_n} \right|,$$

где R_n — достаточно быстро возрастающая последовательность.

Теорема 2. *Пусть* $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $\rho > 0$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, s *– произвольное вещественное число. Пусть*

$$w_s(\alpha) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int\limits_r^{(1+\alpha)r} t^s v(te^{i\theta})dt,$$

$$\underline{w}_s(\alpha) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int\limits_r^{(1+\alpha)r} t^s v(te^{i\theta})dt.$$

Тогда существуют пределы (возможно, несобственные)

$$w_s = \lim_{\alpha\to+0} \frac{w_s(\alpha)}{\alpha}, \qquad \underline{w}_s = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\underline{w}_s(\alpha)}{\alpha}$$

и выполняются равенства

$$h(\theta) = w_s, \qquad \underline{h}(\theta) = \underline{w}_s. \tag{7}$$

Равенства (7) — это и есть новые формулы для индикаторов (см. заголовок статьи). Новый признак полной регулярности субгармонической функции на луче легко следует из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $\rho > 0$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*
1) для некоторого $s > -(1+\rho)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int\limits_1^r t^s v(te^{i\theta})dt;$$

2) для некоторого $s < -(1+\rho)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int\limits_r^\infty t^s v(te^{i\theta})dt;$$

3) для некоторого $s \in (-\infty, \infty)$ *и для всех* $\alpha > 0$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int\limits_r^{(1+\alpha)r} t^s v(te^{i\theta})dt,$$

то функция v *является функцией вполне регулярного роста в смысле Левина–Пфлюгера на луче* $\arg z = \theta$.

Из выполнения условий 1) или 2) следует выполнение условия 3), а из условия 3) — $w_s(\alpha) = \underline{w}_s(\alpha)$. Из теоремы 2 следует, что $h(\theta) = \underline{h}(\theta)$. Это означает, что v является функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$.

Б.Я. Левин ([1, гл. 3, теорема 2]) доказал, что если выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_1^r \frac{v(te^{i\theta})}{t} dt = \frac{h(\theta)}{\rho}, \tag{8}$$

то функция v является функцией вполне регулярного роста. Следовательно, в теореме Левина необходимо не только существование предела в равенстве (8), но и выполнение этого равенства.

Если v является функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, то выполняются условия 1)–3) теоремы 3 для любых s, указанных в данной теореме. Это следует как из рассуждений Б.Я. Левина, так и из текста доказательства теоремы 2.

Отметим кроме того, что аналог теоремы 3 для несубгармонических функций доказан в [7]. Теорема 3 следует из результатов [7] и соответствующих свойств субгармонических функций.

Теорема 4. *Пусть* $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $\rho > 0$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $h(\theta)$ *и* $\underline{h}(\theta)$ *— индикаторы функции* v *на луче* $\arg z = \theta$, $H \in [\underline{h}(\theta), h(\theta)] \cap (-\infty, \infty)$,

$$w(\alpha) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} |v(te^{i\theta}) - HV(t)| dt.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{w(\alpha)}{\alpha} = 0. \tag{9}$$

Более того, если $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta)]$ *или* $H = h(\theta)$, *то*

$$w(\alpha) \le M\alpha \frac{\sqrt{l_2(1/\alpha)}}{\ln(1/\alpha)}. \tag{10}$$

Авторы считают, что соотношениями (9) и (10) выделяются новые важные свойства субгармонических функций конечного порядка. Стоит отметить, что неравенство (10) перестает быть справедливым, если $H = \underline{h}(\theta) > -\infty$. Кроме того, в этом случае неравенство $w(\alpha) \le M(v)\varphi(\alpha)$ не выполняется в множестве всех субгармонических функций класса $\mathrm{SHF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$ с фиксированным нижним индикатором ни для какой функции $\varphi(\alpha)$ вида $\varphi(\alpha) = o(1)\alpha$, $\alpha \to +0$. В статье приводится соответствующий пример.

Существует связь теоремы 4 с одной теоремой В. Бернштейна ([8], см. также [1, гл. 1, теорема 31]). В. Бернштейн доказал, что если $h(\theta)$ есть индикатор функции $v(z)$ (при $v(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция), то для любых $\varepsilon > 0$ и $\omega \in (0,1)$ существуют $\delta > 0$ и последовательность $r_n \uparrow \infty$ такие, что при заданном θ неравенство $v(re^{i\theta}) > (h(\theta) - \varepsilon)V(r)$ выполняется всюду на сегментах $[r_n, (1+\delta)r_n]$ за исключением множества e_n, $\operatorname{mes} e_n < \omega\delta r_n$.

Из теоремы 4 как следствие получается следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $\underline{h}(\theta) \le H_1 < H_2 \le h_2(\theta)$. *Тогда множество*

$$E = \{R : H_1 V(R) \le v(Re^{i\theta}) \le H_2 V(R)\}$$

имеет положительную верхнюю линейную плотность. Более того, для любого $\omega \in (0,1)$ *существуют* $\delta > 0$ *и последовательность* $R_n \uparrow \infty$ *такие, что* $\operatorname{mes}([R_n, (1+\delta)R_n] \cap E) \ge \omega\delta R_n$.

В заключение раздела отметим, что часть результатов статьи опубликована без доказательства в [9].

2. Предварительные и вспомогательные результаты

В этой части статьи приведены известные результаты, которые используются в доказательствах, а также некоторые новые результаты, которые мы классифицируем как вспомогательные.

Теорема 6. *Пусть* $\rho(r)$ *— уточненный порядок,* $\rho > 0$, v *— субгармоническая функция во всей плоскости, удовлетворяющая неравенству* $v(z) \le MV(r)$, $r = |z|$, μ *— ее риссовская мера,* η *— произвольное число из интервала* $(0, \frac{1}{4})$. *Тогда существуют величины* $M_k = M_k(\rho(\cdot), M)$, $k = 3, 4, 5$, *не зависящие от* η, z, h, *такие, что выполняются неравенства:*

1) $l_R(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{R} \displaystyle\sum_{|w_n| \le R} \alpha_n |w_n| \le \eta$;

2) $|v(z)| \le M_4 \ln \frac{1}{\eta} V(r), \quad z \overline{\in} F$;

3) $$|v(z + hz) - v(z)| \le M_5 V(r) \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{|h|}{\eta t}\right) dt, \quad z, z + hz \overline{\in} F,$$

где исключительное множество $F = F(\eta, M_3, \mu)$ *и связанная с ним система кругов* $\mathcal{A} = \{C(w_n, \alpha_n |w_n|), n = 1, 2 \ldots\}$ *такие, как они описаны в разд. 1.*

Все результаты теоремы 6 следуют из [3, вып. 6] однако они получаются по ходу доказательства других утверждений, а теорема с такой формулировкой там отсутствует.

Теорему можно трактовать следующим образом. Пусть PO(1) — множество уточненных порядков $\rho(r)$ таких, что $\rho > 0$ и $V(r) = r^{\rho(r)}$ есть непрерывная возрастающая функция на $[0, \infty)$, причем $V(0) = 1$. Тогда существуют три функции $M_k = M_k(\rho(\cdot), M)$, $k = 3, 4, 5$, определенные на $\mathrm{PO}(1) \times (0, \infty)$ и обладающие следующим свойством. Пусть v — субгармоническая функция, удовлетворяющая неравенству $v(z) \le MV(|z|)$, и μ — ее риссовская мера. Пусть для меры μ с помощью функций $A(r) = V(r)$ и $\varphi(\alpha) = \frac{M_3}{\eta}\alpha$, $\eta \in (0, \frac{1}{4})$ построено исключительное множество F и система кругов $\mathcal{A}$. Тогда справедливы неравенства, приведенные в тексте теоремы. При такой трактовке фраза "M_3 — величина, определенная в теореме 6", является корректной.

Обозначим
$$K(z,\zeta) = \frac{1}{\Im\zeta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|.$$

Мы рассматриваем эту функцию на множестве $\mathbb{C}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+$, причем на ось $\Im\zeta = 0$ функция продолжается по непрерывности. Далее будут изложены результаты, которые удобно применять при исследовании субгармонических функций в полуплоскости. Пусть $v \in \mathrm{SFL}\,(0, \pi, \rho(r))$, q и δ_1 — произвольные числа из интервалов $(0, 1)$ и $(0, \frac{\pi}{4})$. Пусть $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $N \in \mathbb{R}$ таковы, что множество
$$E = \left\{ R \ge 1 : \sup_{\varphi \in [\delta, \pi-\delta]} v(Re^{i\varphi}) \ge NV(R) \right\}$$
не ограничено. Обозначим
$$E_1 = \bigcup_{R \in E} \left(qR, \frac{1}{q}R \right), \qquad E_2 = \bigcup_{R \in E} \left(\frac{q}{2}R, \frac{2}{q}R \right),$$
$$D_1 = E_1 \times (2\delta_1, \pi - 2\delta_1), \qquad D_2 = E_2 \times (\delta_1, \pi - \delta_1).$$

Заметим, что если $v \in \mathrm{SHF}\,(0, \pi, \rho(r))$, то при любом $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ и при соотвествующем выборе N будет выполняться равенство $E = [1, \infty)$. Это следует из [3], а также из нижеследующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть $v \in \mathrm{SFL}(0, \pi, \rho(r))$, $\rho > 0$, λ — полная, а μ — риссовская мера функции v; q и δ_1 — произвольные числа из интервалов $(0, 1)$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Пусть $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $N \in \mathbb{R}$ таковы, что множество E не ограничено. Тогда существуют не зависящие от r величины M_6, M_7, M_8, не зависящая от z величина M_9 и не зависящая от z и h величина M_{10} такие, что*

1) $|\lambda|([0,r,0,\pi]) \le M_6 rV(r), \qquad r \in E_2$*;*

2) $\displaystyle\int_r^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^2} \le M_7\frac{V(r)}{r}, \qquad r\in E_2, \qquad \rho<1, \qquad \sigma(t)=|\lambda|(B(0,t))$*;*

3) $\displaystyle v(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C(z,\alpha r)} K(z,\zeta)d\lambda(\zeta)+\sin\theta\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)d_\alpha(z)V(r),$

$z=re^{i\theta}$, $d_\alpha(z)$ *— ограниченная функция переменных* z, α *на множестве* $E_2\times(0,1]$*;*

4) $$v(z+hz)-v(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C(z,\alpha r)}(K(z+hz,\zeta)-K(z,\zeta))d\lambda(\zeta)$$
$$+|h|\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\tilde d_\alpha(z,h)V(r),$$

где $\tilde d_\alpha(z,h)$ *— равномерно ограниченная функция при* $\alpha\in(0,1]$, $|h|\le\frac12\alpha$, $r=|z|\in E_2$*;*

5) $\displaystyle\int_0^\pi |v(re^{i\theta}|\sin\theta d\theta \le M_8V(r), \qquad r\in E_2.$

Пусть $\rho\in(0,1)$, μ_1 *— ограничение риссовской меры* μ *на множество* D_2*,*

$$v_1(z)=\iint\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu_1(\zeta), \qquad v_2(z)=v(z)-v_1(z).$$

Тогда
6) $v_1(z)$ *— субгармоническая во всей плоскости функция класса* $\mathrm{SF}(\rho(r))$*;*
7) $v_2(z)$ *— субгармоническая в* $\mathbb{C}_+$ *функция, гармоническая в* D_2*;*
8) $|v_2(z)|\le M_9V(r), \qquad z\in D_1$*;*
9) $|v_2(z+hz)-v_2(z)|\le M_{10}|h|V(r), \qquad z,z+hz\in D_1.$

В этой теореме собраны результаты из работы [10], хорошим дополнением к которой является работа [11], где, в частности, описаны многие свойства функции $K(z,\zeta)$. Эти работы создавались как единое целое, но затем в связи с большим объемом были разделены.

Следующая теорема является аналогом леммы Эдрея и Фукса ([12], см. также [13, гл. 1, теорема 7.3]) о малых дугах. Специалистам по теории субгармонических функций она известна, но доказательство, по-видимому, не опубликовано. Для полноты изложения теорема приводится с доказательством.

Теорема 8. *Пусть $v \in SF(\rho(r))$, E — измеримое множество на полуоси $[1,\infty)$. Тогда существует величина M_{11}, не зависящая от R, θ, E, такая, что выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^R \chi_E(t)|v(te^{i\theta})|dt \le M_{11}\frac{\mathrm{mes}E_R}{R}\ln\frac{4R}{\mathrm{mes}E_R}RV(R), \qquad E_R = E\cap[0,R].$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\theta = 0$. Справедливо представление

$$v(t) = \iint\limits_{C(t,\delta t)} \ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right| d\mu(\zeta) + d_\delta(t)V(t),$$

где $d_\delta(t)$ — ограниченная функция на полуоси $[1,\infty)$, μ — риссовская мера функции v. Это представление известно, кроме того, оно следует из утверждения 3 теоремы 7. В дальнейшем доказательстве будем считать, что $\delta = \frac{1}{4}$. Обозначим $\sigma(t) = \mu(B(0,t))$. Тогда $\sigma(t) \le MV(t)$. Запишем

$$I(R) = \int\limits_0^R \chi_E(t)|v(t)|dt$$
$$\le \int\limits_0^R \chi_E(t) \iint\limits_{C(t,\delta t)} \ln\left|\frac{\zeta}{\zeta - t}\right| d\mu(\zeta)dt + M\mathrm{mes}E_R V(R) = I_1(R) + I_2(R),$$

где $M = \sup\limits_{t\ge1}|d_\delta(t)|$. Далее, обозначая $\tau = |\zeta|$, находим

$$I_1(R) \le \int\limits_0^R \chi_E(t)\iint\limits_{C(t,\delta t)} \ln\frac{\tau}{|\tau - t|}d\mu(\zeta)dt \le \int\limits_0^R \chi_E(t)\int\limits_{(1-\delta)t}^{(1+\delta)t} \ln\frac{\tau}{|\tau-t|}d\sigma(\tau)dt$$
$$\le \int\limits_0^{2R}\int\limits_0^R \chi_E(t)\ln^+\frac{\tau}{|t-\tau|}dtd\sigma(\tau) = \int\limits_0^{2R}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{E_R-\tau}(u)\ln^+\frac{\tau}{|u|}dud\sigma(\tau).$$

Функция $\ln^+\frac{\tau}{|u|}$ — четная, убывающая по переменной u на полуоси $(0,\infty)$ функция. Из этого следует, что

$$I_1(R) \le 2\int\limits_0^{2R}\int_0^{\frac12 \mathrm{mes}E_R} \ln^+\frac{\tau}{u}du\, d\sigma(\tau) \le 2\int\limits_0^{\frac12\mathrm{mes}E_R} \ln\frac{2R}{u}du\,\sigma(2R)$$
$$\le \mathrm{mes}E_R \ln\frac{4R}{\mathrm{mes}E_R}\,\sigma(2R) \le M_v \mathrm{mes}E_R\ln\frac{4R}{\mathrm{mes}E_R}\,V(2R).$$

Из полученных неравенств вытекает нужная оценка. Теорема доказана.

Функция $N(\alpha)$, $N(0)=0$, $\alpha\ge 0$, называется ρ-полуаддитивной, если выполняется неравенство

$$N(\alpha+\beta)\le N(\alpha)+(1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right).$$

Легко проверить, что введенные нами функции $w_s(\alpha)$, $-\underline{w}_s(\alpha)$ являются $(\rho+1+s)$-полуаддитивными. Нам будет нужна следующая теорема о свойствах ρ-полуаддитивных функций. Это теорема 7 из [14].

Теорема 9. *Пусть $N(\alpha)$ — ρ-полуаддитивная функция. Если выполняется хотя бы одно из двух условий*
1) $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+0}} N(\alpha)\le 0$,
2) $N(\alpha)$ *— монотонная функция,*
то существует предел (возможно, несобственный)

$$N:=\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}=\sup_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho-1}.$$

Следующая теорема легко следует из сформулированного нами в разд. 1 свойства уточненного порядка и теоремы Лебега о мажорируемом предельном переходе.

Теорема 10. *Пусть $f(t)\in L_1([a,b])$, $0<a<b<\infty$. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\frac{V(tr)}{V(r)}\,dt=\int\limits_a^b f(t)t^\rho\,dt.$$

До сих пор мы излагали известные результаты. Однако по ходу изложения будет нужна одна новая теорема об оценке специального класса интегралов, которую можно рассматривать как изощренный аналог теоремы 10. Предварительно докажем лемму. Использование этой леммы освобождает в некоторых случаях от условий равномерности при доказательстве предельных соотношений.

Лемма 11. *Пусть $\varphi(\alpha,r)$ — функция, определенная на множестве $(0,\frac12]\times[1,\infty)$. Пусть для каждого $\alpha\in(0,\frac12]$ $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(\alpha,r)=0$ и заданы последовательности $r_n\uparrow\infty$, $\alpha_n\downarrow 0$, $\beta_n\downarrow 0$, а также число $q\in(0,1)$.*

Тогда существует последовательность R_n, являющаяся подпоследовательностью последовательности r_n, и функция $\alpha(r)$ такие, что
1) $\lim\limits_{r\to\infty} \alpha(r) = 0$,
2) $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(\alpha(r), r) = 0$,
3) функция $\alpha(r)$ постоянна на сегменте $[qR_n, \frac{1}{q}R_n]$ и равна α_n, причем $|\varphi(\alpha(r), r)| \le \beta_n$ на этом сегменте.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует, что существует, можно считать, строго возрастающая последовательность t_n такая, что при $r \ge t_n$ будет выполняться неравенство $|\varphi(\alpha_n, r)| \le \beta_n$. Можно также считать, что $r_1 > \frac{1}{q}t_1$ (иначе из последовательности r_n нужно выбросить несколько членов). Далее по индукции строим последовательности R_k, τ_k так, чтобы выполнялись соотношения:

1) R_k есть одно из чисел r_n,

2) $\tau_k \ge t_k$,

3) $[qR_k, \frac{1}{q}R_k] \subset (\tau_k, \tau_{k+1})$.

Возьмем $R_1 = r_1$, $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = \max(t_2, \frac{2}{q}R_1)$. Для тройки R_1, τ_1, τ_2 условия 1)–3) выполняются. Допустим, что мы уже построили элементы $R_1, \dots, R_n$, $\tau_1, \dots, \tau_{n+1}$ так, чтобы для них выполнялись условия 1)–3). Возьмем теперь m такое, чтобы выполнялось неравенство $qr_m > \tau_{n+1}$, и выберем $R_{n+1} = r_m$, $\tau_{n+2} = \max\left(t_{n+2}, \frac{2}{q}R_{n+1}\right)$. Для элементов $R_1, \dots, R_{n+1}$, $\tau_1, \dots, \tau_{n+2}$ условия 1)–3) также выполняются. Индукция проведена, и утверждение о существовании последовательностей τ_k, R_k доказано. Определим теперь на полуоси $[\tau_1, \infty)$ функцию $\alpha(r)$ соотношением $\alpha(r) = \alpha_n$ при $r \in [\tau_n, \tau_{n+1})$. Функция обладает всеми нужными свойствами. Лемма доказана.

Теорема 12. *Пусть $f(t)$ — положительная непрерывная функция на сегменте $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) > 0$, $\nu(r)$ — локально конечная борелевская мера на полуоси $[0, \infty)$, причем хотя бы одна из жордановых компонент ν_-, ν_+ является абсолютно непрерывной и ее плотность не превышает $MV(r)$, кроме того, $|\nu|([0, r]) \le MrV(r)$. Пусть*

$$N(b) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\nu(r + br) - \nu(r)}{rV(r)}.$$

Тогда существует предел

$$N = \lim_{b\to+0} \frac{N(b)}{b} \tag{11}$$

и выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{u}{r}\right) d\nu(u) \leq N \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t) t^{\rho} dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует такая константа M, что мера $d\nu_1(t) = d\nu(t) + MV(t)dt$ будет знакопостоянной. Теперь, имея в виду теорему 10, легко увидеть, что достаточно доказывать теорему для знакопостоянной меры. В дальнейшем будем считать, что мера ν — знакопостоянная. В этом случае функция $N(b)$ будет монотонной. Кроме того, из свойств верхнего предела и уточненного порядка следует, что $N(b)$ есть $(\rho+1)$-полуаддитивная функция. Теперь из теоремы 9 вытекает, что существует предел (11). Из той же теоремы вытекает, что $N > -\infty$. Если $N = +\infty$, то утверждение теоремы тривиально. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что N — вещественное число. Обозначим

$$\varphi(b,r) = \frac{1}{b}\left(\frac{\nu(r+br) - \nu(r)}{rV(r)} - N(b)\right)^{+}.$$

Из определения $N(b)$ следует, что для каждого $b \in (0, \frac{1}{2}]$ выполняется условие $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(b,r) = 0$. Кроме того, выполняется неравенство

$$\nu(r+br) - \nu(r) \leq rV(r)N(b) + b\varphi(b,r)rV(r).$$

Пусть $r_n \uparrow \infty$ — такая последовательность, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{u}{r}\right) d\nu(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n V(r_n)} \int\limits_{\alpha r_n}^{\beta r_n} f\left(\frac{u}{r_n}\right) d\nu(u).$$

Пусть

$$s \in \left(0, \min(\alpha, \frac{1}{\beta})\right), \quad \alpha_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \beta_n = \frac{1}{n}.$$

По лемме 11 существует функция $b(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = 0$, и последовательность R_n, являющаяся подпоследовательностью последовательности r_n, такие, что на сегменте $[sR_n, \frac{1}{s}R_n]$ будут выполняться соотношения $b(r) = \alpha_n$, $\varphi(b(r), r) < \frac{1}{n}$.

Пусть $q = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\tau_0 = \alpha, \tau_1 = q\alpha, \ldots, \tau_n = q^n\alpha = \beta$. Мы имеем $(\tau_{k+1} - \tau_k)/\tau_k = \alpha_n$,

$$\nu(\tau_{k+1}R_n) - \nu(\tau_k R_n) = \nu(\tau_k R_n + \alpha_n \tau_k R_n) - \nu(\tau_k R_n)$$

$$\leq \left(N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)+\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\varphi(\alpha_n,\tau_k R_n)\right)\tau_k R_n V(\tau_k R_n),$$

$$\varphi(\alpha_n,\tau_k R_n)<\frac{1}{n}.$$

Далее находим

$$I(R_n)=\int\limits_{(\alpha R_n,\beta R_n]} f\left(\frac{u}{R_n}\right)d\nu(u)=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{(\tau_k R_n,\tau_{k+1}R_n]} f\left(\frac{u}{R_n}\right)d\nu(u).$$

По теореме о среднем существуют точки $\xi_k\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$ такие, что

$$I(R_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\nu((\tau_k R_n,\tau_{k+1}R_n]).$$

Поэтому

$$I(R_n)\leq R_n\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)\tau_k V(\tau_k R_n)$$

$$+\frac{R_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(\tau_{k+1}-\tau_k\right)V(\beta R_n)=I_1(R_n)+I_2(R_n).$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_2(R_n)}{R_n V(R_n)}=0.$$

Так как

$$N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)=N(\alpha_n)=(N+\varepsilon_n)\alpha_n,$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_1(R_n)}{R_n V(r_n)}=\lim_{n\to\infty}N\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k^\rho f(\xi_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)=N\int\limits_\alpha^\beta t^\rho f(t)dt.$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

В заключение раздела докажем одну теорему о свойствах функции плотности меры. Важную роль в [3] играет функция

$$\varphi(\alpha)=\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\mu(B(z,\alpha|z|)}{V(|z|)},$$

где μ — риссовская меры функции $v\in\mathrm{SH}(\rho(r))$. Здесь символом $\varphi(\alpha)$ будет обозначаться несколько иная функция.

Теорема 13. *Пусть субгармоническая во всей плоскости функция v удовлетворяет неравенству $v(z) \le MV(|z|)$, ζ_n — последовательность комплексных чисел, сходящаяся к бесконечности, такая, что существуют последовательность z_n и число K со свойствами:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\zeta_n - z_n|}{|\zeta_n|} = 0$,

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|v(z_n)|}{V(|z_n|)} \le K$.

Пусть μ — риссовская мера функции v,

$$\varphi(\alpha) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu(B(\zeta_n, \alpha|\zeta_n|)}{V(|\zeta_n|)}.$$

Тогда существует величина $M_{12} = M_{12}(\rho(\cdot), M, K)$ такая, что выполняется неравенство $\varphi(\alpha) \ln \frac{1}{\alpha} \le M_{12}$ при $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$.

К о м м е н т а р и й. Как следует из [3], в написанном неравенстве функцию $\ln \frac{1}{\alpha}$ нельзя заменить на более быстро растущую (в направлении $\alpha \to +0$) функцию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$v(z_n) = \iint\limits_{B(z_n, \gamma|z_n|)} \ln \left| 1 - \frac{z_n}{\zeta} \right| d\mu(\zeta) + d_n(\gamma) V(|z_n|),$$

где $d_n(\gamma)$ — ограниченная последовательность, причем существует величина $M_{13} = M_{13}(\rho(\cdot), M)$ такая, что $|d_n(\gamma)| \le M_{13}$ при $\gamma \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{16}]$. Тогда при таких γ

$$\iint\limits_{B(z_n, \gamma|z_n|)} \ln \left| \frac{\zeta}{\zeta - z_n} \right| d\mu(\zeta) \le (M_{13} + K + \varepsilon_n) V(|z_n|),$$

где ε_n — бесконечно малая последовательность.

Пусть $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$, $s_n = \frac{|\zeta_n - z_n|}{|z_n|}$. Из условия теоремы следует, что s_n — бесконечно малая последовательность. Заметим, что $B(\zeta_n, \alpha|\zeta_n|) \subset B(z_n, (\alpha + (1+\alpha)s_n)|z_n|)$. Действительно, пусть $w \in B(\zeta_n, \alpha|\zeta_n|)$. Тогда

$$|w - z_n| \le |w - \zeta_n| + |\zeta_n - z_n| \le \alpha|\zeta_n| + s_n|z_n| \le \alpha|z_n| + \alpha|\zeta_n - z_n| + s_n|z_n|$$
$$\le (\alpha + (1+\alpha)s_n)|z_n|.$$

Нужное включение доказано. Продолжаем оценки.

$$\ln \frac{1 - (\alpha + (1+\alpha)s_n)}{(\alpha + (1+\alpha)s_n)} \mu(B(\zeta_n, \alpha|\zeta_n|))$$

$$\le \ln \frac{1-(\alpha+(1+\alpha)s_n)}{(\alpha+(1+\alpha)s_n)} \mu\left(B(z_n, (\alpha+(1+\alpha)s_n)|z_n|)\right)$$

$$\le \iint\limits_{B(z_n,(\alpha+(1+\alpha)s_n)|z_n|)} \ln\left|\frac{\zeta}{\zeta - z_n}\right| d\mu(\zeta) \le (M_{13}+K+\varepsilon_n)V(|z_n|).$$

Отсюда следует, что

$$\ln \frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi(\alpha) \le M_{13}+K, \quad \ln\frac{1}{\alpha}\varphi(\alpha) \le (M_{13}+K)\frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Из этого легко получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть μ_1 — ограничение риссовской меры функции v на угол $A(\theta-\Delta, \theta+\Delta)$. Пусть $\zeta \in A(\theta-\Delta, \theta+\Delta)$. Обозначим $|\zeta| = \tau$, $\arg\zeta = \theta+\varphi$, $\arg h(\zeta) = \theta+\psi$. Тогда величины φ и ψ имеют одинаковый знак, причем $|\varphi| \le |\psi| = \Delta$. Имеем

$$v_\Delta(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta}) = \iint \ln\left|\frac{re^{i\theta}-h(\zeta)}{re^{i\theta}-\zeta}\right| d\mu_1(\zeta)$$

$$= \frac{1}{2}\iint \ln\frac{r^2-2r\tau\cos\psi+\tau^2}{r^2-2r\tau\cos\varphi+\tau^2} d\mu_1(\zeta)$$

$$= \frac{1}{2}\iint \ln\left(1+\frac{2r\tau(\cos\varphi-\cos\psi)}{r^2-2r\tau\cos\varphi+\tau^2}\right) d\mu_1(\zeta)$$

$$\le \frac{1}{2}\iint \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) d\mu_1(\zeta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) d\sigma(\tau),$$

где $\sigma(\tau) = \mu_1(B(0,\tau))$. Из проведенного рассуждения следуют неравенство $v(re^{i\theta}) \le v_\Delta(re^{i\theta})$, а также неравенство

$$I(R) = \int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} (v_\Delta(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta}))dr \le \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau). \tag{12}$$

Полуось $[0,\infty)$ есть объединение пяти множеств

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{2}R\right], \quad E_2 = \left[\frac{1}{2}R, \frac{1}{1+\gamma}R\right], \quad E_3 = \left[\frac{1}{1+\gamma}R, \frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R\right],$$

$$E_4 = \left[\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R, 2(1+\Delta_1)R\right], \quad E_5 = [2(1+\Delta_1)R, \infty),$$

где γ — любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$.

Если в интеграле из правой части формулы (12) область интегрирования $[0,\infty)$ заменить на E_k, то полученный таким образом интеграл мы будем обозначать $I_k(R)$. Оценим каждый из пяти интегралов I_k. Имеем

$$I_1(R) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln(1+4\Delta^2) dr\, d\sigma(\tau) \leq 2\Delta^2\Delta_1 R\sigma\left(\frac{1}{2}R\right),$$

$$I_5(R) = \frac{1}{2}\int\limits_{2(1+\Delta_1)R}^{\infty}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{2(1+\Delta_1)R}^{\infty}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{8r\Delta^2}{\tau}\right) dr\, d\sigma(\tau) \leq 8\Delta^2\Delta_1 R^2\int\limits_{2R}^{\infty}\frac{d\sigma(\tau)}{\tau}.$$

Немного более сложны оценки интегралов I_2 и I_4. Действительно,

$$I_2(R) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}R}^{\frac{1}{1+\gamma}R}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}R}^{\frac{1}{1+\gamma}R}\tau\int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \ln\left(1+\frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2}\right) du\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq 4\Delta^2 R\int\limits_{\frac{1}{2}R}^{\frac{1}{1+\gamma}R}\int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \frac{du}{(u-1)^2} d\sigma(\tau) \leq 4\Delta^2 R\int\limits_{\frac{1}{2}R}^{\frac{1}{1+\gamma}R}\frac{d\sigma(\tau)}{\frac{R}{\tau}-1} \leq 4\frac{\Delta^2}{\gamma}R\sigma(R).$$

Для интеграла I_4 получаем

$$I_4(R) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R}^{2(1+\Delta_1)R}\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1+\frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R}^{2(1+\Delta_1)R} \tau \int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \ln\left(1 + \frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2}\right) du\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq 4\Delta^2 \int\limits_{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R}^{2(1+\Delta_1)R} \int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \frac{du}{(u-1)^2} d\sigma(\tau)$$

$$\leq 4R\Delta^2 \int\limits_{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R}^{2(1+\Delta_1)R} \frac{d\sigma(\tau)}{1-(1+\Delta_1)\frac{R}{\tau}} \leq 4\frac{\Delta^2}{\gamma} R\sigma(4R).$$

Оцениваем оставшийся интеграл

$$I_3(R) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{1+\gamma}R}^{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R} \int\limits_{R}^{(1+\Delta_1)R} \ln\left(1 + \frac{2r\tau\Delta^2}{(r-\tau)^2}\right) dr\, d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{1+\gamma}R}^{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R} \tau \int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \ln\left(1 + \frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2}\right) du\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq 2R \int\limits_{\frac{1}{1+\gamma}R}^{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R} \int\limits_{R/\tau}^{(1+\Delta_1)R/\tau} \ln\left(1 + \frac{8\Delta^2}{(u-1)^2}\right) du\, d\sigma(\tau)$$

$$= 2R \int\limits_{\frac{1}{1+\gamma}R}^{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R} \int\limits_{R/\tau-1}^{(1+\Delta_1)R/\tau-1} \ln\left(1 + \frac{8\Delta^2}{V^2}\right) dV\, d\sigma(\tau)$$

$$\leq 2R\Delta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{8}{s^2}\right) ds \int\limits_{\frac{1}{1+\gamma}R}^{\frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R} d\sigma(\tau)$$

$$= 8R\Delta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{8}{s^2}\right) ds \mu_1 \left(\left[\frac{1}{1+\gamma}R, \frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R, \theta-\Delta, \theta+\Delta\right]\right).$$

Если взять $\gamma = \Delta$, то из полученных оценок легко следует неравенство (4).

Далее мы будем считать, что $\gamma = k\Delta$. Пусть теперь выполняется неравенство (5), а число $r \in [R, (1+\Delta_1)R]$ таково, что $v(re^{i\theta}) \geq KV(R)$. Прямые вычисления показывают, что множество $[\frac{1}{1+\gamma}R, \frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R, \theta-\Delta, \theta+\Delta]$ расположено в круге $B(Re^{i\theta}, sR)$, где

$$s = \frac{\Delta_1 + k\Delta}{1-k\Delta}\sqrt{1 + \frac{4\sin^2\frac{\Delta}{2}(1+\Delta_1)(1-k\Delta)}{(\Delta_1+k\Delta)^2}} \leq 2\sqrt{3}(\Delta_1 + k\Delta)$$

при ограниечениях на k из текста теоремы. Очевидно, что $B(Re^{i\theta}, sR) \subset B(re^{i\theta}, (s+\Delta_1)r)$.

Из теоремы 13 следует, что

$$\mu_1\left(\left[\frac{1}{1+\gamma}R, \frac{1+\Delta_1}{1-\gamma}R, \theta-\Delta, \theta+\Delta\right]\right) \leq \mu_1\left(B(re^{i\theta}, (s+\Delta_1)r\right)$$

$$\leq \left(\frac{M_{12}}{l\left(\frac{1}{2\sqrt{3}(2\Delta_1+k\Delta)}\right)} + \varepsilon(R)\right) rV(r).$$

Из доказанных оценок получаем неравенство (6). Теорема доказана.

4. Продолжение исследования функции $v_\Delta(z)$

В теореме 1 дана специальная оценка отклонения функции $v(z)$ от функции $v_\Delta(z)$. Нам еще известно, что функция $v_\Delta(z)$ является гармонической в углу $A(\theta-\Delta, \theta+\Delta)$ и на луче $\arg z = \theta$ выполняется неравенство $v(re^{i\theta}) \leq v_\Delta(re^{i\theta})$. Для нас недостаточно этих свойств функции $v_\Delta(z)$. В нижеследующей теореме используются обозначения из той части разд. 1, где говорится о выделении исключительного множества. В формулировке участвует функция ψ, о которой предполагается следующее:

1) $\psi(\alpha)$ — убывающая непрерывная функция на полуинтервале $(0,1]$, $\alpha\psi(\alpha)$ — возрастающая;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\psi(\alpha) = \infty$;

3) $1 \leq \psi(\alpha) \leq \left(\dfrac{3}{\alpha}\right)^{1/2}$.

Теорема 14. *Пусть* $v \in \mathrm{SHF}(0,\pi,\rho(r))$, $\rho \in (0,1)$, $v(re^{i\theta}) \leq MV(r)$ *при* $\theta \in (0,\pi)$. *Тогда для любых чисел* $\delta_1 \in (0,\pi/4)$, $N \in \mathbb{R}$, *существуют числа* $\Delta_0 = \Delta_0(\rho(\cdot), N, M, \delta_1)$, $M_{14} = M_{14}(\rho(\cdot), N, M, \delta_1)$, $\overline{M}_3 = \overline{M}_3(\rho(\cdot), N, M, \delta_1)$ *такие, что при выполнении соотношений*

$$1)\quad 2\delta_1 \leq \theta - \Delta < \theta + \Delta \leq \pi - 2\delta_1, \tag{13}$$

2) $\mu_1 = (\mu_2)_h$,

где μ_2 *— ограничение риссовской меры* μ *функции* v *на угол* $A(\delta_1, \pi - \delta_1)$, *а функция* h *определяется равенством (3),*

$$3) \qquad \Delta_1 \in (0, \Delta_0), \qquad \Delta = \frac{\Delta_1}{\ln \frac{1}{\Delta_1}} \psi(\Delta_1), \quad \eta = \frac{1}{M_{14}} \Delta_1 \psi(\Delta_1), \tag{14}$$

$$4) \qquad \sup_{r \in [R, (1+\Delta_1)R]} v_\Delta(re^{i\theta}) \geq NV(R) \tag{15}$$

будет выполняться условие

$$\left[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}\right] \cap G(\eta, \overline{M}_3, \mu_1) = \emptyset.$$

Прокомментируем теорему. Напомним, что обозначение $G(\eta, \overline{M}_3, \mu_1)$ введено в разд. 1. В утверждении 1) теоремы 6 дана оценка исключительного множества меры. Однако нам недостаточно этой оценки. Теорема 14 дает новую информацию об исключительном множестве меры при дополнительных ограничениях на эту меру. В этой теореме идет речь о специальной мере μ_1, которая не нагружает угла $A(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$. Мы доказываем, что неравенство (15) обеспечивает то, что исключительное множество меры μ не пересекает отрезок $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}]$, расположенный на биссектрисе указанного выше угла. Заметим еще, что если $\underline{h}(\theta) > -\infty$, $N < \underline{h}(\theta)$, то неравенство (15) выполняется для всех достаточно больших R. Важным является также то обстоятельство, что функция ψ не фиксирована и ее можно варьировать.

Доказательство. Пусть μ_2 — мера такая, как она определена в тексте теоремы,

$$v_1(z) = \iint \ln \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_2(\zeta).$$

Из теоремы 7 следует, что $v_1 \in \mathrm{SF}(\rho(r))$. Стандартные рассуждения о связи между субгармонической функцией и ее риссовской мерой показывают, что существует величина $T = T(\rho(\cdot), M, \delta_1)$ такая, что для любых θ и Δ, удовлетворяющих соотношению (13), будет выполняться неравенство $v_{1,\Delta}(z) \leq TV(|z|)$. Определим теперь величину $\overline{M}_3$, существование которой утверждается в теореме как $M_3(\rho(\cdot), T)$, где последняя величина определяется в теореме 6.

Далее мы доказываем утверждение P_1: для любого вещественного числа N существует величина M_{14} такая, что если Δ и η определены формулами (14), то при любом $\Delta_1 \in (0, \frac{1}{2}]$ из неравенства $v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \geq (N-2)V(R)$, где $\tau \in [R, (1+\Delta_1)R]$, будет следовать соотношение $\tau e^{i\theta} \overline{\in} G(\eta, \overline{M}_3, \mu_1)$.

Допустим, что $\tau e^{i\theta} \in G$. Тогда существует $z \in F$ такое, что $\tau e^{i\theta} \in C(z, \alpha_z r)$, $r = |z|$. Поэтому $|\tau| = |\tau e^{i\theta} - z + z| \geq (1-\alpha_z) r$. Пусть $w \in C(z, \alpha_z r)$. Тогда $|w - \tau e^{i\theta}| \leq 2\alpha_z r \leq 2\dfrac{\alpha_z}{1-\alpha_z}\tau$, $C(z, \alpha_z r) \subset C\left(\tau e^{i\theta}, \dfrac{2\alpha_z}{1-\alpha_z}\tau\right)$. Предположим теперь, что $\alpha_z < \frac{\Delta}{3}$. Так как $\Delta, \Delta_1 \in (0, \frac{1}{2}]$, то $\dfrac{2\alpha_z}{1-\alpha_z} < \dfrac{2\alpha_z}{1-\frac{1}{6}} < \dfrac{12}{5}\dfrac{\Delta}{3} = \dfrac{4}{5}\Delta$. В этом случае круги $B(z, \alpha_z r)$, $B\left(\tau e^{i\theta}, \dfrac{2\alpha_z}{1-\alpha_z}\tau\right)$ целиком лежат внутри угла $A(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$. Это противоречит определению α_z. Тем самым доказано, что выполняется неравенство $\alpha_z \geq \frac{\Delta}{3}$. Из теоремы 6 следует, что $\alpha_z \leq \eta = \frac{1}{M_{14}}\Delta_1 \psi(\Delta_1) := b(M_{14}, \Delta_1)$. Будем считать, что $M_{14} \geq 16$. Заметим, что из ограничений на функцию ψ вытекает неравенство

$$\delta = 2\frac{b(16, \frac{1}{2})}{1 - b(16, \frac{1}{2})} < \frac{1}{4}.$$

Кроме того выполняются соотношения

$$C(z, \alpha_z r) \subset C\left(\tau e^{i\theta}, \frac{2\alpha_z}{1-\alpha_z}\tau\right) \subset C(\tau e^{i\theta}, \delta\tau).$$

Существует величина M_{15}, не зависящая от τ, такая, что выполняется неравенство

$$v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \leq \iint\limits_{B(\tau e^{i\theta}, \delta\tau)} \ln\left|1 - \frac{\tau e^{i\theta}}{\zeta}\right| d\mu_1(\zeta) + M_{15} V(R).$$

Дальше получаем

$$v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \leq \iint\limits_{B(z, \alpha_z r)} \ln\left|1 - \frac{\tau e^{i\theta}}{\zeta}\right| d\mu_1(\zeta) + M_{15} V(R).$$

При $\zeta \in B(z, \alpha_z r)$ выполняются неравенства $|\zeta - \tau e^{i\theta}| \leq 2\alpha_z r$, $|\zeta| \geq (1-\alpha_z) r$. Из этого, равенства (2) и формулы $\varphi(\alpha) = \frac{\overline{M}_3}{\eta}\alpha$ следует, что

$$v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \leq \ln\frac{2\alpha_z}{1-\alpha_z}\mu(B(z, \alpha_z r)) + M_{15}V(R) = \overline{M}_3\frac{\alpha_z}{\eta}\ln\frac{2\alpha_z}{1-\alpha_z}V(r)$$

$$+ M_{15}V(R) \leq -\overline{M}_3\frac{1}{\eta}\alpha_z \ln\frac{1}{\alpha_z}V(r) + M_{16}V(R).$$

Так как $\dfrac{\Delta}{3} \leq \alpha_z \leq \eta < \dfrac{1}{e}$, а функция $x\ln\frac{1}{x}$ является возрастающей на полуинтервале $(0, \frac{1}{e}]$, то

$$v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \leq -\frac{1}{3}\overline{M}_3\frac{1}{\eta}\Delta\ln\frac{3}{\Delta}V(r) + M_{16}V(R).$$

Подставляя в это неравенство выражения для η и Δ через Δ_1, получим

$$v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \le -\frac{1}{3}\overline{M}_3 M_{14} \frac{\ln\frac{3}{\Delta_1} + \ln\ln\frac{1}{\Delta_1} + \ln\frac{1}{\psi(\Delta_1)}}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} V(r) + M_{16}V(R).$$

При подходящем выборе M_{14} полученное неравенство противоречит неравенству $v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \ge (N-2)V(R)$. Тем самым утверждение P_1 доказано.

Далее будем считать, что величина M_{14} выбрана так, что справедливо утверждение P_2: Из соотношений $\Delta_1 \in (0, \frac{1}{2}]$, $\tau \in [R, (1+\Delta_1)R]$, $v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \ge (N-2)V(R)$ следует, что $\tau e^{i\theta} \overline{\in} G$.

Из утверждения P_1 следует, что такой выбор возможен. Там самым определена величина M_{14}, существование которой утверждается в теореме.

Теперь докажем, что справедливо утверждение P_3: существует величина $\Delta_0 > 0$ такая, что из соотношений $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$, $\sup\limits_{r\in[R,(1+\Delta_1)R]} v_\Delta(re^{i\theta}) \ge NV(R)$, $\tau \in [R, (1+\Delta_1)R]$, $\tau e^{i\theta} \overline{\in} G$ следует неравенство $v_\Delta(\tau e^{i\theta}) \ge (N-1)V(R)$.

Из посылок утверждения P_3 вытекает, что существует точка $\xi \in [R, (1+\Delta_1)R]$ такая, что $v_\Delta(\xi e^{i\theta}) \ge NV(R)$. По утверждению P_2 $\xi e^{i\theta} \overline{\in} G$. Имеем $v_\Delta(z) = v_{1,\Delta}(z) + v_2(z)$. По теореме 7

$$|v_2(\tau e^{i\theta}) - v_2(\xi e^{i\theta})| \le M_{10}\frac{|\tau - \xi|}{\xi} V(\xi).$$

Далее применяем теорему 6:

$$|v_{1,\Delta}(\tau e^{i\theta}) - v_{1,\Delta}(\xi e^{i\theta})| \le M_5 V((1+\Delta_1)R) \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{|\xi - \tau|}{\xi\eta t}\right) dt$$

$$\le M_5 V((1+\Delta_1)R) \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{M_{14}}{t\psi(\Delta_1)}\right) dt.$$

Из полученных неравенств просто выводится утверждение P_3.

Доказанные утверждения позволяют легко закончить доказательство теоремы. Величины Δ_0, M_{14}, $\overline{M}_3$ уже определены. Нужно лишь доказать, что они обладают требуемым свойством. Пусть $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$,

$$\sup_{r\in[R,(1+\Delta_1)R]} v_\Delta(re^{i\theta}) \ge NV(R).$$

Тогда существует точка $\xi \in [R, (1+\Delta_1)R]$ такая, что $v_\Delta(\xi e^{i\theta}) \ge NV(R)$. По утверждению P_2 $\xi e^{i\theta} \overline{\in} G$. Поэтому соотношение $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}] \subset G$ не выполняется. Пересечение множества G с лучом $\arg z = \theta$ представляется в виде объединения непересекающихся интервалов $(a_k e^{i\theta}, b_k e^{i\theta})$. Предположим, что соотношение $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}] \cap G = \emptyset$ не выполняется. Следовательно, для некоторого k $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}] \cap (a_k e^{i\theta}, b_k e^{i\theta}) \neq \emptyset$. Так как соотношение $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}] \subset G$ не выполняется, то тем более не выполняется соотношение $[Re^{i\theta}, (1+\Delta_1)Re^{i\theta}] \subset (a_k e^{i\theta}, b_k e^{i\theta})$. Из сказанного следует, что хотя бы одна из точек a_k, b_k принадлежит сегменту $[R, (1+\Delta_1)R]$. Для определенности предположим, что $a_k \in [R, (1+\Delta_1)R]$. Заметим, что $a_k \neq (1+\Delta_1)R$. Точка $a_k e^{i\theta} \overline{\in} G$. По утверждению P_3 выполняется неравенство $v_\Delta(a_k e^{i\theta}) \geq (N-1)V(R)$. Функция $v_\Delta(re^{i\theta})$ есть непрерывная функция по переменной r на полуоси $(0, \infty)$. Поэтому найдется точка $r \in [R, (1+\Delta_1)R] \cap (a_k, b_k)$ такая, что $v_\Delta(re^{i\theta}) \geq (N-2)V(R)$. Согласно утверждению P_2, $re^{i\theta} \overline{\in} G$. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

5. Теорема 2 и связанные с ней вопросы

Раздел начинаем с доказательства теоремы 2. Переходя, если нужно, к функции $w(z) = v(e^{i\psi} z^\gamma)$, можем считать, что $\rho \in (0,1)$, а θ_1 и θ_2, $\theta_1 < \theta_2$ — любые удобные для нас числа. В дальнейшем будем считать, что условие $\rho \in (0,1)$ выполнено. Доказательство теоремы достаточно сложное, и мы разобьем его на несколько этапов.

Первый этап. На этом этапе докажем, что существуют пределы

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{w_s(\alpha)}{\alpha}, \qquad \lim_{\alpha \to +0} \frac{\underline{w}_s(\alpha)}{\alpha},$$

причем первый из пределов не превышает $h(\theta)$. На этом этапе будем предполагать, что $\theta = 0$. Функции $w_s(\alpha)$, $-\underline{w}_s(\alpha)$ будут $(\rho+s+1)$-полуаддитивными. По определению индикатора, для любого $\varepsilon > 0$ существует R такое, что при $t \geq R$ будет выполняться неравенство $v(t) \leq (h(0)+\varepsilon)V(t)$. Поэтому

$$w_s(\alpha) \leq (h(0)+\varepsilon) \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} t^s V(t)dt$$

$$= (h(0)+\varepsilon) \lim_{r \to \infty} \int_1^{1+\alpha} u^s \frac{V(ur)}{V(r)} du = (h(0)+\varepsilon) \int_1^{1+\alpha} u^{\rho+s} du.$$

Последнее равенство следует из теоремы 10. Мы получаем, что

$$w_s(\alpha) \leq h(0) \frac{(1+\alpha)^{\rho+s+1} - 1}{\rho+s+1}. \tag{16}$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+0}}\, w_s(\alpha) \le 0$. Теперь с помощью теоремы 9 находим, что существует предел

$$w_s = \lim_{\alpha\to+0} \frac{w_s(\alpha)}{\alpha},$$

а из неравенства (16) следует, что $w_s \le h(0)$.

Далее имеем

$$|\underline{w}_s(\alpha)| \le \overline{\lim_{\alpha\to+0}} \frac{(1+\alpha)^{s^+}}{rV(r)} \int\limits_r^{(1+\alpha)r} |v(t)|dt.$$

Из теоремы 8 вытекает, что $|\underline{w}_s(\alpha)| \le M_{10}(1+\alpha)^{s^+}\alpha \ln\frac{4}{\alpha}$. Поэтому $\lim\limits_{\alpha\to 0} \underline{w}_s(\alpha) = 0$. Вновь применяя теорему 9, получим, что существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{\underline{w}_s(\alpha)}{\alpha}.$$

Первый этап завершен.

Второй этап. На этом этапе мы докажем неравенство $\underline{w}_s \ge \underline{h}(0)$. Очевидно, можно считать $\underline{h}(0) > -\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению нижнего индикатора множество $H = \{t > 0 : v(t) < (\underline{h}(0) - \varepsilon)V(t)\}$ имеет линейную плотность нуль. Справедливо неравенство

$$\int\limits_r^{(1+\alpha)r} t^s v(t)dt \ge -(1+\alpha)^{s^+} r^s \int\limits_{H\cap[r,(1+\alpha)r]} |v(t)|dt + (\underline{h}(0)-\varepsilon) \int\limits_r^{(1+\alpha)r} t^s V(t)dt$$
$$-(\underline{h}(0)-\varepsilon) \int\limits_{H\cap[r,(1+\alpha)r]} t^s V(t)dt.$$

Теперь из теорем 8 и 10 следует, что $\underline{w}_s \ge \underline{h}(0)$. Второй этап завершен.

Третий этап. На этом этапе мы докажем неравенство $h(0) \le w_s$. Теперь дополнительно предполагаем, что функция $v(z)$ является субгармонической в углу $A\left(-\frac{\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8}\right)$. Обозначим

$$A = \{t > 0 : \exists\theta \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \quad \text{такое, что} \quad v(te^{i\theta}) > (h(\theta)-1)V(t)\},$$
$$N_1 = \min_{\theta\in[0,\frac{\pi}{8}]} (h(\theta) - 1).$$

Далее также будем использовать обозначения, которые введены перед формулировкой теоремы 7. Пусть E — множество, построенное для функции $v(e^{\frac{i\pi}{8}} z)$ по константам N_1 и $\delta = \frac{\pi}{16}$. Тогда $A \subset E$. Из теоремы 7 следует, что имеет место представление $v(e^{\frac{i\pi}{8}}z) = v_1(z) + v_2(z)$, где $v_1(z)$ — субгармоническая функция во всей плоскости, принадлежащая классу $\mathrm{SF}(\rho(r))$, а для функции $v_2(z)$ справедливо неравенство $|v_2(z)| \le M_8 V(r)$, $z \in D_1$. Из теоремы 6 следует

$$\inf_{r>1} \sup_{\varphi\in[\alpha,\beta]} \frac{v_1(re^{i\varphi})}{V(r)} > -\infty$$

для любых α, β, $\beta-\alpha>0$. Обозначим

$$B = \{t>0 : \sup_{\varphi\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]} v(te^{i\varphi}) \ge NV(t)\}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что для всех N из некоторой окрестности $-\infty$ множество B содержит множество E. В дальнейшем мы считаем, что N выбрано из этой окрестности. Тогда для любого $\theta \in [0, \frac{\pi}{8}]$ выполняется равенство

$$h(\theta) = \overline{\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in B}}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}.$$

Далее будем рассматривать $v(z)$ как функцию, субгармоническую в верхней полуплоскости. Пусть λ — ее полная мера. Тогда по теореме 7 справедливо равенство

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C(z,\frac{1}{2}r)} K(z,\zeta)d\lambda(\zeta) + \sin\theta\, d(r,\theta)V(r),$$

где $d(r,\theta)$ — ограниченная функция на множестве $B\times[0,\frac{\pi}{8}]$. Пусть (R_1,R_2) — пересечение круга $C\left(z,\frac{1}{2}r\right)$ с вещественной осью. Тогда $R_1 = \alpha(\theta)r$, $R_2 = \beta(\theta)r$, где

$$\alpha(\theta) = \cos\theta - \sqrt{\frac{1}{4}-\sin^2\theta}, \quad \beta(\theta) = \cos\theta + \sqrt{\frac{1}{4}-\sin^2\theta}.$$

Так как ядро $K(z,\zeta)$ отрицательно при $\Im z>0$, а ограничение меры λ на верхнюю полуплоскость есть положительная мера, то

$$v(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} K(z,t)d\lambda(t) + \sin\theta d(r,\theta)V(r).$$

Так как функция $v(z)$ является субгармонической и на полуоси $(0,\infty)$, то $d\lambda(t) = -v(t)dt$. Поэтому

$$v(z) \le \frac{y}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{v(t)dt}{(t-x)^2+y^2} + \sin\theta\, d(r,\theta)V(r)$$

$$= \frac{y}{\pi} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{t^s v(t)}{t^s((t-x)^2+y^2)} dt + \sin\theta d(r,\theta) V(r).$$

Если $d\nu_1(t) = t^s v(t) dt$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\nu_1(r+\alpha r) - \nu_1(r)}{r^{1+s} V(r)} = w_s(\alpha). \tag{17}$$

Мера ν_1 абсолютно непрерывна и плотность ее положительной составляющей удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\nu_1^+(t)}{dt} = t^s v^+(t) \le M t^s V(t) = M V_1(t),$$

где $V_1(t) = t^{\rho_1(t)}$, $\rho_1(t) = s + \rho(t)$. Теперь из теоремы 12 и из равенства (17) следует, что

$$h(\theta) = \varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in B}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)} \le \varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^s}{V_1(r)} \frac{r\sin\theta}{\pi} \int\limits_{\alpha(\theta)r}^{\beta(\theta)r} \frac{d\nu_1(t)}{t^s(t^2 - 2tr\cos\theta + r^2)}$$

$$+ \varlimsup_{r\to\infty} \sin\theta d(r,\theta) \le w_s \frac{\sin\theta}{\pi} \int\limits_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} \frac{t^\rho dt}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} + \sin\theta d_1(\theta),$$

где $d_1(\theta)$ — ограниченная функция на интервале $(0, \frac{\pi}{8})$. Переходя к пределу при $\theta \to +0$, получим неравенство $h(0) \le w_s$. Третий этап закончен.

Четвертый этап. На этом этапе мы докажем равенство $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$ в предположении, что хотя бы одна из этих величин равна $-\infty$. Из неравенства $\underline{h}(0) \le \underline{w}_s$ следует, что если $\underline{w}_s = -\infty$, то $\underline{h}(0) = -\infty$. Покажем теперь, что если $\underline{h}(0) = -\infty$, то $\underline{w}_s = -\infty$. Допустим противное, что $\underline{w}_s > -\infty$. Так как легко строятся гармонические в любом углу $A(\theta_1, \theta_2)$ функции, для которых существует и равен наперед заданному вещественному числу предел $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{u(r)}{V(r)}$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\underline{w}_s = 0$. Пусть

$$E_1 = \{r : v(r) \le -2V(r)\}.$$

Поскольку $\underline{h}(0) = -\infty$, то для верхней линейной плотности $l^*(E_1)$ множества E_1 справедливо соотношение $l^*(E_1) > 3\gamma > 0$. Поэтому существует последовательность $r_n \uparrow \infty$ такая, что $\mathrm{mes}(E_1 \cap [r_n, 2r_n]) \ge \gamma r_n$. Поскольку $\underline{w}_s = 0$, то $\underline{w}_s(\alpha)$ не равно тождественно $-\infty$. Поэтому $v \in \mathrm{SHF}\left(-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \rho(r)\right)$. Тогда из теоремы 7 следует, что справедливо разложение $v(z) = v_1(z) + v_2(z)$, где v_1 — субгармоническая во всей плоскости функция класса $\mathrm{SF}(\rho(r))$, а v_2 — гармоническая функция на множестве $T = \{z : |z| > 1, |\arg z| < \frac{\pi}{16}\}$, удовлетворяющая неравенству $|v_2(z+hz) - v_2(z)| \le M|h|V(r)$ при z, $z+h \in T$. Пусть μ_1 — риссовская мера функции v_1, $\eta_1 \in (0, 10^{-2})$, M_3, M_5 — те величины, о которых говорится в теореме 6. Пусть F — исключительное множество для меры μ_1, которое построено с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = \frac{M_3}{\eta_1}\alpha$ и $\mathcal{A}$ — соответствующая этому множеству F система кругов. Процесс построения системы $\mathcal{A}$ описан в разд. 1. Число α будем называть относительным радиусом круга $C(z, \alpha r)$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$ — те круги из набора $\mathcal{A}$, чьи относительные радиусы строго меньше, чем η_1^2, а $\mathcal{A}_2$ — остальные круги из набора $\mathcal{A}$. Заменим каждый круг из набора $\mathcal{A}_2$ кругом с тем же центром и в десять раз бóльшим радиусом. Набор таких кругов обозначим $\tilde{\mathcal{A}}_2$. Допустим $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 \cup \tilde{\mathcal{A}}_2$. Если $\tilde{\mathcal{A}} = \{C(\zeta_n, \beta_n \tau_n), n = 1, 2, \ldots, \tau_n = |\zeta_n|\}$, то будет справедливо неравенство

$$l_R(\tilde{\mathcal{A}}) = \frac{1}{R} \sum_{|\zeta_n| \le R} \beta_n \tau_n \le 10\eta_1.$$

Далее будем считать, что $10\eta_1 < \gamma^2$, где γ — ранее введенное число. Мы можем считать, что $\gamma \in (0, 10^{-1})$. Тогда $l_R(\tilde{\mathcal{A}}) < 0.1\gamma$. Пусть Q — объединение кругов из системы $\tilde{\mathcal{A}}$. Тогда существует номер n_1 такой, что при $n \ge n_1$ будет выполняться соотношение

$$(E_1 \cap [r_n, 2r_n]) \setminus Q \ne \emptyset.$$

Пусть $R_n \in (E_1 \cap [r_n, 2r]) \setminus Q$. Поскольку $R_n \in E_1$, то $v(R_n) \le -2V(R_n)$. Поскольку $R_n \overline{\in} Q$, то круг $C(R_n, 3\eta_1^2 R_n)$ не пересекается ни с одним из кругов из набора $\mathcal{A}_2$. Кроме того, $R_n \overline{\in} F$. Если $z \in C(R_n, 3\eta_1^2 R_n) \setminus F$, то по теореме 6 будет выполняться неравенство

$$|v(R_n) - v(z)| \le M_4 V(R_n) \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{3\eta_1}{t}\right) dt + 3M\eta_1^2 V(R_n)$$

$$\le \overline{M}_4 V(R_n) \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{3\eta_1}{t}\right) dt.$$

Мы будем дополнительно считать, что число η_1 удовлетворяет неравенству

$$\overline{M}_4 \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{3\eta_1}{t}\right) dt \le 1 \tag{18}$$

Тогда на множестве $C(R_n, 3\eta_1^2 R_n) \setminus F$ будет выполняться неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. Пусть $z_0 \in C(R_n, \eta_1^2 R_n) \cap F$. Тогда для некоторого $i \quad z_0 \in G_i$. Мы вновь пользуемся обозначениями той части разд. 1, где описывается построение исключительных множеств. Пусть $C(g_i, \alpha_i |g_i|)$ — круг наименьшего радиуса, содержащий множество G_i. Этот круг не может входить в систему $\mathcal{A}_2$. Поэтому он входит в систему $\mathcal{A}_1$ и $\alpha_i < \eta_1^2$. Из этого следует, что $G_i \subset C(R_n, 3\eta_1^2 R_n)$. Поскольку множества G_i при различных i не пересекаются, то $\partial G_i \cap G = \emptyset$. Тем более $\partial G_i \cap F = \emptyset$. Тогда по доказанному на множестве ∂G_i выполняется неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. По принципу максимума это неравенство выполняется в области G_i. В частности, $v(z_0) \leq -V(R_n)$. Тем самым доказано, что во всем круге $C(R_n, \eta_1^2 R_n)$ выполняется неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. Из этого следует, что при $\alpha < \eta_1^2$ выполняется неравенство

$$\underline{w}_s(\alpha) \leq -\int\limits_1^{1+\alpha} t^s dt.$$

Поэтому $\underline{w}_s \leq -1$. Мы получили противоречие с равенством $\underline{w}_s = 0$. Четвертый этап закончен.

Пятый этап. На этом, заключительном этапе мы докажем равенство $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$ в общем случае. Можно предполагать, что $\underline{h}(0) > -\infty$. Наше доказательство в основном будет проходить по схеме предыдущего. Пусть ε — произвольное строго положительное число. На этот раз множество E_1 мы определяем следующим образом:

$$E_1 = \{r > 0 : v(r) < (\underline{h}(0) + \varepsilon) V(r)\}.$$

Утверждения о свойствах множества E_1 остаются прежними. Ранее мы предполагали, что число η_1 удовлетворяет неравенству (18). Теперь это неравенство заменяем на неравенство

$$\overline{M}_4 \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{3\eta_1}{t}\right) dt \leq \varepsilon\,.$$

Тогда с помощью тех же рассуждений, что и на четвертом этапе, получаем, что в круге $C(R_n, \eta_1^2 R_n)$ выполняется неравенство $v(z) \leq (\underline{h}(0) + 2\varepsilon) V(R_n)$. Отсюда легко следует, что $\underline{w}_s \leq \underline{h}(0)$, $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$. Пятый этап закончен. Теорема доказана.

Следующее утвержение, доказательство которого следует из рассуждений, проведенных на четвертом и пятом этапах, мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 15. *Пусть* $v \in \mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. *Пусть* M — *произвольное вещественное число, если* $\underline{h}(\theta) = -\infty$, *и* $M = \underline{h}(\theta) + \varepsilon$, *где* ε — *произвольное строго положительное число, если* $\underline{h}(\theta) > -\infty$. *Тогда существует число* $\delta > 0$ *и последовательность* $R_n \uparrow \infty$ *такие, что в каждом круге* $B(R_n e^{i\theta}, \delta R_n)$ *выполняется неравенство* $v(z) \le MV(|z|)$.

Эта теорема является уточнением теоремы В.С. Азарина [15] о "ямах" и в существенном совпадает с теоремой 7 из [16].

Теоремы 1 и 2 можно применить для оценки индикаторов функции $v_\Delta(z)$.

Теорема 16. *Пусть* $v(z) \in \mathrm{SHF}(0, \pi, \rho(r))$, $\theta \in (0, \pi)$, $h(\theta)$ *и* $\underline{h}(\theta)$ — *индикаторы функции* v; $v_\Delta(z)$ — *функция такая, как в теореме 1,* $h_\Delta(\theta)$ *и* $\underline{h}_\Delta(\theta)$ — *ее индикаторы,* $\underline{w}_0(\alpha)$ — *функция, определенная в теореме 2,* M_1 — *константа из теоремы 1. Тогда для любого* $\Delta_1 > 0$ *выполняется оценка*

$$\underline{h}_\Delta(\theta) \le \frac{(\rho+1)(\underline{w}_0(\Delta_1) + M_1\Delta)}{(1+\Delta_1)^{\rho+1} - 1}.$$

Кроме того, выполняется оценка $h_\Delta(\theta) \ge h(\theta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 выполняется неравенство

$$\int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} \Big(v_\Delta(te^{i\theta}) - v(te^{i\theta})\Big)\, dt \le M_1 \Delta R V(R), \quad R \ge 1.$$

Пусть $R_n \uparrow \infty$ — такая последовательность, что

$$\underline{w}_0(\Delta_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_n V(R_n)} \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} v(te^{i\theta}) dt.$$

Взяв в написанном неравенстве $R = R_n$, получим

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} v_\Delta(te^{i\theta}) dt \le (\underline{w}_0(\Delta_1) + \varepsilon_{1,n}) R_n V(R_n) + M_1 \Delta R_n V(R_n),$$

где $\varepsilon_{1,n}$ — бесконечно малая последовательность. Далее имеем

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} V(t) dt = R_n V(R_n) \int\limits_1^{1+\Delta_1} \frac{V(uR_n)}{V(R_n)} du = (1 + \varepsilon_{2,n}) R_n V(R_n) \int\limits_1^{1+\Delta_1} u^\rho du.$$

Из приведенного следует

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} \left(v_\Delta(te^{i\theta}) - (\rho+1)\frac{\underline{w}_0(\Delta_1)+\varepsilon_{1,n}+M_1\Delta}{(1+\varepsilon_{2,n})((1+\Delta_1)^{\rho+1}-1)}V(t) \right) dt \le 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от n и такое, что неравенство

$$v_\Delta(te^{i\theta}) \le \left[(\rho+1)\frac{\underline{w}_0(\Delta_1)+\varepsilon_{1,n}+M_1\Delta}{(1+\varepsilon_{2,n})((1+\Delta_1)^{\rho+1}-1)} + \varepsilon \right] V(t)$$

будет выполняться на множестве $e_n \subset [R_n, (1+\Delta)R_n]$, причем $\operatorname{mes} e_n \ge \delta(\varepsilon)R_n$.

Из сказанного следует первое неравенство теоремы. Второе неравенство следует из неравенства $v(te^{i\theta}) \le v_\Delta(te^{i\theta})$. Теорема доказана. Подчеркнем, что в этой теореме величины Δ и Δ_1 не связаны между собой.

6. Теорема 4 и связанные с ней вопросы

К сожалению, наше доказательство теоремы 4 достаточно сложное. Начнем со следующего замечания. Рассуждения, приведенные в начале доказательства теоремы 2, показывают, что теорему 4 достаточно доказывать для случая $\rho \in [0, \frac{1}{2})$, причем в качестве чисел θ_1 и θ_2, $\theta_1 < \theta_2$ можно брать любые удобные для нас числа. Следующая лемма сводит доказательство теоремы 4 к доказательству ее частного случая.

Лемма 17. *Если теорема 4 верна в классе* $\mathrm{SHF}(0, \pi, \rho(r))$, *то она верна и в классе* $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$.

Доказательство. Предположим, что теорема верна в классе $\mathrm{SHF}(0, \pi, \rho(r))$. Докажем ее для класса $\mathrm{SF}(\theta_1, \theta_2, \rho(r))$. Как было сказано выше, можем считать, что $\rho \in [0, \frac{1}{2})$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Пусть $u(z)$ — гармоническая в углу $A(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ функция, непрерывная вплоть до границы, для которой верна асимптотическая формула

$$u(z) = (1+\varepsilon(z))\frac{\cos\rho\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{3\pi}{4}\rho}V(r), \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varepsilon(z)$ — бесконечно малая функция при $z \to \infty$ в замкнутом углу $-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4}$.

Рассмотрим множество

$$G(N) = \{z \in \mathbb{C}_+ : v(z) - Nu(z) < 0\}, \quad N < 0.$$

Так как субгармонические функции полунепрерывны сверху, то множество $G(N)$ — открытое. Поэтому оно представляется в виде объединения не более чем счетного множества связных компонент

$$G(N) = \bigcup_{k=1}^{\omega} G_k(N), \quad \omega \le \infty.$$

Покажем, что для любого N из некоторой окрестности $-\infty$ каждая компонента $G_k(N)$ является ограниченным множеством. Пусть h — индикатор функции v (можно считать, что $h(\theta) > -\infty$, иначе теорема 4 превращается в пустое утверждение):

$$E = \left\{ r > 0 : v(ir) > \left(h\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) V(r) \right\},$$

$$E_1 = \bigcup_{r \in E} \left(qr, \frac{1}{q} r \right), \quad D_1 = E_1 \times (0, \pi),$$

где q — произвольное фиксированное число из интервала $(0,1)$. По теореме 7 справедливо разложение $v(z) = v_1(z) + v_2(z)$, где $v_1(z) \in \mathrm{SF}(\rho(r))$, а для функции $v_2(z)$ на множестве D_1 выполняется неравенство $|v_2(z)| \le M_8 V(|z|)$. На множестве $G_k(N) \cap D_1$ справедлива оценка $v_1(z) < Nu(z) + M_8 V(|z|)$. При больших по модулю отрицательных N это неравенство и неограниченность компоненты $G_k(N)$ противоречат неравенству 2) из теоремы 6. Тем самым ограниченность множеств $G_k(N)$ доказана.

Для каждого ограниченного множества A определим относительный диаметр $d(A)$ этого множества с помощью формулы

$$d(A) = \frac{\operatorname{diam}(A)}{\sup_{z \in A} |z|},$$

где $\operatorname{diam}(A)$ — диаметр множества A. Пусть $\hat{G}_k(N)$, $k = 1, 2, \dots$ — семейство тех $G_k(N)$, для которых $d(G_k(N)) > \frac{1}{2}$. Обозначим

$$v_N(z) = \begin{cases} Nu(z), & z \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \hat{G}_k(N), \\ v(z), & z \overline{\in} \mathbb{C}_+ \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \hat{G}_k(N). \end{cases}$$

Заметим, что число множеств $\hat{G}_k(N)$ можно считать бесконечным, иначе доказываемое утверждение было бы тривиальным. Функция $v_N(z)$ является субгармонической в верхней полуплоскости. Поскольку каждая компонента множества, где выполняется неравенство $v_N(z) < Nu(z)$, имеет относительный диаметр, не превосходящий $\frac{1}{2}$, то $v_N(z) \in \mathrm{SHF}(0,\pi,\rho(r))$.

В дальнейшем обозначение $\hat{G}_k(N)$ сократим до $G_k(N)$. Так как $v \in \mathrm{SF}\left(-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\rho(r)\right)$, то для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство $v(z) \le MV(|z|)$ при $z \in A\left(-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$. Следовательно, $v_N(z) \le MV(|z|)$ при $\Im z > 0$. Обозначим

$$a = \inf_{r>0} \frac{V(\frac{1}{2}r)}{V(r)}, \quad b = \sup_{r>0} \frac{V(2r)}{V(r)},$$

В силу принятых нами соглашений относительно функции $V(r)$, a и b — строго положительные числа. Пусть $H \in \left(\underline{h}\left(\frac{\pi}{2}\right), h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Далее будем считать, что число N удовлетворяет неравенству

$$N \le -\max\left(\frac{8}{3}\frac{b}{a}M, \frac{32}{3}\frac{b}{a}|H|, \frac{32}{3}\frac{1}{a}\right).$$

Пусть $R_n = R_n(\alpha)$ — такая последовательность, что

$$w^{(N)}(\alpha) = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{1}{RV(R)} \int\limits_R^{(1+\alpha)R} |v_N(it) - HV(t)|dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_nV(R_n)} \int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} |v_N(it) - HV(t)|dt.$$

Покажем, что существует такое $\alpha_0 > 0$, что для любого $\alpha \in (0,\alpha_0)$ множество $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{G_k(N)}$ (здесь $\overline{G_k(N)}$ — замыкание множества $G_k(N)$) пересекает не более чем конечное число сегментов $[iR_n, i(1+\alpha)R_n]$. Если это не так, то для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}]$ найдется $\alpha \in (0,\delta)$ такое, что множество B будет пересекаться с бесконечным числом сегментов $[iR_n, i(1+\alpha)R_n]$. Обозначим в этом случае через $I(\alpha)$ множество тех n, для которых $[iR_n, i(1+\alpha)R_n] \cap B \ne \emptyset$. Пусть $z_n \in [iR_n, i(1+\alpha)R_n] \cap B$, $n \in I(\alpha)$. Пусть $z_n \in \overline{G}_k$. Так как $d(G_k) > \frac{1}{2}$, то любая окружность $|z - z_n| = \beta|z_n|$, $\beta \in (0,\frac{1}{2}]$ будет пересекаться с множеством G_k. Поэтому для любого $\beta \in (0,\frac{1}{2}]$

$$\inf_{\varphi} v_N\left(z_n + \beta|z_n|e^{i\varphi}\right) \le \frac{3}{4}NV\left(\frac{1}{2}|z_n|\right).$$

Кроме того, во всем круге $B(z_n, \frac{1}{2}|z_n|)$ выполняется неравенство $v_N(z) \le MV\left(\frac{3}{2}|z_n|\right)$. Отсюда следует известная в теории гармонической меры (см., напр., [17, разд. 3.3]) оценка Мию–Неванлинны

$$v_N\left(z_n + \beta|z_n|e^{i\varphi}\right) \le \frac{3}{4}NV\left(\frac{1}{2}|z_n|\right)\omega(\beta|z_n|) + MV\left(\frac{3}{2}|z_n|\right)(1 - \omega(\beta|z_n|)),$$

где $\omega(\beta|z_n|)$ — гармоническая мера в точке $(1+\beta)|z_n|$ отрезка $[\frac{1}{2}|z_n|, |z_n|]$ относительно области $C(|z_n|, \frac{1}{2}|z_n|) \setminus [\frac{1}{2}|z_n|, |z_n|]$. Это дает

$$v_N\left(z_n + \beta|z_n|e^{i\varphi}\right) \le \left(\frac{3}{4}aN + \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{2\beta}\left(\frac{3}{4}a|N| + bM\right)\right)V(|z_n|).$$

В частности, если $\beta \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}]$, то

$$v_N\left(z_n + \beta|z_n|e^{i\varphi}\right) \le \left(\frac{3}{8}aN + \frac{1}{2}bM\right)V(|z_n|) \le \frac{3}{16}aNV(|z_n|).$$

Точка $z_n \in [iR_n, i(1+\alpha)R_n]$, $\alpha \in (0,\delta)$, $\delta \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8})$. Поэтому $[iR_n, i(1+\alpha)R_n] \subset B(z_n, \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}|z_n|)$. Из этого следует, что при $t \in [R_n, (1+\alpha)R_n]$ выполняется неравенство

$$v_N(it) \le \frac{3}{16}aNV(|z_n|) \le \frac{3}{16}aNV(R_n).$$

Для тех же t выполняется неравенство $V(t) \le V(2R_n) \le bV(R_n)$. Поэтому при $t \in [R_n, (1+\alpha)R_n]$

$$|v_N(it) - HV(t)| \ge |v_N(it)| - |H|V(t) \ge \left(\frac{3}{16}a|N| - b|H|\right)V(R_n)$$

$$\ge \frac{3}{32}a|N|V(R_n) \ge V(R_n).$$

Мы приходим к неравенству $w^{(N)}(\alpha) \ge \alpha$ хотя бы для одной точки из интервала $(0,\delta)$, где в качестве δ можно брать любое число из интервала $(0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8})$. Напомним, что $v_N \in \mathrm{SHF}(0,\pi,\rho(r))$ и по посылке леммы для функции v_N теорема 4 справедлива. Полученное неравенство противоречит этому. Таким образом, существование числа α_0 доказано.

Пусть теперь $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Тогда

$$w^{(N)}(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{R_nV(R_n)}\int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n}|v_N(it) - HV(t)|dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_n V(R_n)} \int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} |v(it) - HV(t)|dt.$$

Отсюда следует, что $w(\alpha) \le w^{(N)}(\alpha)$. Тем самым теорема верна для функции $v(z)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. На основании леммы 17 достаточно доказывать теорему для случая $v \in \mathrm{SHF}(0, \pi, \rho(r))$, $\rho \in [0, 1)$. Мы это и будем делать. Доказательство теоремы разбиваем на несколько этапов.

Первый этап. На этом этапе докажем теорему для случая $H = \underline{h}(\theta) > -\infty$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Пусть число $\delta > 0$ и последовательность $R_n \uparrow \infty$ такие, как в теореме 15. Обозначим

$$T = \{r > 0 : v(re^{i\theta}) < (\underline{h}(\theta) - \varepsilon)V(r)\}.$$

Из определения нижнего индикатора следует, что множество T имеет линейную плотность нуль. На множестве $[R_n, (1+\Delta_1)R_n] \setminus T$ выполняется неравенство $|v(te^{i\theta}) - \underline{h}(\theta)V(t)| \le \varepsilon V(t)$. Поэтому при $\alpha \in (0, \delta)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} |v(te^{i\theta}) - \underline{h}(\theta)V(t)|dt$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} V(t)dt + \int\limits_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} \chi_T(t)\left(|v(t) + |\underline{h}(\theta)|V(t)\right)dt.$$

Теперь из теорем 8, 10 легко следует, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{w(\alpha)}{\alpha} = 0$. Первый этап завершен.

Второй этап. На этом этапе докажем оставшиеся недоказанными утверждения теоремы при дополнительном предположении, что $\underline{h}(\theta) > -\infty$. Пусть $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta)]$ или $H = h(\theta)$. Поскольку $h_\Delta(\theta) \ge h(\theta)$, то существует последовательность $R_{2,n} \uparrow \infty$ такая, что $v_\triangle(R_{2,n}e^{i\theta}) \ge (h(\theta) + \varepsilon_n)V(R_{2,n})$, где ε_n — бесконечно малая последовательность. Из теоремы 16 следует, что для всех достаточно малых $\triangle$ будет выполняться неравенство $\underline{h}_\triangle(\theta) < H$. Поэтому существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $R_{1,n} \uparrow \infty$ такие, что $v_\triangle(R_{1,n}e^{i\theta}) \le (H - \varepsilon)V(R_{1,n})$. Предположим дополнительно, что $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta))$. Функция $\dfrac{v_\Delta(re^{i\theta})}{V(r)}$ является непрерывной функцией на полуоси $(0, \infty)$. Тогда по теореме о среднем для непрерывной функции существует последовательность

$R_n \uparrow \infty$ такая, что $v_\Delta(R_n e^{i\theta}) = HV(R_n)$. В общем случае для любого указанного нами H существует последовательность $R_n \uparrow \infty$ такая, что $v_\Delta(R_n e^{i\theta}) = (H + \varepsilon_{1,n})V(R_n)$, где $\varepsilon_{1,n}$ — бесконечно малая последовательность. Имеем

$$I = \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(te^{i\theta}) - HV(t)|dt \le \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(te^{i\theta}) - v_\Delta(te^{i\theta})|dt$$

$$+ \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_\Delta(te^{i\theta}) - v_\Delta(R_n e^{i\theta})|dt$$

$$+|H| \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |V(t) - V(R_n)|dt + |\varepsilon_{1,n}|\Delta_1 R_n V(R_n) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Далее будем считать, что

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{\ln\frac{1}{\Delta_1}}\psi(\Delta_1), \quad \eta = \frac{1}{M_{14}}\Delta_1\psi(\Delta_1), \quad \psi(\Delta_1) = \ln\frac{1}{\Delta_1} l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right),$$

где M_{14} — величина из теоремы 14. Если взять $K = \underline{h}(\theta) - 1$, то неравенство (5) будет выполняться для всех достаточно больших R. Тогда по теореме 1 будет выполняться неравенство (6). Если в этом неравенстве взять $R = R_n$, $k = \ln\frac{1}{\Delta_1}$, то получим

$$I_1 = \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(te^{i\theta}) - v_\Delta(te^{i\theta})|dt \le \left(M\frac{\Delta_1}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right) + \varepsilon(R_n)\right) R_n V(R_n).$$

Мы будем считать, что величины θ и Δ удовлетворяют условию (13), μ_1, μ_2 — меры такие, как в тексте теоремы 14,

$$v_1(z) = \iint \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_2(\zeta), \quad v(z) = v_1(z) + v_2(z).$$

Тогда $v_\Delta(z) = v_{1,\Delta}(z) + v_2(z)$,

$$I_2 \le \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_{1,\Delta}(te^{i\theta}) - v_{1,\Delta}(R_n e^{i\theta})|dt$$

$$+ \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_2(te^{i\theta}) - v_2(R_n e^{i\theta})|dt = I_{21} + I_{22}.$$

Из теоремы 7 следует оценка $I_{22} \le M\Delta_1^2 R_n V(R_n)$. По теореме 14 множество $G(\eta, \overline{M}_3, \mu_1)$ не пересекается с сегментом $[R_n e^{i\theta}, (1+\Delta_1)R_n e^{i\theta}]$. Поэтому по теореме 6

$$|v_{1,\Delta}(te^{i\theta}) - v_{1,\Delta}(R_n e^{i\theta})| \le M_5 V(R_n) \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{\Delta_1}{\eta u}\right) du$$

$$= M_5 V(R_n) \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{M_{14}}{u \ln\frac{1}{\Delta_1} l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}\right) du \le M \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} V(R_n).$$

Отсюда следует, что $I_2 \le M\Delta_1 \dfrac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} R_n V(R_n)$.

Из полученных оценок для I_1 и I_2, очевидных оценок для I_3 и I_4 вытекает, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{RV(R)} \int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} |v(te^{i\theta}) - HV(t)| dt \le M\Delta_1 \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}}.$$

Второй этап завершен.

Третий этап. На этом этапе мы заканчиваем доказательство теоремы. Можно считать, что $\underline{h}(\theta) = -\infty$. Пусть $H \in (-\infty, h(\theta)]$. Пусть $u(z)$ — такая функция, как в лемме 17,

$$v_N(z) = \max(v(z), Nu(z)).$$

Заметим, что введенная нами функция $v_N(z)$ не совпадает с функцией, которая в лемме 17 обозначалась тем же символом. Существует такое N, что будут выполняться неравенства $\underline{h}(v_N, \theta) < H \le h(v_N, \theta)$. Очевидно, что $\underline{h}(v_N, \theta) > -\infty$. По доказанному

$$w^{(N)}(\Delta_1) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{RV(R)} \int\limits_R^{(1+\Delta_1)R} |v_N(te^{i\theta}) - HV(t)| dt \le M\Delta_1 \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}}.$$

Пусть $R_n \uparrow \infty$ — такая последовательность, что

$$w^{(N)}(\Delta_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R_n V(R_n)} \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_N(te^{i\theta}) - HV(t)| dt.$$

Тогда
$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_N(te^{i\theta}) - HV(t)|dt = (w^{(N)}(\Delta_1) + \varepsilon_n)R_nV(R_n).$$

Из этого следует, что на большей части сегмента $[R_n, (1+\Delta_1)R_n]$ выполняется равенство $v_N(te^{i\theta}) = v(te^{i\theta})$.

Теорема 1 сформулирована для функций субгармонических во всей плоскости. Однако, повторяя рассуждение из предыдущего этапа, связанное с разбиением $v(z) = v_1(z) + v_2(z)$, получим, что справедлив аналог неравенства (6)

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_\Delta(te^{i\theta}) - v(te^{i\theta})|dt \le \left(M\Delta_1 \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} + \varepsilon(R_n) \right) R_nV(R_n).$$

Из полученных неравенств следует, что существует такое число M, что для всех достаточно больших n на сегменте $[R_n, (1+\Delta_1)R_n]$ найдется точка ξ такая, что

$$|v_\Delta(\xi e^{i\theta}) - HV(\xi)| \le M \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} V(R_n).$$

Далее имеем

$$\int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(te^{i\theta}) - HV(t)|dt \le \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(te^{i\theta}) - v_\Delta(te^{i\theta})|$$
$$+ \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_\Delta(te^{i\theta}) - v_\Delta(\xi e^{i\theta})|dt + M\Delta_1 \frac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}{\ln\frac{1}{\Delta_1}} R_nV(R_n)$$
$$+|H| \int\limits_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |V(t) - V(\xi)|dt.$$

Осталось повторить некоторые рассуждения второго этапа. Третий этап завершен. Теорема доказана.

Если функция $v(z)$ имеет регулярный рост в смысле Левина–Пфлюгера на луче $\arg z = \theta$, то нетрудно доказать, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{RV(R)} \int\limits_{R}^{(1+\alpha)R} |v(te^{i\theta}) - h(\theta)V(t)|dt = 0.$$

В связи с теоремой 4 стоит сделать следующие замечания. Вопрос о точном порядке убывания функции $w(\alpha)$ при $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta)]$ остается открытым. Теорема 4 и нижеследующий пример показывают исключительность значения $H = \underline{h}(0)$ по сравнению с другими значениями H из сегмента $[\underline{h}(\theta), h(\theta)]$ в этом вопросе. Для $H = \underline{h}(\theta)$ не только несправедливо неравенство (10), но несправедливо и неравенство, которое получается из (10) заменой правой части на произвольную функцию $\varphi(\alpha)$ вида $o(\alpha)$ при $\alpha \to 0$.

7. Пример

Пусть $\alpha \in (0,1)$ и пусть $\gamma(u)$ — строго возрастающая функция на сегменте $[0,\alpha]$, дифференцируемая на полуинтервале $(0,\alpha]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(+0) = +\infty$ и такая, что сходится интеграл $\int_0^\alpha \ln(1/t)d\gamma(t)$. Сходимость последнего интеграла эквивалентна сходимости интеграла $\int_0^\alpha (\gamma(t)/t)dt$. Пусть $\rho \in (0,1)$. Пусть r_n, $r_1 \geq 1$, — быстро возрастающая числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^\rho \leq r_n^{\rho/2}, \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k^{\rho-1} \leq 1/r_n.$$

Пусть, наконец, $\varphi_n(s) = r_n^\rho \gamma(s/r_n)$. Обозначим

$$v_n(z) = \int_0^{\alpha r_n} \ln\left|1 - \frac{z}{r_n + is}\right| d\varphi_n(s) = r_n^\rho \int_0^\alpha \ln\left|1 - \frac{z}{r_n(1+iu)}\right| d\gamma(u),$$

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z).$$

Исследуем некоторые свойства функции $v(z)$. Пусть q — произвольное число из интервала $(0,1)$ и $r = |z| \in [qr_n, r_n/q]$. Пусть $m < n$. Тогда

$$v_m(z) = r_m^\rho \int_0^\alpha \ln\left|1 - \frac{z}{r_m(1+iu)}\right| d\gamma(u) = (1+o(1)) r_m^\rho \gamma(\alpha) \ln r \qquad (n \to \infty),$$

$$\left|\sum_{m=1}^{n-1} v_m(z)\right| \leq A_1 r^{\rho/2} \ln r.$$

При $m > n$ выполняется неравенство

$$|v_m(z)| \leq \gamma(\alpha) r_m^{\rho-1} r, \qquad \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} v_m\right| \leq \gamma(\alpha)\frac{r}{r_n} \leq A_2.$$

Таким образом, при $r \in [qr_n, r_n/q]$ справедливо представление

$$v(z) = v_n(z) + \psi_n(z), \quad |\psi_n(z)| \le A_1 r^{\rho/2} \ln r + A_2. \tag{19}$$

Изучим динамическую систему Азарина: $v_t(z) = v(tz)/t^\rho$, $t \in (0, \infty)$. Для этого зафиксируем t и рассмотрим функцию

$$\frac{v_n(tr_nz)}{t^\rho r_n^\rho} = \frac{1}{t^\rho} \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{tz}{1+iu} \right| d\gamma(u) = a_t(z).$$

Из соотношения (19) следует, что для любого $t \in (0, \infty)$ функция $a_t(z)$ принадлежит предельному множеству Азарина $Fr(v)$ функции v. Мы используем определение Азарина [18] предельного множества. Очевидно, что если K — компакт, не содержащий нуля, то $a_t(z) \to 0$, если $t \to 0$ или $t \to \infty$ равномерно на компакте K. Можно также показать, что множество функций $a_t(z)$, $t \in (0, \infty)$ и 0 совпадает с $Fr(v)$. Детали рассуждения будут приведены позже по другому поводу. Обозначим

$$\varphi(t) = a_t(1) = \frac{1}{2t^\rho} \int_0^\alpha \ln \frac{(t-1)^2 + u^2}{1 + u^2} d\gamma(u).$$

Теорема Азарина [18] утверждает, что если $h(\theta)$ и $\underline{h}(\theta)$ — индикатор и нижний индикатор субгармонической функции v, то выполняются равенства

$$h(\theta) = \sup_{u \in \mathrm{Fr} v} u(e^{i\theta}), \quad \underline{h}(\theta) = \inf_{u \in \mathrm{Fr} v} u(e^{i\theta}).$$

По теореме Азарина для индикаторов введенной нами функции v выполняются равенства

$$h(0) = \sup_{t \in (0,\infty)} \varphi(t), \quad \underline{h}(0) = \inf_{t \in (0,\infty)} \varphi(t).$$

В частности, $\varphi(1) \in [\underline{h}(0), h(0)]$. Легко видеть, что $\varphi(+0) = \varphi(2) = 0$ и что $\varphi(t) < 0$ при $t \in (0, 2)$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 2$. Имеем

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\rho+1}} \int_0^\alpha \left(-\rho \ln \frac{(t-1)^2 + u^2}{1 + u^2} + \frac{2t(t-1)}{(t-1)^2 + u^2} \right) d\gamma(u).$$

При $t \in (1, 2)$ оба слагаемых в скобках положительны, и поэтому функция $\varphi(t)$ возрастает на сегменте $[1, 2]$. Так как $\gamma'(+0) = +\infty$, то применяя рассуждения, связанные с доказательством теоремы Фату ([19, гл. 1, п. D3]), можно доказать, что $\varphi'(1+0)=+\infty$, $\varphi'(1-0)=-\infty$. Таким образом, точка 1 есть по крайней мере точка локального минимума функции $\varphi(t)$. Мы не нашли доказательства того, что точка 1 есть точка минимума функции $\varphi(t)$ на оси $(0,\infty)$. В дальнейшем, применяя теорему 4, докажем это утверждение для специальных функций γ. Всюду далее предполагается, что $\beta\in(0,\alpha]$. Рассмотрим величины

$$w(\beta)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{r^{1+\rho}}\int\limits_{r}^{(1+\beta)r}|v(t)-\varphi(1)t^{\rho}|dt,$$

$$w_1(\beta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n^{1+\rho}}\int\limits_{r_n}^{(1+\beta)r_n}|v(t)-\varphi(1)t^{\rho}|dt,$$

где r_n — определенная ранее последовательность.

Из дальнейшего будет видно, что второй из написанных выше пределов существует. Из соотношения (19) следует, что

$$w_1(\beta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n^{1+\rho}}\int\limits_{r_n}^{(1+\beta)r_n}|v_n(t)-\varphi(1)t^{\rho}|dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n^{1+\rho}}\int\limits_{r_n}^{(1+\beta)r_n}\left|r_n^{\rho}\int\limits_0^{\alpha}\ln\left|1-\frac{t}{r_n(1+iu)}\right|d\gamma(u)\right.$$
$$\left.-\frac12 t^{\rho}\int\limits_0^{\alpha}\ln\frac{u^2}{1+u^2}d\gamma(u)\right|dt.$$

Сделаем в интеграле замену $t=r_n+\tau r_n$. Получим

$$w_1(\beta)=\int\limits_0^{\beta}\left|\int\limits_0^{\alpha}\ln\left|1-\frac{1+\tau}{1+iu}\right|d\gamma(u)-\frac12(1+\tau)^{\rho}\int\limits_0^{\alpha}\ln\frac{u^2}{u^2+1}d\gamma(u)\right|d\tau$$

$$=\frac12\int\limits_0^{\beta}\left|(1+\tau)^{\rho}\int\limits_0^{\alpha}\ln\frac{u^2}{1+u^2}d\gamma(u)+\int\limits_0^{\alpha}\ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2}d\gamma(u)\right|d\tau.$$

Таким образом,

$$w_1(\beta)=\frac12\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}\left[(1+\tau)^{\rho}\ln\frac{1+u^2}{u^2}-\ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2}\right]d\gamma(u)d\tau. \tag{20}$$

Из определений $w(\beta)$ и $w_1(\beta)$ следует, что

$$w(\beta) \le w_1(\beta). \tag{21}$$

Пусть $t_k \uparrow \infty$ — такая последовательность, что

$$w(\beta) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^{\rho+1}} \int\limits_{t_k}^{(1+\beta)t_k} |v(t) - \varphi(1)t^\rho| dt.$$

Прореживая, если нужно, эту последовательность, можно добиться того, что на каждом из полуинтервалов $[r_n, r_{n+1})$ будет находиться не более одной точки t_k. Прореживая, если нужно, последовательность t_k еще раз, можно добиться, чтобы любая точка t_k находилась бы только в одном из множеств $\left[r_n, \sqrt{r_n r_{n+1}}\right]$, $\left(\sqrt{r_n r_{n+1}}, r_{n+1}\right)$ (разумеется, каждому k отвечает свое n). Так как оба случая изучаются одинаково, то можно дополнительно предположить, что для каждого k однозначно определяется номер n_k такой, что $t_k \in \left[r_{n_k}, \sqrt{r_{n_k} r_{n_k+1}}\right]$, причем разным k отвечают различные n_k. Пусть $s = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} t_k/r_{n_k}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $s = \lim\limits_{k\to\infty} t_k/r_{n_k}$. Очевидно, что $s \in [1, \infty]$. Докажем, что $s < \infty$. Предположим, что $s = \infty$. Имеем

$$\left|\sum_{m=1}^{n_k-1} v_m(z)\right| \le A_1 r^{\rho/2} \ln r, \quad r \ge r_{n_k},$$

$$\frac{1}{|z|^\rho} \left|\sum_{m=n_k+1}^{\infty} v_m(z)\right| \le \gamma(\alpha) \frac{r^{1-\rho}}{r_{n_k+1}^{1-\rho}} + \frac{r^{1-\rho}}{r_{n_k+1}}, \quad r \in [r_{n_k}, \sqrt{r_{n_k} r_{n_k+1}}].$$

Из полученных оценок следует, что

$$w(\beta) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^{\rho+1}} \int\limits_{t_k}^{(1+\beta)t_k} |v_{n_k}(t) - \varphi(1)t^\rho| dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^{\rho+1}} \int\limits_{t_k}^{(1+\beta)t_k} \left| r_{n_k}^\rho \int\limits_0^\alpha \ln\left|1 - \frac{t}{r_{n_k}(1+iu)}\right| d\gamma(u) - \varphi(1)t^\rho \right| dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\beta \left| \int\limits_0^\alpha \left(\frac{r_{n_k}}{t_k}\right)^\rho \ln\left|1 - \frac{t_k}{r_{n_k}} \frac{1+\tau}{1+iu}\right| d\gamma(u) - \varphi(1)(1+\tau)^\rho \right| d\tau. \tag{22}$$

Учитывая равенство $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k}/t_k = 0$, получим

$$w(\beta) = \int\limits_0^\beta |\varphi(1)|(1+\tau)^\rho d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \int\limits_0^\alpha (1+\tau)^\rho \ln\frac{1+u^2}{u^2} d\gamma(u)d\tau.$$

Сравнивая с (20), получим $w(\beta) > w_1(\beta)$. Это противоречит (21). Таким образом, случай $s=\infty$ невозможен. Покажем, что случай $s\in(1,\infty)$ также невозможен. В противном случае из соотношения (22) следует, что

$$w(\beta) = \int\limits_0^\beta \left| \frac{1}{s^\rho}\int\limits_0^\alpha \ln\left|1-\frac{s(1+\tau)}{1+iu}\right| d\gamma(u) - \varphi(1)(1+\tau)^\rho \right| d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \left| \int\limits_0^\alpha \left[(1+\tau)^\rho \ln\frac{1+u^2}{u^2} - \frac{1}{s^\rho}\ln\frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2}\right] d\gamma(u)\right| d\tau.$$

Выражение в квадратных скобках совпадает по знаку с выражением

$$(1+\tau)^\rho s^\rho \ln\frac{1+u^2}{u^2} - \ln\frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2}$$

$$= (s^\rho(1+\tau)^\rho - 1)\ln\frac{1+u^2}{u^2} + \ln\frac{(s-1+s\tau)^2+u^2}{u^2}$$

и поэтому положительно. Таким образом, получаем

$$w(\beta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \int\limits_0^\alpha \left((1+\tau)^\rho \ln\frac{1+u^2}{u^2} - \frac{1}{s^\rho}\ln\frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2}\right) d\gamma(u)d\tau.$$

Вместе с (20) это дает

$$w(\beta) - w_1(\beta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \int\limits_0^\alpha \left(\ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} - \frac{1}{s^\rho}\ln\frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2}\right) d\gamma(u)d\tau.$$

Подынтегральная функция совпадает по знаку с функцией

$$s^\rho \ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} - \ln\frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} = (s^\rho - 1)\ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} + \ln\frac{(s-1+s\tau)^2+u^2}{1+u^2}$$

$$= (s^\rho - 1)\ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} + \ln\left(1 + \frac{(s-1+(s+1)\tau)(s-1)(1+\tau)}{\tau^2+u^2}\right).$$

Так как $s > 1$, $\tau \in [0,\beta] \subset [0,1]$, то написанная выше функция строго положительна. Это дает $w(\beta) - w_1(\beta) > 0$, что противоречит (21). Таким образом, осталась единственная возможность $s = 1$. Это дает

$$w(\beta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \left[(1+\tau)^\rho \ln\frac{1+u^2}{u^2} - \ln\frac{1+u^2}{\tau^2+u^2}\right] d\gamma(u)d\tau,$$

$$w(\beta) = w_1(\beta).$$

Таким образом, функция $w(\beta)$ вычислена. Приведенные рассуждения легко приспособить для доказательства высказанного ранее утверждения о множестве $\mathrm{Fr}(v)$. Далее имеем

$$w(\beta) \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \ln\frac{\tau^2+u^2}{u^2} d\gamma(u)d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha u\int\limits_0^{\beta/u} \ln(1+\tau_1^2)d\tau_1 d\gamma(u)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha u\left(\frac{\beta}{u}\ln\left(1+\frac{\beta^2}{u^2}\right) - 2\frac{\beta}{u} + 2\operatorname{arctg}\frac{\beta}{u}\right) d\gamma(u)$$

$$\geq \frac{\beta}{2}\int\limits_0^\alpha \ln\left(1+\frac{\beta^2}{u^2}\right) d\gamma(u) \geq \frac{\beta}{2}\int_0^\beta \ln\left(1+\frac{\beta^2}{u^2}\right) d\gamma(u)$$

$$\geq \beta\int\limits_0^\beta \ln\frac{\beta}{u} d\gamma(u) = \beta\int_0^\beta \frac{\gamma(u)}{u}du. \tag{23}$$

Пусть $\varepsilon(\beta)$ — произвольная положительная функция, сходящаяся к нулю при $\beta \to 0$. Ограничения, наложенные на функцию γ, не исключают возможность выполнения неравенства

$$\int\limits_0^\beta \frac{\gamma(u)}{u}du \geq \varepsilon(\beta) \tag{24}$$

в некоторой правой окрестности нуля. В частности, если $\varepsilon(\beta) = M\dfrac{l_2^{1/2}\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\ln\frac{1}{\beta}}$, где M — константа из теоремы 4, то тогда неравенства (24), (23), соотношение $\varphi(1) \in (\underline{h}(0), h(0)]$ и теорема 4 вместе дают противоречие. Тем самым, если функция γ удовлетворяет неравенству (24) с написанной выше функцией $\varepsilon(\beta)$, то $\underline{h}(0) = \varphi(1) = \min\limits_{t\in(0,\infty)} \varphi(t)$. Кроме того, неравенства (23) и (24) показывают, что при $H = \underline{h}(\theta)$ в теореме 4 условие $w(\alpha) \le \varepsilon(\alpha)\alpha$ не выполняется ни для какой функции $\varepsilon(\alpha)$, сходящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в классе всех субгармонических функций, которые удовлетворяют условиям теоремы 4.

Список литературы

[1] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956).

[2] *А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина*, Об уточненном порядке. — Межвуз. сб. "Комплексный анализ и матфизика", Красноярск (1998), с. 10–24.

[3] *А.Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1968), вып. 6, с. 3–29; (1968), вып. 7, с. 59–84; (1969), вып. 8, с. 126–135.

[4] *E. Phragmen and E. Lindelöf*, Sur une extension d'un principe classique de l'analise et sur quelques proprietes des fonctions monogenes dans le voisinage d'un point singulier. — *Acta Math.* (1908), v. 31, p. 381–406.

[5] *А.Ф. Гришин*, Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1994), т. 1, с. 193–215, (1995), т. 2, с. 177–193.

[6] *Jun-Iti Itô*, Subharmonic functions in half-plane. — *Trans. Am. Math. Soc.* (1967), v. 129, No. 3, p. 479–499.

[7] *А.Ф. Гришин*, Простейшая тауберова теорема. — *Мат. зам.* (2003), т. 74, № 2, с. 221–229.

[8] *V. Bernstein*, Sopra une proposizione relativa alla crescenza delle funzioni olomorfe. — *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1933), v. 2, No. 2, p. 381–399.

[9] *А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина*, Об утверждениях типа теоремы Владимира Бернштейна. — Тр. ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. Теория приближения функций, Донецк (1998), т. 3, с. 44–55.

[10] *A.F. Grishin and T.I. Malyutina*, Subharmonic functions satisfying the local Levin condition. — *Israel Math. Conf. Proc.* (2001), v. 15, p. 137–147.

[11] *A.F. Grishin and T.I. Malyutina*, General properties of subharmonic functions of finite order in a complex half-plane. — *Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка* (2000), т. 475, p. 20–44.

[12] *A. Edrei and W.H.J. Fuchs*, Bounds for number of deficient values of certain classes of meromorphic functions. — *Proc. London Math. Soc.* (1962), v. 12, p. 315–344.

[13] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970).

[14] *А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина*, Функции плотности. — *Мат. физ., анализ, геом.* (2000), т. 7, с. 387–414.

[15] *В.С. Азарин*, Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1966), вып. 2, с. 55–66.

[16] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Индикаторы целых функций конечного порядка, представимых рядом Дирихле. — *Алгебра и анализ* (1990), т. 2, № 3, с. 144–170.

[17] *L. Ahlfors*, Conformal invariants. McCraw-Hill, New York (1973).

[18] *В.С. Азарин*, Об асимптотическом поведении субгармонических функций. — *Мат. сб.* (1979), т. 108, № 2, с. 147–167.

[19] *П. Кусис*, Введение в теорию пространств H^p. Мир, Москва (1984).

New formulas for inidicators of subharmonic functions

A.F. Grishin, T.I. Malyutina

The paper concerns the theory of growth of subharmonic functions of finite order. Main characteristics of growth of ones are indicator and lower indicator. There is a theorem among main results of the paper where new formulas for indicator are showed. A criterium of complete regularity in sense of Levin and Pfluger is demonstrated as application. This criterium is formulated for a fixed ray. It is sharpening of a theorem of B.Ya. Levin. Another theorems attributed to the main results is in-deps elaboration of a theorem of Bernstein. Often under investigation of a subharmonic function it is likened to one that produced by translation of Riesz' measure of initial function to a finite system of rays. New property of the operation of translation are among other results of the paper.