Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 1, с. 3–30

УДК 517.535.4:517.93.:517.9

Предельные множества целых функций и полнота систем экспонент

В. С. Азарин, В. Б. Гинер

Харьковский институт инженеров транспорта, Украина, 310050, г. Харьков, пл. Фейербаха, 7

Статья поступила в редакцию 4 октября 1993 г.

Пусть $\{\exp(\lambda_j z)\}$, где λ_j — множество точек комплексной плоскости C, является системой экспонент, и пусть G — выпуклая область в C. В статье изучается полнота этой системы в пространстве $A(G)$ голоморфных функций в G с топологией равномерной сходимости на компактах. Это изучение проводится в терминах предельного множества целой функции Ф с нулями в точках $\{\lambda_j\}$.

Нехай $\{\exp(\lambda_j z)\}$, де λ_j — множина точок з комплексної площини C, є системою експонент, і нехай G — опукла область у C. У статті вивчається повнота цієї системи у просторі $A(G)$ голоморфних функцій у G з топологією рівномірної збіжності на компактах. Це вивчення проводиться у термінах граничної множини цілої функції Ф, яка має нулі у точках $\{\lambda_j\}$.

§ 0. Введение

0.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — множество точек в комплексной плоскости C, удовлетворяющее условиям $\lambda_j \neq 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $k \neq j$.

Составим каноническое произведение

$$\Phi_\Lambda(\lambda) = \prod (1 - \lambda/\lambda_j) \exp \lambda/\lambda_j \tag{0.1}$$

и будем предполагать в дальнейшем, что Λ таково, что Φ_Λ — целая функция экспоненциального типа ([1], с.113).

В терминах Λ это условие описывается, как известно, так: пусть n_Λ — распределение единичных масс в точках $\lambda_j \in \Lambda$, $n_\Lambda(r) := n_\Lambda(K_r)$, где $K_r = \{\lambda : |\lambda| < r\}$ — круг радиуса r, $\delta_\Lambda(r) := \sum_{|\lambda_j| < r} \lambda_j^{-1} = \int_{K_r} \lambda^{-1} dn_\Lambda$.

Для того, чтобы Φ_Λ была функцией экспоненциального типа, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\overline{\Delta}_\Lambda := \limsup_{r\to\infty} n_\Lambda(r) r^{-1} < \infty, \qquad \bar{\delta}_\Lambda := \limsup_{r\to\infty} |\delta_\Lambda(r)| < \infty.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\overline{\Delta}_\Lambda > 0$.

0.2. Пусть G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}$, содержащая нуль, а $A(\mathbb{C})$ — пространство голоморфных в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Мы будем изучать полноту системы экспонент

$$\exp\Lambda := \{ e^{\lambda_j z} : \lambda_j \in \Lambda \} \tag{0.2}$$

в $A(G)$ и интересоваться следующими вопросами:

1) *полнотой* $\exp\Lambda$ в G;

2) *максимальностью* G для $\exp\Lambda$, полной в $A(G)$;

3) *предельной переполненностью* $\exp\Lambda$ в $A(G)$ для максимальной G.

Дадим точные определения максимальности и предельной переполненности.

Выпуклая область G называется *максимальной* для системы $\exp\Lambda$, полной в $A(G)$, если для любой области $G_1 \supset G$ $\exp\Lambda$ неполна в $A(G_1)$.

Система $\exp\Lambda$ называется *предельно переполненной* в $A(G)$ для максимальной G, если при любой последовательности $\Lambda_1 = \{\lambda_j^1\}$, такой, что $\Lambda_1 \cap \Lambda = \varnothing$ и $\overline{\Delta}_{\Lambda_1} > 0$, область G уже не является максимальной для системы $\exp(\Lambda \cup \Lambda_1)$.

Иначе говоря, любое существенное расширение предельно переполненной системы увеличивает максимальную область полноты.

0.3. Пусть

$$h_\Lambda(\varphi) := \limsup_{r \to \infty} \ln |\Phi_\Lambda(re^{i\varphi})| \, r^{-1}$$

есть индикатор Φ_Λ, G_Λ — *сопряженная индикаторная диаграмма* для Φ_Λ, т.е. выпуклая область, заданная соотношением

$$G_\Lambda = \{ z: \max_{z \in G_\Lambda} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < h_\Lambda(\varphi) \}.$$

Опишем условия полноты, максимальности и предельной переполненности, когда Λ — правильное множество, а Φ_Λ — функция вполне регулярного роста ([1], с. 118).

Будем говорить, что G_Λ *вкладывается* в G, если ее можно вложить в G параллельным переносом; *вкладывается со скольжением* — если после вложения ее можно сдвинуть только в одном направлении, не выходя из G; *жестко вкладывается* — если нельзя сдвинуть; *свободно вкладывается* — во всех остальных случаях.

Теорема 0.1. *Пусть Λ — правильное множество точек. Тогда верны импликации:*

1. $\{ \exp\Lambda$ *неполна в* $A(G) \} \Leftrightarrow \{ G_\Lambda$ *свободно вкладывается в* $G \}$;

2. $\{ G$ *максимальная для* $\exp\Lambda \} \Leftrightarrow \{ G_\Lambda$ *не вкладывается свободно в* $G \}$;

3. $\{ \exp\Lambda$ *предельно переполнена в* $A(G) \} \Leftrightarrow \{ G$ *жестко вкладывается в* $G \}$.

Отметим, что G является максимальной для $\exp\Lambda$, но $\exp\Lambda$ не является предельно переполненной в $A(G)$ тогда и только тогда, когда G_Λ вкладывается в G со скольжением.

0.4. Если Λ не является правильным множеством, то для характеризации $\exp\Lambda$ естественно использовать более тонкие характеристики роста Φ_Λ, чем индикатор. Мы будем использовать понятие *предельного множества* ([2], с. 30; [3]).

Пусть $u(\lambda)$ — субгармоническая функция порядка ρ и нормального типа, т.е.

$$\sigma_u := \limsup_{r\to\infty} M(r,u)r^{-\rho} < \infty,$$

где

$$M(r,u) = \max\{\, u(re^{i\varphi}) : 0 \le \varphi < 2\pi \,\}.$$

Пусть $D'(\mathbb{C})$ — пространство распределений Л. Шварца, т.е. пространство обобщенных функций над основным пространством $D(\mathbb{C})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций (см., например, [4], с. 17).

Семейство субгармонических функций

$$u_t(\lambda) := u(\lambda t)t^{-\rho} \tag{0.3}$$

предкомпактно в D'-топологии при $t\to\infty$, т.е. для любой последовательности $t_j\to\infty$ найдутся подпоследовательность $t_j'\to\infty$ и субгармоническая функция $v(\lambda)$ такие, что $u_{t_j'}\to v$ в D'.

Предельное множество субгармонической функции u определяется равенством:

$$\mathrm{Fr}\,u = \{\, v : \exists\, t_j\to\infty\ [v = D'\text{-}\lim u_{t_j}\,]\}.$$

Предельное множество субгармонической функции $u(\lambda) := \ln|\Phi_\Lambda|$ (при $\rho = 1$) будем обозначать $\mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$. Оно описывает асимптотическое поведение Φ_Λ при $\lambda\to\infty$.

Для описания асимптотического поведения самого Λ, т.е. нулей Φ_Λ, используем предельное множество распределения масс (меры).

Пусть μ — мера (неотрицательная) в плоскости, удовлетворяющая условию

$$\overline{\Delta}_u := \limsup_{r\to\infty} \mu(K_r)r^{-\rho} < \infty,$$

где $K_r = \{\lambda : |\lambda| < r\}$.

Введем преобразование

$$\mu_t(E) = \mu(tE)t^{-\rho},$$

где E — любое борелевское множество, tE — гомотетия E.

Семейство $\{\mu_t : t > 0\}$, определенное этим преобразованием, предкомпактно в D'-топологии при $t\to\infty$, т.е. для любой последовательности $t_j\to\infty$ найдутся подпоследовательность $t_j'\to\infty$ и мера ν такие, что $\mu_{t_j'}\to\nu$ в D'.

Для целого положительного ρ обозначим

$$\delta(t,\mu,\rho) := \int_{K_t} \frac{d\mu}{\lambda^\rho}$$

и будем предполагать, что выполнено условие

$$\bar{\delta} := \limsup_{t\to\infty} |\delta(t,\mu,\rho)| < \infty .$$

Рассмотрим семейство пар $S_t = (\delta(t,..),\mu_t)$. Будем считать, что $S_{t_j} \to S(\delta,\nu)$ при $t_j \to \infty$, если $\mu_{t_j} \to \nu$ в D' и $\delta(t_j,\ldots) \to \delta$. Это семейство предкомпактно, множество его пределов обозначим через $S\mu$.

Пусть μ_u — мера, ассоциированная по Риссу с субгармонической функцией u. В работе [5] установлено взаимно однозначное соответствие между S_{μ_u} и Fru для целого порядка ρ, а именно: пусть

$$H(u,p) = \ln|1-u| + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{p} u^k/k\right)$$

есть логарифм модуля канонического множителя Вейерштрасса рода p и пусть

$$v(\lambda,\nu,\rho) = \int_{K_1} H(\lambda/\zeta,\rho-1)d\nu + \int_{\mathbb{C}\setminus K_1} H(\lambda/\zeta,\rho)d\nu.$$

Теорема I (М. Л. Содин). *Каждой паре* $(\delta,\nu)\in S_{\mu_u}$ *взаимно однозначно соответствует* $v\in$ Fru, *задаваемая формулой*

$$v(\lambda) = \mathrm{Re}(\delta\lambda^\rho) + v(\lambda,\nu,\rho). \tag{0.4}$$

Можно указать явные формулы и для перехода от v к паре (δ,ν), а именно, ν определяется равенством

$$d\nu = \frac{1}{2\pi}\Delta v\, dxdy,$$

где Δv — оператор Лапласа, а δ определяется равенством

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi}[v(e^{i\varphi}) - v(e^{i\varphi},\nu,\rho)]\,d\varphi.$$

Множество S_μ для $\mu = n_\Lambda$ будем обозначать S_Λ. Оно описывает асимптотическое поведение Λ. Теорема I показывает, что можно описывать его и в терминах Fr Φ_Λ.

Отметим, что если Φ_Λ — функция вполне регулярного роста, то представление (0.4) переходит в интегральное представление ее индикатора через угловую плотность нулей ([1], с 83), так как предельное множество в этом случае состоит из единственной функции v_0, имеющей вид

$$v_0(\lambda) = |\lambda|\, h_\Lambda(\arg\lambda).$$

0.5. Пусть предельное множество Φ_Λ имеет вид

$$\operatorname{Fr} \Phi_\Lambda = \{ v(\lambda) = |\lambda| (ch_1 + (1-c)h_2)(\arg \lambda) : c \in [0;1] \},$$

где h_1, h_2 — тригонометрически выпуклые функции (т.в.ф.).

Класс таких функций Φ_Λ является естественным обобщением класса функций вполне регулярного роста. Соответствующее множество Λ будем называть *индикаторным*. Обозначим через G_1, G_2 сопряженные диаграммы h_1, h_2. Напомним, что если G_1, G_2 — выпуклые множества, то множество

$$\alpha G_1 + \beta G_2 := \{ \alpha z_1 + \beta z_2 : z_1 \in G_1, z_2 \in G_2 \}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

также выпукло и является сопряженной диаграммой т. в. ф.

$$h(\varphi) = \alpha h_1(\varphi) + \beta h_2(\varphi),$$

где h_1, h_2 — т. в. ф., соответствующие G_1, G_2.

Теорема 0.2. *Пусть множество* Λ *— индикаторное. Тогда верны импликации:*

1. $\{\exp\Lambda$ *неполна в* $A(G)\} \Leftrightarrow \{G_1, G_2$ *свободно вкладываются в* $G\}$;

2. $\{G$ *максимальна для* $\exp\Lambda\} \Leftrightarrow \{G_1, G_2$ *вкладываются в* G*, хотя бы одна из них не вкладывается свободно*$\}$;

3. $\{\exp\Lambda$ *предельно переполнена в* $A(G)\} \Leftrightarrow \{cG_1 + (1-c)G_2$ *жестко вкладываются в* G $\forall\ c \in [0;1]\}$.

Верно соотношение

$$h_\Lambda = \max(h_1, h_2). \tag{0.5}$$

Поэтому сопряженная диаграмма G_Λ функции h_Λ является выпуклой оболочкой G_1 и G_2.

Отметим, что индикатор h_Λ не определяет полноты системы $\exp\Lambda$, если Λ не является правильным множеством, как показывает следующий пример.

Пример 0.1. Пусть

$$G_1 := \{ z = x + iy : x = 1; -1 \le y \le 1 \},$$
$$G_2 := \{ z = x + iy : x = -1; -1 \le y \le 1 \},$$

а

$$G = \{ z : |z| < 1 + \varepsilon \}.$$

Легко видеть, что G_1 и G_2 вкладываются в G свободно, т.е. $\exp\Lambda$ неполна в $A(G)$, но если Λ_1 — правильное множество, которому соответствует тот же индикатор h_Λ, то $\exp\Lambda_1$ полно в G, т.к. выпуклая оболочка G_1 и G_2 в G не вкладывается.

Пусть Λ таково, что внутренность G_Λ совпадает с G. Если Λ — правильное множество, то $\exp\Lambda$ полна в $A(G_\Lambda)$, G_Λ — максимальна для $\exp\Lambda$, которая предельно переполнена в $A(G_\Lambda)$. Если же Λ — индикаторное, то первые два утверждения,

очевидно, имеют место, но предельной переполненности может и не быть, как показывают следующие примеры.

Пример 0.2. Полагаем,

$$G_1 = \{z = x + iy : -1 \le x \le 0; y = 0\}; \qquad G_2 = \{z = x + iy : x = 1; -1 \le y \le 1\}.$$

Здесь G_Λ — треугольник, в который G_1 вкладывается свободно, а G_2 — жестко.

Пример 0.3. Полагаем,

$$G_1 = \{z = x + iy : x = -1; y \in [-1;1]\};$$
$$G_2 = \{z = x + iy : x = 1; y \in [-1;1]\}.$$

Здесь G_Λ — прямоугольник, в который G_1 и G_2 вкладываются со скольжением.

Если G_1 и G_2 жестко вкладываются в G, отсюда не следует, вообще говоря, что $cG_1 + (1-c)G_2$ жестко вкладываются при всех c.

Пример 0.4. Пусть G_1 — равносторонний треугольник, вписанный в окружность $|z| = 1$, G_2 — такой же треугольник, повернутый на $\pi/6$. Пусть $G = \{|z| < 1\}$ — единичный круг.

Легко видеть, что G_1 и G_2 — жестко вкладываются в G, но, например, $(G_1 + G_2)/2$ — это шестиугольник, свободно вложенный в G.

Пусть $G_1 \cap G_2$ — жестко вкладывается в G. Тогда $cG_1 + (1-c)G$ жестко вкладываются при всех c. Но это не является небходимым условием, как показывает следующий пример.

Пример 0.5. Пусть G — квадрат $\{z = x + iy : |x| < 1; |y| < 1\}$, G_1 — треугольник $\{x \in (-1,1); y \le -x; y \ge -1\}$, $G_2 = \{x \in [-1,1], -1 \le y \le x\}$.

Действительно, любой треугольник $cG_1 + (1-c)G_2$ жестко вкладывается в квадрат G, хотя $G_1 \cap G_2$ вкладывается свободно. Рассмотрим подробнее условия предельной переполненности в случае, когда $G_\Lambda = G$ или, что то же самое,

$$h_\Lambda(\varphi) = h_G(\varphi) \quad \forall \varphi. \tag{0.6}$$

Без ограничения общности можно считать, что h_1 и h_2 линейно независимы, иначе дело сводится к теореме 0.1.

Если, например, выполняется неравенство $h_1(\varphi) \le h_2(\varphi)$, т. е. $G_1 \subset G_2$, то предельная переполненность имеет место в том случае, когда G_1 жестко вкладывается в G_2, так как $G_1 = G_2 \cap G_1$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $g(\varphi) = |h_1 - h_2|(\varphi)$. Положим

$$\Theta_\Lambda = \{\varphi : g(\varphi) > 0\}.$$

Это открытое множество на единичной окружности (т.е. периодическое на $(-\infty, \infty)$). Обозначим через I_Λ максимальный интервал, содержащийся в Θ_Λ, а через d_Λ его длину.

Функцию $w \in U[1]$ будем называть *минимальной*, если функция $w - \varepsilon \mid \lambda \mid$ не имеет субгармонической миноранты в $U[1]$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

Например, гармонические функции вида

$$H(\lambda) = \mid \lambda \mid \big(A \cos(\arg \lambda) + B \sin(\arg \lambda)\big) \tag{0.11}$$

являются минимальными.

Множество функций вида (0.11) будем обозначать *HARM*.

Теорема 0.4. *Пусть* Λ *— периодическое множество. Верны импликации:*

1. $\{ \exp\Lambda$ *неполна в* $A(G)\} \Leftrightarrow \{Y_G v$ *существует и не минимальна*$\}$;
2. $\{G$ *максимальна для* $\exp\Lambda\} \Leftrightarrow \{Y_G v$ *— минимальна*$\}$;
3. $\{ \exp\Lambda$ *предельно переполнена в* $A(G)\} \Leftrightarrow \{ Y_G v \in HARM\}$.

Отметим, что h_Λ выражается через v равенством

$$h_\Lambda(\varphi) = \max\{ v_t(e^{i\varphi}) : 1 \le t \le e^P \}. \tag{0.12}$$

0.7. Охарактеризуем полноту $\exp\Lambda$ для периодического Λ в иных терминах. Для этого перейдем в другую систему координат, введя следующие обозначения. Положим $\lambda = e^z$, $z = x + iy$, и

$$q_\Lambda(z) = v_\Lambda(e^z)\, e^{-x}. \tag{0.13}$$

Отметим, что $q(z)$ — функция, периодическая по x с периодом P и по y с периодом 2π.

Пусть

$$m(z, G, q) = h_G(y) - q(z), \qquad D(G, \Lambda) = \{ z\colon m(z, G, q_\Lambda) > 0 \}. \tag{0.14}$$

Вследствие периодичности можно считать, что область $D(G, \Lambda)$ лежит на торе T_P, склеенном из прямоугольника $\{ x \in [0, P], y \in [0, 2\pi] \}$, и все функции также заданы на торе T_P.

Пусть

$$L_\rho = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\rho \frac{\partial}{\partial x} + \rho^2 \tag{0.15}$$

есть дифференциальный оператор, который получается, если в операторе Лапласа сделать замену функции

$$q(x, y) = v(x, y)e^{-\rho x}.$$

На торе T_P рассмотрим однородную краевую задачу вида

$$L_\rho R = 0, \quad z \in D \subset \mathrm{T}_P, \quad R\,\big|_{\partial D} = 0. \tag{0.16}$$

Обозначим через $\rho(D)$ минимальное ρ, для которого эта задача имеет нетривиальное решение.

Так как при $\rho = 0$ L_ρ — оператор Лапласа, то $\rho(D) > 0$.

Пусть $\widehat{w}(z) = w(e^{z})e^{-x}$. Если $w(\lambda)$ гармоническая в области H_w и w_t периодична относительно $\ln t$, то $\widehat{w}(z)$ удовлетворяет уравнению $L_1\widehat{w} = 0$ в соответствующей области $\widehat{H}$ на T_P.

Теорема 0.5. *Пусть существует такая область* H_w, *что для соответствующей области* $\widehat{H}$ $\rho(\widehat{H}) \le 1$. *Тогда* w — *минимальная функция.*

Примем следующее обозначение:

$$\rho(\Lambda, G) = \rho(D(\Lambda, G)).$$

Теорема 0.6. *Если* $\rho(\Lambda, G) \ge 1$, *то* $\exp\Lambda$ *полна в* G.

Авторы не знают, является ли это условие необходимым.

Рассмотрим подробнее ситуацию, в которой область G совпадает с G_Λ — с сопряженной индикаторной диаграммой h_Λ — т.е. предполагаем, что

$$h_G(\varphi) = h_\Lambda(\varphi) \quad \forall \varphi. \tag{0.17}$$

В этом случае $m(z, G, q_\Lambda) \ge 0$ и поэтому удается получить следующий критерий.

Теорема 0.7. *Для того чтобы* $\exp\Lambda$ *была полна в* G_Λ, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\rho(\Lambda, G_\Lambda) \ge 1. \tag{0.18}$$

Условие (0.17) автоматически приводит к максимальности при наличии полноты. Так как

$$h_\Lambda(y) = \max\{\, q_\Lambda(x + iy) : x \in [0, P]\,\}, \tag{0.19}$$

то функция $m(z, G_\Lambda, q_\Lambda)$ обращается в нуль по x при каждом фиксированном y.

Поэтому множество $D(G_\Lambda, \Lambda)$ не может целиком содержать никакой линии $y = \mathrm{const}$ на торе.

Теорема 0.8. *Пусть* G_0 — *строго выпуклая область и* $D_0 \subset T_P$ *таково, что* $T_P \setminus D_0$ *пересекается с каждой линией* $\{y = y_0\}$, $y_0 \in [0, 2\pi]$.

Тогда существует периодическое Λ *такое, что*

$$G_\Lambda = G_0, \qquad D(G_\Lambda, \Lambda) = D_0.$$

Пример 0.6. Пусть D_0 — дополнение к множеству

$$M = \{z = x + iy : x = f(y),\ y \in [0, 2\pi]\},$$

где $f(y)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$0 < f(y) < P \qquad \forall y.$$

Тогда $\rho(D_0) = \infty$ (см. п. 3.5), т.е. для любой строго выпуклой G_0 найдется периодическое Λ такое, что $G_\Lambda = G_0$ и $\exp\Lambda$ будет предельно переполнена в G_0.

Пример 0.7. Пусть D_0 — дополнение к множеству

$$M = \{z = x + iy : x = \frac{P}{2\pi} y, 0 \le y \le 2\pi\} .$$

Тогда, что можно проверить непосредственным вычислением (см. п. 3.5), —

$$\rho(D_0) = \frac{1}{2} \left(1 + (2\pi/P)^2\right).$$

Поэтому, выбирая P, можно реализовать с помощью теоремы 0.8 как полноту, так и неполноту $\exp\Lambda$ в $G_0 (= G_\Lambda)$ для любой строго выпуклой G_0.

0.8. Перейдем к обобщениям. Обозначим через D_G естественную область определения операции Y_G, т.е. множество тех $v \in U[1]$, для которых $m(\lambda, G, v)$ имеет субгармоническую миноранту, принадлежащую $U[1]$.

Пусть Φ_Λ определена равенством (0.1). Условие, состоящее в том, что при любом $v \in \mathrm{Fr}\,\Phi$ функция $m(\lambda, G, v)$ имеет субгармоническую миноранту, принадлежащую $U[1]$, можно выразить соотношением

$$\mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda \subset D_G . \qquad (0.20)$$

Множество $U \subset U[1]$ будем называть минимальным ($U \in MIN$), если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдется $w = w_\varepsilon \in U$ такая, при которой $w_\varepsilon - \varepsilon \mid \lambda \mid$ не имеет субгармонической миноранты, принадлежащей $U[1]$.

Отметим, что если U содержит хотя бы одну минимальную функцию, то $U \in MIN$.

Образ $\mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$ при отображении оператором Y_G будем обозначать через $J_G(\Lambda)$.

Теорема 0.9. *Верны следующие импликации:*

1. $\{\exp\Lambda$ *неполна в* $A(G)\} \Leftrightarrow \{$ *выполняется* (0.20) *и* $J_G(\Lambda) \notin MIN\}$;
2. $\{G$ *максимальна для* $\exp\Lambda\} \Leftrightarrow \{$ *выполняется* (0.20) *и* $J_G(\Lambda) \in MIN\}$;
3. $\{\exp\Lambda$ *предельно переполнена в максимальной* $G\} \Leftrightarrow \{$ *выполняется* (0.20) *и* $J_G(\Lambda) \in HARM\}$.

Порядок изложения следующий.

В § 1 мы доказываем теорему 0.9.

В § 2 из нее выводятся теоремы 0.1, 0.2, 0.3.

Параграф 3-й посвящен доказательству теорем 0.4-0.8 и разбору примеров 0.6 и 0.7.

В приложении дано доказательство теоремы Еременко–Содина, которая существенно используется в § 3.

В заключение авторы приносят благодарность И. Ф. Красичкову–Терновскому за постановку задачи, а А. Э. Еременко и М. Л. Содину — за плодотворное обсуждение и теорему V (§ 3).

Отметим, что эта статья является расширенным изложением результатов, анонсированных в [9].

§ 1. Доказательство теоремы 0.9

1.1. Обозначим через $A(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$ класс функций ψ, голоморфных в $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ и равных нулю на бесконечности.

Мы будем использовать следующую теорему А. И. Маркушевича ([1], с. 282).

Теорема II (А. И. Маркушевич). *Для того чтобы система* $\exp\Lambda$ *была полна в* $A(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\Phi(\lambda) = \int_{L_\psi} e^{\lambda z}\psi(z)dz, \tag{1.1}$$

где $\psi \in A(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$, $L_\psi \Subset G$ *— спрямляемый контур, обладала следующим свойством: из условия*

$$\Phi(\lambda_k) = 0, \quad \forall\ \lambda_k \in \Lambda \tag{1.2}$$

следует, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$.

Доказательство первой импликации в теореме 0.9.

Необходимость. Пусть $\Phi(\lambda) \not\equiv 0$ и $\Phi(\lambda_k) = 0$, $\lambda_k \in \Lambda$. Частное $g(\lambda) = \Phi(\lambda)/\Phi_\Lambda(\lambda)$ является целой функцией первого порядка и нормального типа. Полагаем,

$$u^g(\lambda) = \ln|g(\lambda)|; \quad u^\Phi(\lambda) = \ln|\Phi(\lambda)|; \quad u^\Lambda(\lambda) = \ln|\Phi_\Lambda(\lambda)|.$$

Имеем

$$u^\Phi(\lambda) \le \max\{\operatorname{Re}(\lambda z) : z \in L_\psi\} + C_\psi,$$

где C_ψ — постоянная, зависящая, возможно, от ψ.

Отсюда следует, что

$$u^\Phi(\lambda) \le h_{G_1}(\varphi)r + C_\psi, \qquad \lambda = re^{i\varphi}, \tag{1.3}$$

для некоторой области $G_1 \Subset G$.

Пусть $v \in \operatorname{Fr}\Phi_\Lambda$. Выбираем последовательность, для которой $(u^\Lambda)_{t_j} \to v$, а последовательности $(u^\Phi)_{t_j}$ и $(u^g)_{t_j}$ также сходятся соответственно к v^Φ и v^g. Из равенства

$$u^g(\lambda) = u^\Phi(\lambda) - u^\Lambda(\lambda)$$

получаем

$$v^g(\lambda) = v^\Phi(\lambda) - v(\lambda),$$

где $v^g \in \operatorname{Fr} g$, $v^\Phi \in \operatorname{Fr}\Phi$.

Так как из (1.3) следует, что $v^\Phi(\lambda) \le h_{G_1}(\varphi)r$, то

$$v^g(\lambda) \le h_{G_1}(\varphi)r - v(\lambda) \tag{1.4}$$

и, значит, для любой $v \in \mathrm{Fr}\Phi_\Lambda$ существует $Y_{G_1}v$, а следовательно, и $Y_G v$, т. е. выполняется условие (0.20).

Покажем, что выполняется условие $J_G(\Lambda) \notin MIN$. Имеем для некоторого $\delta > 0$ соотношение

$$h_{G_1}(\varphi) - h_G(\varphi) \le -\delta.$$

Из (1.4) получаем, что

$$v^g(\lambda) + \delta r \le m(\lambda, G, v). \tag{1.5}$$

Левая часть (1.5) принадлежит $U[1]$, поэтому $w_v := Y_{G_1}v$ удовлетворяет условию

$$v^g(\lambda) + \delta r \le w_v(\lambda)$$

для любой $v \in \mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$, а это означает, что $J_G(\Lambda) \notin MIN$.

Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности будем использовать следующее утверждение, сообщенное нам И. Ф. Красичковым-Терновским.

Теорема III (И. Ф. Красичков-Терновский). *Пусть существует такая целая функция g, что*

$$h_{g\Phi_\Lambda}(\varphi) < h_G(\varphi) \qquad \forall \varphi. \tag{1.6}$$

Тогда система $\exp\Lambda$ *неполна в $A(G_1)$ для некоторой выпуклой области $G_1 \Subset G$.*

Доказательство. Пусть $g(\lambda)$ такова, что выполняется (1.6). Обозначим через $\psi(z)$ преобразование Бореля для $\Phi(\lambda) = g(\lambda)\Phi_\Lambda(\lambda)$. По теореме Пойа (см., напр., [1], с. 113) особенности ψ содержатся в выпуклой области G_Φ — в сопряженной диаграмме $h_\Phi(\varphi)$. Поэтому для $\Phi(\lambda)$ верно представление (1.1), в котором L_ψ — любой контур, охватывающий G_Φ. Так как $G_\Phi \Subset G$, то можно выбрать $G_\Phi \Subset L_\psi \Subset G$. Так как для $\Phi(\lambda)$ выполняется условие (1.2) и $\Phi(\lambda) \not\equiv 0$, то по теореме II $\exp\Lambda$ неполна в $A(G_1)$, где $L_\psi \Subset G_1 \Subset G$, ч.т.д.

Достаточность в первой импликации. Из условия $J_G(\Lambda) \notin MIN$ следует, что можно так выбрать $\delta > 0$, чтобы для всех $v \in \mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$ функции $w_v - \delta r$, где $w_v := Y_G v$, имели субгармонические миноранты. Пусть $\gamma < 2\delta$ выбрано так, что

$$h_G(\varphi) - \gamma > 0 \qquad \forall \varphi,$$

а $G_1 \Subset G$ удовлетворяет условию

$$h_{G_1}(\varphi) - \gamma/3 > 0, \quad h_G(\varphi) - h_{G_1}(\varphi) \le \gamma/2. \tag{1.7}$$

Проверим, что

$$D_{G_1} \supset \mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda. \tag{1.8}$$

Действительно, для $v \in \mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} m(\lambda, G_1, v) := h_{G_1}(\varphi)r - v(\lambda) \geq h_G(\varphi)r - \frac{\gamma}{2}r - v(\lambda) \geq \\ \geq h_G(\varphi) - v(\lambda) - \delta r \geq w_v - \delta r. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Так как правая часть (1.9) имеет субгармоническую миноранту из $U[1]$, то (1.8) доказано.

1.2. Для продолжения доказательства необходимо сделать некоторое отступление.

Пусть Φ — целая функция порядка ρ и нормального типа $\left(\Phi \in A(\rho)\right)$ и H — заданная ρ- т. в. ф. Функция $g \in A(\rho)$ называется *H-мультипликатором* Φ, если

$$h_{g\Phi}(\varphi) \leq H(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \tag{1.10}$$

Определим оператор $Y_H v$ для $v \in U[\rho]$ как максимальную субгармоническую миноранту функции

$$m(\lambda, H, v) = H(\varphi)\, r^\rho - v(\lambda)\,, \qquad \lambda = r\, e^{i\varphi},$$

принадлежащую $U[\rho]$.

Обозначим через D_H область определения Y_H. Будем называть H-мультипликатор g *дополняющим*, если $\forall\, v \in \mathrm{Fr}\,\Phi$ и $v + Y_H v \in \mathrm{Fr}(g\Phi)$. В работе [10] доказана следующая теорема.

Теорема IV (В. С. Азарин). *Для того чтобы $\Phi \in A(\rho)$ имела дополняющий мультипликатор, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\mathrm{Fr}\,\Phi \subset D_H. \tag{1.11}$$

Отметим, что условие (1.11) при $\rho = 1$ переходит в (0.20), где G — область, для которой $H(-\varphi)$ является опорной функцией.

Возвратимся к доказательству первой импликации в теореме 0.9.

Из условия (1.8) и теоремы IV следует, что существует целая функция $g(z) \in A(1)$ такая, что

$$h_{g\Phi_\Lambda}(\varphi) \leq h_{G_1}(\varphi) < h_G(\varphi) \qquad \forall\, \varphi\,.$$

Отсюда по теореме III следует, что система $\exp\Lambda$ неполна в $G_1 \Subset G$, что и доказывает достаточность в первой импликации.

1.3. Доказательство второй импликации в теореме 0.9.

Необходимость. Пусть G_j, $j = \overline{1,\infty}$ — последовательность выпуклых областей, удовлетворяющих условиям $G_j \Supset G$, $dist\,(\partial G_j, \partial G) \to 0$, где

$$dist\,(A, B) = \sup_{\lambda_1 \in A}\, \inf_{\lambda_2 \in B} |\lambda_1 - \lambda_2|\,.$$

Так как $\exp\Lambda$ неполна в каждом $A(G_j)$, то по первой импликации

$$D_{G_j} \supset \operatorname{Fr}\Phi_\Lambda.$$

Последовательность функций $w_j = Y_{G_j} v$ удовлетворяет условиям:

$$w_j(\lambda) \le h_{G_j}(\varphi) r - v(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Так как $\{ w_j \}$ компактна, а $h_{G_j} \to h_G$, то можно выделить из $\{ w_j \}$ подпоследовательность, имеющую предел $w \in U[\rho]$, причем

$$w(\lambda) \le h_G(\varphi) r - v(\lambda).$$

Значит, существует $Y_G v$.

Если бы не выполнялось $J_G \in MIN$, то $\exp\Lambda$ по первой импликации была бы неполна в $A(G_1)$ для некоторого $G_1 \Subset G$, а это противоречило бы максимальности G. Необходимость доказана.

Достаточность во второй импликации. Полнота $\exp\Lambda$ в $A(G)$ следует из первой импликации. Покажем, что $\exp\Lambda$ неполна в $A(G_1)$ для любой $G_1 \Supset G$. По условию $D_G \supset \operatorname{Fr}\Phi_\Lambda$. Полагаем,

$$\delta = \min_\varphi \left[h_{G_1}(\varphi) - h_G(\varphi) \right] > 0.$$

Тогда $\forall v \in \operatorname{Fr}\Phi_\Lambda$

$$Y_G v + \delta r \le h_{G_1}(\varphi) r - v(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Это означает, что $Y_{G_1} v \ge Y_G v + \delta r$. Следовательно, $J_{G_1}(\Lambda) \notin MIN$ и по первой импликации $\exp\Lambda$ неполна в $A(G_1)$.

Доказательство третьей импликации в теореме 0.9.

Необходимость. Из максимальности G по второй импликации следует (0.20). Докажем, что $Y_G v \in HARM$, $v \in \operatorname{Fr}$. Пусть это не выполняется, т.е. найдется $v_0 \in \operatorname{Fr}\Phi_\Lambda$ такая, что распределение масс ν_0 функции $Y_G v_0 = w_0$ не равно тождественно нулю.

По теореме IV существует мультипликатор $g(\lambda)$ такой, что $v_0 + w_0 \in \operatorname{Fr}(g\Phi_\Lambda)$. При этом $w_0 \in \operatorname{Fr} g$, а $\nu_0 \in \operatorname{Fr}\Lambda_0$, где Λ_0 — множество нулей g, причем $\overline{\Delta}_{\Lambda_0} > 0$, т.к. $\nu_0 \not\equiv 0$.

Слегка сместив нули g, можно без ограничения общности считать, что они некратны и $\Lambda_0 \cap \Lambda = \varnothing$.

Условие для мультипликатора g дает неравенство

$$h_{g\Phi_\Lambda}(\varphi) \le h_G(\varphi).$$

Отсюда следует, что

$$m(\lambda, G, v) = h_G(\varphi)r - v_\Phi(\lambda) \ge 0$$

для всех $v_\Phi \in \mathrm{Fr}(g\Phi_\Lambda)$.

Это означает, что $m(\lambda, G, v_\Phi)$ имеет нулевую миноранту $\forall\, v_\Phi \in \mathrm{Fr}(g\Phi_\Lambda)$, т.е.

$$D_G \supset \mathrm{Fr}(g\Phi_\Lambda).$$

Таким образом, мы пришли к тому, что область G осталась максимальной несмотря на замену системы $\exp\Lambda$ системой $\exp(\Lambda \cup \Lambda_0)$, а это противоречит предельной переполненности. Значит, $\nu_0 \equiv 0$ и $w_0 = Y_G v_0 \in HARM$. Необходимость доказана.

Достаточность в третьей импликации. Пусть выполнено условие $Y_G v \in HARM \quad \forall\, v \in \mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda$. Допустим, что существует Λ_0 такое, что $\overline{\Delta}_{\Lambda_0} > 0$ и G является максимальной для системы $\exp(\Lambda \cup \Lambda_0)$.

Из второй импликации в теореме 0.9 следует, что

$$D_G \supset \mathrm{Fr}\,\Phi_{\Lambda_1}, \tag{1.12}$$

где $\Lambda_1 = \Lambda \cup \Lambda_0$.

Для любого $v_0 \in \mathrm{Fr}\Phi_{\Lambda_0}$ найдется $v \in \mathrm{Fr}\Phi_\Lambda$ такое, что

$$v_1 := v + v_0 \in \mathrm{Fr}\Phi_{\Lambda_1}.$$

Из условия $\overline{\Delta}_{\Lambda_0} > 0$ следует, что можно выбрать v_0, для которого мера Рисса $\nu_0 \not\equiv 0$. Из (1.12) для $w_1 = Y_G v_1$ имеем неравенство $w_1 \le h_G r - v_1$, откуда получаем

$$w_1 + v_0 \le h_G r - v.$$

Следовательно, $w_v := Y_G v$ удовлетворяет неравенству

$$(w_1 + v_0)(\lambda) \le w_v(\lambda). \tag{1.13}$$

Покажем, что (1.13) невозможно. Действительно, поскольку $w_v \in HARM$, то $w := w_1 + v_0 - w_v \le 0$ и $w \in U[\rho]$. Поэтому $w \equiv 0$. Но мера Рисса $\nu_w \ge \nu_0 \not\equiv 0$, значит $w \not\equiv 0$. Это противоречие и завершает доказательство достаточности в третьей импликации. Теорема 0.9 доказана полностью.

§ 2. Доказательства теорем 0.1, 0.2, 0.3

2.1. Правильность Λ означает, что $\mathrm{Fr}\,\Phi_\Lambda = \{v_0\}$, где $v_0 = h_\Lambda r$. Поэтому $J_G(\Lambda) = \{Y_G v_0\}$ и утверждения теоремы 0.1 непосредственно следуют из теоремы 0.9 и из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $v = h_1(\varphi)r$ *и* G_1 — *сопряженная диаграмма* h_1. *Тогда верны импликации:*

$\{G_1$ — *свободно вкладывается в* $G\} \Leftrightarrow \{Y_G v$ — *не минимальна* $\}$;
$\{G_1$ — *вкладывается не свободно в* $G\} \Leftrightarrow \{Y_G v$ — *минимальна* $\}$;
$\{G_1$ — *вкладывается жестко в* $G\} \Leftrightarrow \{Y_G v \in HARM\}$;
$\{G_1$ — *не вкладывается в* $G\} \Leftrightarrow \{Y_G v$ *не существует* $\}$.

Для доказательства этой леммы нам понадобятся еще две.

Лемма 2.2. *Пусть* $v = h(\varphi)r$. *Тогда* $Y_G v = h_1 r$, *где* h_1 — *максимальная тригонометрически выпуклая миноранта функции*

$$m(\varphi, G, h) = h_G(\varphi) - h(\varphi).$$

Доказательство. Пусть $v_1 = Y_G v$. Так как $v_t = v$, то

$$(v_1)_t = Y_G v_t = Y_G v.$$

Поэтому $\left(\sup\limits_t v_{1t}\right)^* \geq v_1$ и также является субгармонической минорантой, принадлежащей $U[1]$. Поэтому $v_1 = \left(\sup\limits_t v_{1t}\right)^*$. Но функция $\left(\sup\limits_t v_{1t}\right)^*$ инвариантна относительно преобразования $(\cdot)_t$ и, следовательно, имеет вид $h_1(\varphi)r$. Максимальность $h_1(\varphi)$ следует из максимальности v_1, ч.т.д.

Лемма 2.3. *Для того чтобы* $v = h_1 r$ *была минимальной функцией, необходимо и достаточно, чтобы* G_1 — *сопряженная индикаторная диаграмма* h_1 — *была отрезком (в частности, точкой).*

Доказательство. Пусть $v = h_1 r$ — минимальная и G_1 — сопряженная диаграмма h_1. Если G_1 — не отрезок, то она содержит некоторый круг радиуса $\delta > 0$, а значит, найдется тригонометрическая функция $A\cos(\varphi - \varphi_0)$ такая, что

$$\delta + A\cos(\varphi - \varphi_0) \leq h_1(\varphi).$$

Умножая это соотношение на r, получаем, что $v - \delta r$ имеет субгармоническую миноранту, а это противоречит минимальности.

Обратно, пусть v не минимальна. Тогда найдется $h_2(\varphi)$, для которой

$$h_2(\varphi) \leq h_1(\varphi) - \delta. \tag{2.1}$$

Для любой т.в.ф. $h_2(\varphi)$ найдется тригонометрическая функция $A\cos(\varphi - \varphi_0)$ такая, что

$$h_2(\varphi) + A\cos(\varphi - \varphi_0) \geq 0. \tag{2.2}$$

Это соответствует такому смещению индикаторной диаграммы, при котором она содержала бы 0.

Поэтому, из (2.1) и (2.2) имеем

$$\delta - A\cos(\varphi - \varphi_1) \le h_1(\varphi).$$

Это означает, что G_1 содержит некоторый круг радиуса $\delta > 0$, т.е. не является отрезком, ч.т.д.

Доказательство леммы 2.1. Свободное вложение G_1 в G эквивалентно тому, что найдутся такие $\delta > 0$ и тригонометрическая функция $A\cos(\varphi - \varphi_0)$, при которых выполнится неравенство

$$h_1(\varphi) + \delta - A\cos(\varphi - \varphi_0) \le h_G(\varphi). \tag{2.3}$$

Пусть $Y_G v$ не минимальна. По лемме 2.2 она имеет вид $w_2 = h_2 r$, где $h_2(\varphi)$ — максимальная тригонометрически выпуклая (т.в.) миноранта $m(\varphi, G, h_1)$. Найдется такая $\delta > 0$, что функция $w_2 - \delta r$ будет иметь максимальную субгармоническую (с.г.) миноранту $v_3 = h_3(\varphi)r$. Пусть $A\cos(\varphi - \varphi_0)$ — тригонометрическая функция, для которой

$$h_3(\varphi) + A\cos(\varphi - \varphi_0) \ge 0.$$

Кроме того,

$$h_3(\varphi) \le h_2(\varphi) - \delta, \quad h_2(\varphi) \le h_G(\varphi) - h_1(\varphi),$$

откуда получаем неравенство (2.3), т.е. первую импликацию. Обратно, пусть G_1 свободно вкладывается в G. Из (2.3) следует, что

$$\delta - A\cos(\varphi - \varphi_0) \le h_G(\varphi) - h_1(\varphi). \tag{2.4}$$

Умножая (2.4) на r, получаем, что $m(\lambda, G, v)$ имеет миноранту $v_0 := r(\delta - A\cos(\varphi - \varphi_0))$, которая, очевидно, не является минимальной. Следовательно, и $Y_G v$ — не минимальна.

Вложение G_1 в G со скольжением означает, что не существует $\delta > 0$, для которой выполняется неравенство (2.3), но существует отрезок с опорной функцией

$$E(\varphi) = B\,|\sin\varphi| + A\cos(\varphi - \varphi_0),$$

такой, что выполняется неравенство

$$h_1(\varphi) + E(\varphi) \le h_G(\varphi). \tag{2.5}$$

Пусть $Y_G v$ — минимальная функция. По лемме 2.2 она имеет вид $w_2 = h_2 r$, а по лемме 2.3 $h_2 = E(\varphi)$. Поэтому $E(\varphi) \le \left(h_G - h_1\right)(\varphi)$, что эквивалентно (2.5).

Обратно, пусть вложение не свободно и, значит, возможно лишь (2.5). Если бы $Y_G v$ была не минимальна, то из этого следовало бы (2.3) по доказанному выше, что противоречило бы предположению.

Жесткое вложение эквивалентно лишь неравенству вида

$$h_1(\varphi) - A\cos(\varphi - \varphi_0) \le h_G(\varphi),$$

а невозможность вложения — невозможности даже такого неравенства.

Поэтому остальные утверждения леммы разбираются аналогично.

2.2. Для доказательства теоремы 0.2 нам понадобится дополнительно следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть* Λ — *индикаторное множество,* $v_1 = h_1 r$, $v_2 = h_2 r$. *Тогда верны импликации*

$$\{J_G(\Lambda) \notin MIN\} \Leftrightarrow \{Y_G v_1 \text{ и } Y_G v_2 \text{ — не минимальны}\}.$$

Доказательство. Пусть $w_1 = Y_G v_1$ и $w_2 = Y_G v_2$ — не минимальны, т.е. $w_1 - \delta r$ и $w_2 - \delta r$ имеют с.г. миноранты g_1 и g_2.

Тогда $cg_1 + (1-c)g_2$ — миноранта функции $cw_1 + (1-c)w_2 - \delta r$, т.е. $J_G(\Lambda) \notin MIN$. Противоположная импликация тривиальна.

Доказательство теоремы 0.2. Пусть expΛ неполна. По теореме 0.9 $J_G(\Lambda) \notin MIN$. По лемме 2.4 $Y_G v_1$ и $Y_G v_2$ — не минимальны, следовательно, по лемме 2.1 G_1 и G_2 свободно вкладываются в G. Так как каждое из приведенных утверждений обратимо, то верна и противоположная импликация в формулировке теоремы. Аналогично проводятся рассуждения и для остальных случаев.

2.3. Для доказательства теоремы 0.3 нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма I (Б. Я. Левин). *Пусть* φ_0 — *точка максимума* т.в. *функции* $h(\varphi)$ *и* $h(\varphi_0) \ge 0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$h(\varphi) \ge h(\varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0), \qquad |\varphi - \varphi_0| \le \pi/2. \tag{2.6}$$

Доказательство приводится в монографии ([1], с. 78).

Лемма 2.5. *Пусть* $H(\varphi)$ — *тригонометрическая функция на интервале* $I = (\alpha,\beta)$, *длина которого* $\le \pi$, *и* $H(\varphi) = 0$ *в одном из концов интервала. Тогда любое из условий*

1. $H(\varphi_0) = 0$, $\quad \varphi_0 \in (\alpha,\beta)$, *или*

2. $H(\varphi)$ *обращается на* ∂I *в нуль с касанием*

влечет за собой $H(\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in I$.

Доказательство. Пусть $H(\alpha) = 0$. Тогда $H(\varphi) = A\sin(\varphi - \alpha)$. Соблюдение любого из этих двух условий, очевидно, приводит к равенству $A = 0$, т.е. к утверждению леммы.

Лемма 2.6. *Пусть* $g(\varphi) \ge 0$ — *непрерывная периодическая функция, и* Θ_Λ, I_Λ, d_Λ *определены так же, как и в теореме 0.3. Для того чтобы ее максимальная т.в.*

миноранта была тригонометрической, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий:

1. $d_\Lambda < \pi$ *или*

2. $d_\Lambda = \pi$ и $g(\varphi)$ *на* ∂I_Λ *обращается в нуль с касанием.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $d_\Lambda > \pi$. Без ограничения общности считаем, что $I_\Lambda = (-\alpha,\alpha)$, где $\alpha > \pi/2$.

Полагаем, $\cos^+\varphi = \max(\cos\varphi, 0)$,

$$a = \inf\left\{\frac{g(\varphi)}{(\cos\varphi)^+} : \varphi \in (-\alpha,\alpha)\right\}, \tag{2.7}$$

имеем $a > 0$.

Полагаем,

$$h(\varphi) = \begin{cases} a\cos\varphi & |\varphi| \le \pi/2 \\ 0 & |\varphi| > \pi/2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Функция $h(\varphi)$ — т.в. миноранта $g(\varphi)$ и не является тригонометрической функцией, что противоречит предположению. Значит, $d_\Lambda \le \pi$.

Пусть $d_\Lambda = \pi$ и не выполняется условие касания на ∂I_Λ. Снова для a, определенного равенством (2.7), выполняется условие $a > 0$ и $h(\varphi)$, определенная формулой (2.8), является не тригонометрической минорантой $g(\varphi)$, что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть выполняется первое условие и $I = (\alpha,\beta)$ — произвольный интервал, принадлежащий Θ_Λ; $h(\varphi)$ — максимальная т.в. миноранта $g(\varphi)$.

Полагаем,

$$H(\varphi) = h(\varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0),$$

где φ_0 — точка максимума $h(\varphi)$ на I. Из неравенства (2.6) леммы I и условий $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ следует, что $H(\alpha) = H(\beta) = 0$. Тогда согласно лемме 2.5 получаем, что $H(\varphi) \equiv 0$. Значит, $h(\varphi_0) = 0$ и $h(\varphi) \equiv 0$ для $\varphi \in (\alpha,\beta)$, т.е. функция $h(\varphi)$ — тригонометрическая.

Пусть выполняется второе условие. Из леммы I, как и в предыдущем случае, следует, что $H(\varphi)$ обращается в нуль на ∂I_Λ с касанием. Отсюда по лемме 2.5 получаем, как и выше, что $h(\varphi) \equiv 0$, ч.т.д.

Доказательство теоремы 0.3.

Необходимость. Отметим, что если $v \in \mathrm{Fr}\Phi_\Lambda$, то для $c \in [0,1]$ имеем равенство

$$m(\lambda, G, v) = \left(c(h_2 - h_1)^+ + (1-c)(h_2 - h_1)^-\right)(\varphi)r := m(\varphi, c)r. \tag{2.9}$$

Пусть $\exp\Lambda$ предельно переполнена в $A(G)$. По теореме 0.9 $J_G(\Lambda) \subset HARM$, т.е. при любом $c \in [0,1]$ максимальная т.в. миноранта функции $m(\varphi, c)$ — тригонометрическая. Так как $\forall\, c \in [0,1]$ (например, $c = 1/2$)

$$\Theta_\Lambda = \{\varphi : m(\varphi, c) > 0\},$$

то необходимость утверждения теоремы следует из леммы 2.6.

Достаточность. Так как $\forall\, c \in [0,1]$

$$\Theta_\Lambda \supset \{\varphi : m(\varphi, c) > 0\},$$

то из леммы 2.6 следует, что все $m(\varphi, c)$ имеют лишь тригонометрические (фактически — нулевые) миноранты и, значит, $J_G(\Lambda) \subset HARM$. По теореме 0.9 система $\exp\Lambda$ предельно переполнена в $A(G)$.

§ 3. Доказательства теорем 0.4-0.8

3.1. Для доказательства теоремы 0.4 нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.1. *Верны соотношения*

$$\left(Y_G v\right)_t = Y_G v_t, \quad t > 0.$$

Доказательство. Так как $w = Y_G v$ является субгармонической (с.г.) минорантой $m(\lambda, G, v)$, то, очевидно, $w_t = \left(Y_G v\right)_t$ является с.г. минорантой $m(\cdot, G, v_t)$. Значит,

$$Y_G v_t \geq \left(Y_G v\right)_t, \quad t > 0. \tag{3.1}$$

Положим в (3.1) $v := v_{t^{-1}}$. Имеем

$$Y_G v \geq \left(Y_G (v_{t^{-1}})\right)_t,$$

откуда

$$\left(Y_G v\right)_{t^{-1}} \geq Y_G v_{t^{-1}}. \tag{3.2}$$

Полагая в (3.2) $t^{-1} := t$, получаем

$$\left(Y_G v\right)_t \geq Y_G v_t. \tag{3.3}$$

Из (3.3) и (3.1) получаем утверждение леммы.

Положим для $I \subset (0,\infty)$

$$S_I[w] = \{ w_t : t \in I \}.$$

Лемма 3.2. *Если $w \in U[1]$ не минимальна, то $S_I[w] \notin MIN$.*

Доказательство. Если w_1 — с.г. миноранта $w - \delta r$, то $(w_1)_t$ — с.г. миноранта $w_t - \delta r$, ч.т.д.

Доказательство теоремы 0.4. По лемме 3.1 для $I = [1, e^P]$

$$J_G(\Lambda) = S_I\left[Y_G v\right]. \tag{3.4}$$

Поэтому из леммы 3.2 следует, что $J_G(\Lambda) \notin MIN$ тогда и только тогда, когда $Y_G v$ не является минимальной функцией. Отсюда с помощью теоремы 0.9 следуют первые две эквивалентности теоремы 0.4.

Пусть $J_G(\Lambda) \subset HARM$. Следовательно, $Y_G v = H_0(\varphi)r$, где $H_0(\varphi)$ — тригонометрическая функция. Обратно, по лемме 3.1 имеем

$$J_G(\Lambda) = \{H_0(\varphi)r\}.$$

3.2. Для дальнейшего нам понадобится ряд новых обозначений и предложений.

Полагаем,

$$L_\rho = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\rho\frac{\partial}{\partial x} + \rho^2. \tag{3.5}$$

Будем рассматривать функции $\varphi(x, y)$, периодические по y и фиксированного периода P по x, и писать $(x, y) \in \mathrm{T}_P$ (или просто Т), считая, что они заданы на торе.

Пространство основных функций будем обозначать $D(\mathrm{T})$, обобщенных — $D'(\mathrm{T})$.

Отметим, что в качестве основных функций можно брать функции, финитные вне окрестности, умещающейся в прямоугольник периодов.

Определение. *Полунепрерывную на* Т *функцию* $\hat{v}(x, y)$, *удовлетворяющую в* $D'(\mathrm{T})$ *условию*

$$L_1\hat{v} \geq 0,$$

будем называть L-субфункцией (или просто субфункцией).

Если

$$L_1\hat{v} = 0,$$

то будем говорить, что $\hat{v}$ *является L-функцией в соответствующей области по аналогии с тригонометрической или гармонической функциями.*

Следующее утверждение легко проверяется.

Лемма 3.3. *Если* w_t *периодична относительно* $\ln t$ *и субгармонична, то соответствие*

$$\hat{w}(x, y) = w(e^z)e^{-x} \tag{3.6}$$

переводит w *в L-субфункцию* $\hat{w}$, *а обратное соответствие*

$$w(r\,e^{i\varphi}) = \hat{w}(\ln r, \varphi)r \tag{3.7}$$

переводит L-субфункцию $\hat{w}$ *в субгармоническую функцию* $w(\lambda)$, *для которой*

$$w_{te^P}(\lambda) = w_t(\lambda). \tag{3.8}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\rho R = 0, \qquad R\,\big|_{\partial D} = 0, \tag{3.9}$$

где D - область на торе Т, а R ограничена.

Лемма 3.4. *При $\rho = 0$ краевая задача* (3.9) *имеет лишь тривиальное решение.*

Это очевидно, т.к. оператор L_0 — это оператор Лапласа, а гармоническая ограниченная функция в полосе однозначно определяется краевыми значениями.

Полагаем, что $\rho(D)$ является наименьшим собственным значением краевой задачи (3.9). Оно может быть равно и $+\infty$. Функция $\rho(D)$ является строго монотонной функцией области D в следующем смысле: исключение любой внутренней точки строго увеличивает $\rho(D)$ ($\neq \infty$).

Обозначим

$$\Pi^+ = \{(x, y) \in \mathrm{T} : 0 < y < \pi\}.$$

Определение. *Субфункция $\hat{w}$ называется минимальной, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ не существует субфункции $\hat{g}$, минорирующей $\hat{w} - \varepsilon$.*

3.3. Теорема 3.7. *Пусть $\rho(D) \geq 1$. Тогда $\rho(\mathrm{T}\backslash D) < 1$, если $D \neq \Pi^+$.*

Для доказательства используем следующее утверждение, первоначально доказанное Еременко А. Э. и Содиным М. Л. (доказательство см. в приложении).

Теорема V. *Пусть Γ — жорданова кривая, проходящая через 0 и ∞, $T\Gamma = \Gamma$ для некоторого $T > 1$. Пусть D_+, D_- — области, на которые Γ делит плоскость, ρ_1, ρ_2 — порядки минимальных гармонических функций в D_+ и D_- соответственно. Тогда*

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \leq 2,$$

причем равенство достигается лишь тогда, когда Γ состоит из двух лучей.

Доказательство теоремы 3.7. Можно считать без ограничения общности, что D односвязна. Пусть $\rho_1 = \rho(D)$, $q_1(z)$ — решение краевой задачи (3.9), $\rho_2 = \rho(\mathrm{T}\backslash D)$, $q_2(z)$ — решение соответствующей краевой задачи. Тогда образ границы области при отображении $\lambda = e^z$ (обозначим его Γ) удовлетворяет условию теоремы V, а функции $v_1(\lambda) = q_1(\ln\lambda)\,|\,\lambda\,|^{\rho_1}$ и $v_2(\lambda) = q_2(\ln\lambda)\,|\,\lambda\,|^{\rho_2}$ — положительные гармонические функции в D_+ и D_-, порядки которых соответственно равны ρ_1 и ρ_2. По теореме V получаем, что

$$\frac{1}{\rho(D)} + \frac{1}{\rho(\mathrm{T}/D)} \leq 2,$$

причем равенство возможно лишь в том случае, если Γ — это пара лучей, т.е. $D = \Pi^+$, ч.т.д.

Лемма 3.8. *L-субфункция не может достигать нулевого максимума, если она* $\not\equiv 0$.

Доказательство. Пусть L - субфункция $r(z)$ достигает нулевого максимума в точке z_0. Тогда субгармоническая функция $r(z)\,e^x$ достигает нулевого максимума в той же точке, что невозможно.

Лемма 3.9. *Если $r(z)$ – L-функция в области Ω, для которой $\rho(\Omega) \le 1$, и L- субфункция в T, то она минимальна.*

Доказательство. Пусть не так, т.е. для некоторого ε $r(z) - \varepsilon$ имеет субминоранту r_1. Рассмотрим область $\Omega_1 \Subset \Omega$ и соответствующую собственную функцию $H(z)$, такие, что $\rho(\Omega_1) = 1$.

Полагаем,

$$r_0(z) = \begin{cases} AH(z), & z \in \Omega_1 \\ 0, & z \notin \Omega_1 . \end{cases}$$

Выберем A так, чтобы выполнялись условия

$$(r_1 - r - r_0)(z) \le 0, \qquad z \in \Omega_1 ; \qquad (r_1 - r - r_0)(z_0) = 0$$

в некоторой точке $z_0 \in \Omega_1$.

Это возможно, так как $r_1 - r \le -\varepsilon$, а $r_0(z) = 0$ на $\partial\Omega_1$. Тогда функция $r_1 - r - r_0$ является L- субфункцией в Ω_1 и достигает нулевого максимума в z_0, что противоречит лемме 3.8.

Лемма 3.10. *Пусть $r(z)$ – L-субфункция и $D^+ = \{ z : r(z) > 0 \}$. Тогда $\rho(D^+) \le 1$.*

Доказательство. Допустим, что $\rho(D^+) > 1$. Выберем область $D_0 \supset D^+$, для которой $\rho(D_0) = 1$. Пусть $R(z)$ — соответствующее решение однородной задачи (3.9). Выберем A так, чтобы выполнялись условия

$$AR(z) \ge r(z), \qquad z \in D_0, \qquad AR(z_0) = r(z_0)$$

для некоторого $z_0 \in D_0$.

Функция $r(z) - AR(z)$ является L-субфункцией в области D_0 и достигает нулевого максимума в точке z_0, что противоречит лемме 3.8. Следовательно, $\rho(D^+) \le 1$.

Замечание: то же рассуждение показывает, что если $\rho(D^+) = 1$, то $r(z) = AR(z)$, $z \in D^+$.

Лемма 3.11 (принцип максимума). *Пусть $\rho(D) > 1$. Если $r(z) \le 0$, $z \in \partial D$, то $r(z) \le 0$, $z \in D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $r(z_0) > 0$. Положим $D^+ = \{ z : r(z) > 0 \}$. По лемме 3.10 $\rho(D^+) \le 1$, но так как $D^+ \subset D$, то $\rho(D^+) > 1$, что приводит к противоречию.

Доказательство теоремы 0.5 непосредственно следует из леммы 3.9.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 0.6. Пусть $\rho(\Lambda, G) \ge 1$. Допустим, $w_v = Y_G v$ существует. По условию, $\hat{w}_v \le 0$, $z \in \partial D(G, \Lambda)$. Если $\rho(\Lambda, G) > 1$, то по лемме 3.11 $\hat{w}_v \le 0$ для $z \in D(G, \Lambda)$. Кроме того, $\hat{w}_v(z) \le 0$ для $\mathrm{T}/D(G, \Lambda)$ по условию. Поэтому $\hat{w}_v(z) \equiv 0$, т.е. $\hat{w}$ — минимальная функция. Если $\rho(\Lambda, G) = 1$, то по замечанию к лемме 3.10 $\hat{w}_v = AR(z)$, откуда по лемме 3.9 $\hat{w}_v$ — минимальная функция, ч.т.д.

3.4. Переходим к доказательству теоремы 0.7. Достаточность следует из теоремы 0.6. Для доказательства необходимости нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

Пусть D — область на торе, для которой $\rho(D) > 1$. Обозначим через $G(x, y, \xi, \eta)$ функцию Грина оператора L_1 для этой области и рассмотрим потенциал

$$\Pi(x, y) = -\int_D G(x, y, \xi, \eta)\, \nu(d\xi d\eta).$$

Потенциал Π является L-субфункцией, если ν — мера.

Лемма 3.12. *Пусть Γ — гладкая кривая на торе T, разделяющая его на две односвязные области D_1 и D_2. Пусть q_1 и q_2 являются L-функциями в окрестности $V(\Gamma)$ кривой Γ, определенные со стороны соответственно D_1 и D_2. Тогда, если*

$$q = \begin{cases} q_1 & z \in D_1 \cap V(\Gamma) \\ q_2 & z \in D_2 \cap V(\Gamma), \end{cases}$$

то

$$L_1 q = \left(\frac{\partial q_1}{\partial n_1} - \frac{\partial q_2}{\partial n_2} \right) \delta_\Gamma, \qquad z \in V(\Gamma),$$

где $\frac{\partial}{\partial n_1}, \frac{\partial}{\partial n_2}$ — производные по нормали в D_1 и D_2, а δ_Γ — дельта-функция, сосредоточенная на Γ.

Доказательство проводится стандартно с помощью формулы Грина и мы на нем не останавливаемся.

Лемма 3.13. *Пусть q_D — собственная функция краевой задачи (3.9) в области D с гладкой границей. Тогда*

$$\frac{\partial q_D}{\partial n} > 0, \qquad \forall\, z \in \partial D.$$

Эта лемма следует из аналогичного утверждения для гармонических функций, но может быть доказана и независимо.

Доказательство теоремы 0.7.

Необходимость. Пусть $\rho(\Lambda, G_\Lambda) < 1$. Покажем, что $\exp\Lambda$ неполна.

Для этого построим L - миноранту $m(z, G_\Lambda, \Lambda)$ и покажем, что эта миноранта не минимальна.

Пусть $D_0 \Subset D(G_\Lambda, \Lambda)$ — область с гладкой границей, для которой $\rho(D_0) = 1$. Пусть $\widehat{w}_0$ — собственная функция задачи (3.9) при $\rho = 1$, удовлетворяющая условию

$$0 < \max\{\widehat{w}_0(z) : z \in D_0\} \le \min\{m(z, G_\Lambda, \Lambda) : z \in D_0\} - 2\varepsilon$$

при достаточно малом ε.

По теореме 3.7 $\rho(\mathrm{T}/\overline{D}_0) > 1$, поэтому существует потенциал

$$\Pi(x, y) = -\int\limits_{\mathrm{T}/\overline{D}_0} G(x, y, \xi, \eta)\, \nu(d\xi d\eta),$$

причем ν можно выбрать так, чтобы $\operatorname{supp}\nu \Subset \mathrm{T} \setminus \overline{D}_0$. По лемме 3.13

$$\frac{\partial \widehat{w}_0}{\partial n} > 0, \qquad z \in \partial D_0 .$$

Поэтому можно выбрать ν так, чтобы было

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial n} < \min \frac{\partial \widehat{w}_0}{\partial n}, \qquad z \in \partial D_0 .$$

По лемме 3.13 функция

$$q(z) = \begin{cases} \widehat{w}_0, & z \in D_0 \\ \Pi, & z \notin \partial D_0 \end{cases}$$

является L-субфункцией на T.

Функция $q(z)$ удовлетворяет условию

$$q(z) \le m(z, G_\Lambda, \Lambda) - 2\varepsilon, \qquad \forall\ z \in \mathrm{T},$$

так как потенциал отрицателен. Значит,

$$q_1(z) := q(z) + \eta$$

также является минорантой $m(z, G_\Lambda, \Lambda)$ и при этом не является минимальной.

Теорема 0.7 доказана, т.к. достаточность следует из теоремы 0,6.

3.5. Переходим к доказательству теоремы 0.8.

Множество $\mathrm{T} \setminus D_0$ замкнуто. Пусть $\varphi(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю на $\mathrm{T} \setminus D_0$ и положительная на D_0.

Полагаем,

$$q(z) = h_0(y) - \varepsilon\varphi(z),$$

где $h_0(y)$ — тригонометрически выпуклая функция, соответствующая G_0, а ε выбрано так, чтобы было

$$L_1 q \geq 0.$$

Это возможно, так как $L_1 h_0 > 0$ по условию.

Тогда имеем

$$m(z, G_0, q) = \varepsilon\varphi(z),$$

следовательно, $\{ z : m(z, G_0, q) > 0 \} = D_0$.

Ясно, что если в качестве образующей периодического предельного множества взять

$$v(\lambda) = q(\ln\lambda) \mid \lambda \mid$$

и построить целую функцию Φ_Λ, для которой

$$\operatorname{Fr}\Phi_\Lambda = \{ v_t : 1 \leq t \leq e^P \},$$

то соответствующее Λ обладает всеми свойствами, указанными в теореме 0.8.

Рассмотрим пример 0.6. Покажем, что $\rho(D_0) = \infty$. Действительно, пусть $R(z)$ — решение краевой задачи (3.9) при $\rho < \infty$. Тогда функция

$$v(z) = R(z)e^{\rho x}$$

является гармонической в полосе

$$\{ z : f(y) < \operatorname{Re} z < 2\pi + f(y),\ y \in (-\infty, \infty) \},$$

ограниченной и равной нулю на границе. Тогда $v(z) \equiv 0$, откуда $R(z) \equiv 0$, ч.т.д.

Рассмотрим теперь пример 0.7.

Перейдем в уравнении (3.9) к новым координатам

$$\begin{cases} \xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\pi}{P}. \end{cases}$$

Тогда уравнение приведется к виду:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\rho\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\xi} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \rho^2\right] R_1(\xi, \eta) = 0.$$

Условие обращения в нуль на D_0 примет вид

$$R_1(\xi, 2\pi l\cos\alpha) = 0, \qquad l \in \mathbf{Z}.$$

Условие периодичности дает

$$R_1\left(\xi + \frac{P}{\cos\alpha}k, \eta\right) = R_1(\xi, \eta), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Будем искать решение, не зависящее от ξ.

Имеем

$$R''(\eta) - 2\rho\sin\alpha\, R'(\eta) + \rho^2 R(\eta) = 0,$$

$$R(0) = R(2\pi\cos\alpha) = 0.$$

Далее,

$$R(\eta) = C_1 e^{(\rho\sin\alpha)\eta}\cos((\rho\cos\alpha)\eta) + C_2 e^{(\rho\sin\alpha)\eta}\sin((\rho\cos\alpha)\eta).$$

Используя краевые условия, получаем

$$\rho_{\min} = \frac{1}{2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2\right).$$

Соответствующая собственная функция

$$R = e^{(\rho_{\min}\sin\alpha)\eta}\sin((\rho_{\min}\cos\alpha)\eta)$$

действительно равна нулю на $\mathbf{T} \setminus D_0$ и положительна в D_0, чем она однозначно определяется с точностью до множителя.

Приложение.

Доказательство теоремы V.

Мы приведем доказательство, принадлежащее Г. Левину и основанное на его недавних результатах. Докажем следующее утверждение, принадлежащее Г. Левину.

Теорема VI. *Пусть* $\Gamma_1, \dots \Gamma_n$ *— жордановы кривые, такие, что*:

1) Γ_i, $i = \overline{1, n}$ *соединяют* 0 *и* ∞;

2) *существует число* T, $|T| > 1$ *(не обязательно вещественное), для которого* $T\Gamma_i = \Gamma_i$, $i = \overline{1, n}$. *Пусть* D_i, $i = \overline{1, n}$ *— области, на которые делится плоскость,* ρ_i *— порядок минимальной гармонической функции в* D_i. *Тогда*

$$\sum_i 1/\rho_i \le 2 \tag{П.1}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда Γ_i *— логарифмические спирали (или лучи, когда* $T \in R^+$*).*

Доказательство. Обозначим через H_i минимальные гармонические функции в D_i. Тогда $H_i = \operatorname{Im}\varphi_i$, где $\varphi_i : D_i \to \Pi^+$ — конформное отображение D_i на верхнюю полуплоскость, $\varphi_i(0) = 0$. Отображение $g_i = \varphi_i(T\varphi_i^{-1}) : \Pi^+ \to \Pi^+$ продолжается до изоморфизма $\mathbf{C}$, $g_i(0) = 0$, и поэтому $g_i(z) = \sigma_i z$, где $\sigma_i > 1$. Значит, $\varphi_i(Tz) = \sigma_i\varphi_i(z)$ или

$$Th_i(z) = h_i(\sigma_i z),\ h_i = \varphi_i^{-1} : \Pi^+ \to D_i.$$

Воспользуемся следующим неравенством из [11]:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ln\sigma_i} \le \frac{2\ln T}{|\ln T|^2} \le \frac{2}{\ln|T|}. \tag{П.2}$$

Равенство в (П.1) достигается лишь тогда, когда Γ_i — логарифмические спирали или лучи. Так как $\rho_i = \ln \sigma_i / \ln \mid T \mid$, то из (П.2) следует (П.1).

Список литературы

1. *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, Москва (1956), 632 с.
2. *В. С. Азарин*, Теория роста субгармонических функций. Изд-во ХГУ, Харьков (1982), 74 с.
3. *В. С. Азарин*, Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка .—Мат. сб. (1979), т. 108, № 2, с. 147—167.
4. *В. С. Владимиров*, Обобщенные функции в математической физике. Наука, Москва (1979), 318 с.
5. *М. Л. Содин*, Замечание о предельных множествах субгармонических функций натурального порядка в плоскости.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1983), вып. 39, с. 125—129.
6. *В. С. Азарин, В. Б. Гинер*, О строении предельных множеств целых и субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1982), вып. 38, с. 3—11.
7. *А. Ф. Гришин, М. Л. Содин*, Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1988), вып. 50, с. 47—61.
8. *А. Э. Еременко, М. Л. Содин, Д. Шиа*, О минимуме модуля целой функции на последовательности пиков Пойа.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. (1986), вып. 45, с. 26—39.
9. *В. С. Азарин, В. Б. Гинер*, О полноте систем экспонент в выпуклых областях.— Докл. АН СССР (1989), т. 305, № 1, с. 11—13.
10. *V. S. Azarin and V. B. Giner*, Limit Sets and Multiplicators of Entire Functions.— Advances in Soviet Math. (1992), v. 11, p. 251—275.
11. *Г. М. Левин*, О границах для мультипликаторов периодических точек голоморфных отображений.— Сиб. мат. журн. (1990), т. 31, № 2, с. 104—110.

Limit sets of entire functions and completeness of exponential systems

V. S. Azarin and V. B. Giner

Let $\{\exp(\lambda_j z)\}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$, be a system of exponentials, and let G be a convex domain in $\mathbb{C}$. A completeness of this system in the space $A(G)$ of holomorphic functions with a topology of uniform convergence on compact subsets of G is studied. This study is carried out in terms of the limit set of an entire function Φ with the zero set $\{\lambda_j\}$.