Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т, 1, № 2, с. 186–192

УДК 517.54

# Б. Я. Левин — создатель теории целых функций вполне регулярного роста

А. А. Гольдберг

*Львовский государственный университет, Украина, 290602, г. Львов, ул. Университетская, 1*

Статья поступила в редакцию 24 января 1994 г.

Доклад, прочитанный на заседании Харьковского математического общества 21 декабря 1993 года.

Доповідь, прочитана на засіданні Харківського математичного товариства 21 грудня 1993 року.

Одним из важнейших научных достижений Бориса Яковлевича Левина является создание и разработка теории целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.). Центральной задачей теории целых функций является установление связи между асимптотическим поведением целых функций и распределением ее нулей. Каковы были основные результаты теории целых функций к началу 30-х годов? Если брать глобальную характеристику роста целой функции, а именно, $\ln M(r,f)$, где $M(r,f)$ — максимум модуля функции $f$ на окружности радиуса $r$, и глобальную характеристику количества нулей — считающую функцию $n(r)$, т.е. число нулей в круге радиуса $r$, то главные связи между ними были установлены к началу века в трудах Ж. Адамара, Э. Бореля, Э. Линделефа. Эти глобальные характеристики не учитывают рост целой функции в различных направлениях и распределение нулей по аргументам. Во втором десятилетии нашего века была введена и изучена такая характеристика роста целой функции как индикатор

$$h(\varphi, f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho},$$

где $\rho$ — порядок функции $f$ (предполагаем здесь, что $f$ имеет конечный тип). Выяснилось, что $h(\varphi, f)$ является $\rho$-тригонометрически выпуклой функцией и это свойство является характеристическим для индикаторов. Однако установить связь между индикатором и распределением нулей целой функции не удавалось, в общем случае она не установлена и сейчас. Исключение составил случай, когда нули лежат на луче, исходящем из начала координат, и имеют плотность, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}.$$

Если $\rho$ — нецелое число (для простоты мы и в дальнейшем будем это предполагать), то для всех лучей, за исключением того, на котором лежат нули, в определении индикатора существует предел, а для самого индикатора имеется простая формула. Наоборот, если в определении индикатора существует предел хотя бы для одного луча, не входящего в конечный набор исключительных лучей, то нули имеют плотность. Эти результаты были получены Э. Линделефом, Ж. Валироном и Е. Титчмаршем.

Главным событием в теории целых функций в 30-е годы явилось создание Б. Я. Левиным и швейцарским математиком А. Пфлюгером теории целых функций в.р.р. Приведем соответствующее определение. Множество на плоскости называется $C_0^1$-множеством, если его можно покрыть последовательностью кружков $\{ z : | z - z_k | < r_k \}$ таких, что

$$\sum_{|z_k| < r} r_k = o(r), \qquad r \to \infty.$$

Целая функция $f$ имеет в.р.р., если существует $C_0^1$-множество $E$ такое, что существует предел

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ re^{i\varphi} \notin E}} \frac{\ln | f(re^{i\varphi}) |}{r^\rho} = h(\varphi, f).$$

То, что некоторое множество $E$ надо исключать из рассмотрения, следует из возможного наличия нулей у функции $f$. Б. Я. Левин нашел необходимое и достаточное условие на асимптотику нулей целой функции порядка $\rho$, чтобы целая функция имела в.р.р. В случае нецелого $\rho$ — это существование предела

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r^\rho},$$

когда $\theta_1$ и $\theta_2$ не принадлежат некоторому не более чем счетному множеству из $[0, 2\pi]$, где $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — число нулей целой функции в секторе $\{ z : | z | \le r, \theta_1 \le \arg z < \theta_2 \}$. В случае целого порядка к этому условию существования угловой плотности добавляется еще одно условие, которое мы приводить не будем. Собственно, Б. Я. Левин в 1937 году опубликовал только часть теоремы, относящуюся к достаточности. Но примерно в это же время в своем докладе на заседании Московского математического общества он формулировал это условие как достаточное и необходимое; доказательство и достаточности, и необходимости содержалось в докторской диссертации Бориса Яковлевича, защищенной в 1939 году. Независимо к подобным результатам пришел А. Пфлюгер, который опубликовал их в серии статей в 1938-42 годах. Б. Я. Левин не счел нужным отстаивать свой приоритет и в своей монографии, вышедшей в свет в 1956 году, приводя доказательство необходимости, ссылается на статьи А. Пфлюгера.

Для математиков, которые ближе не занимались теорией целых функций, может показаться непонятным, почему речь идет о теории целых функций в.р.р., а не об одной — пусть яркой и важной! — теореме. Почему класс целых функций в.р.р. оказался жизнестойким, более полувека привлекающим к себе новые творческие силы? В конце концов в любой теореме функции, удовлетворяющие ее условиям, образуют некоторый класс. Каковы отличительные особенности важных классов функций, изучение которых породило общепризнанные теории? Скажем, в нашем веке класс субгармонических функций (Ф. Рисс), почти периодических функций (Г. Бор), плюрисубгармонических функций (П. Лелон), квазиконформных отображений (Г. Гретш, М. А. Лаврентьев), медленно изменяющихся функций (Й. Карамата) и др.

**1.** Ш и р о т а к л а с с а. Класс целых функций в.р.р. содержит практически все употребительные целые функции. Прежде всего, согласно основной теореме все канонические произведения Вейерштрасса с правильным распределением нулей являются целыми функциями в.р.р. Вполне регулярный рост имеют 1) целые тригонометрические функции, 2) экпоненциальные многочлены, 3) $1/\Gamma(z)$, 4) функции Бесселя с целыми индексами, 5) функции Миттаг-Леффлера, 6) преобразования Фурье финитных функций, 7) функции экспоненциального типа из класса $L^p(-\infty,\infty)$, 8) целые функции, представимые как сумма абсолютно сходящегося в $\mathbb{C}$ ряда Дирихле $\sum a_k e^{\lambda_k z}$, показатели $\lambda_k$ которого лежат на границе ограниченной выпуклой области (Б. Я. Левин), 9) сигма-функция Вейерштрасса, тэта-функции Якоби (А. А. Гольдберг, Н. Е. Коренков), 10) целые решения любого алгебраического дифференциального уравнения первого порядка (А. Э. Еременко), 11) целые решения линейного дифференциального уравнения любого порядка с полиномиальными коэффициентами (В. П. Петренко) и многие, многие другие целые функции, встречающиеся в теории и приложениях.

**2.** Б о г а т с т в о и г л у б и н а т е о р и и. С другой стороны, класс целых функций в.р.р. обладает рядом специфических свойств, позволяющих открывать многочисленные новые факты, которые не являются справедливыми для всего класса целых фунций или для целых функций конечного порядка. Теории целых функций в.р.р. посвящена бóльшая часть монографии Б. Я. Левина "Распределение корней целых функций", изданная в Москве в 1956 году, которая затем была переведена на немецкий язык и дважды издавалась в США на английском. Эта теория занимает центральное место и в некоторых вышедших позже монографиях других авторов. Две трети объема монографии А. А. Кондратюка "Ряды Фурье и мероморфные функции", опубликованной во Львове в 1988 году, посвящена теории целых и мероморфных функций в.р.р. Вышедшая в 1992 году монография Л. И. Ронкина так и называется "Functions of Completely Regular Growth".

Есть признак, достаточный для того, чтобы считать класс функций выбранным удачно. Это наличие ряда равносильных определений, которые характеризуют входящие в класс функции с разных сторон. Классический пример — аналитические функции в области. Это функции, имеющие производную, и это же функции, имеющие первообразную (в односвязной области), и такие, что интеграл по всякой замкнутой кривой равен нулю, они же — функции, разлагающиеся в степенной ряд, это функции, удовлетворяющие определенной системе уравнений в частных производных (условия Коши–Римана), они же — функции , осуществляющие всюду, кроме дискретного множества, конформное отображение, и т.д. и т.д. Нечто подобное мы видим и с определением класса целых функций в.р.р. Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для наличия в.р.р. у целых функций конечного типа при порядке $\rho$ :

1) нули функции правильно распределены (об этом условии уже говорилось);

2) существует предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho}\ln|f(tz)|$$

в топологии обобщенных функций ($D'$-топологии) (П. З. Агранович, В. С. Азарин, Л. И. Ронкин);

3) для всех $\varphi$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}\int_1^r \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t}\,dt \qquad \text{(Б. Я. Левин);}$$

4) для всех $r$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}\int_1^r \frac{dt}{t}\int_1^t \frac{\ln|f(se^{i\varphi})|}{s}\,ds \qquad \text{(Б. Я. Левин);}$$

5) имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^\rho}=\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi,f)d\varphi \qquad \text{(А. Пфлюгер, Б. Я. Левин);}$$

6) для всех $\theta_1$, $\theta_2$, $0\le\theta_1\le\theta_2\le 2\pi$, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi \qquad \text{(В. С. Азарин, А. А. Гольдберг);}$$

7) для всех целых $k$ существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho}c_k(r,f)$, где

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$ — $k$-й коэффициент Фурье

функции $\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|$ (В. С. Азарин);

8) для любой целой функции $g$ конечного типа порядка $\rho$ и для всех $\varphi$ имеет место равенство

$$h(\varphi,fg)=h(\varphi,f)+h(\varphi,g) \qquad \text{(В. С. Азарин).}$$

Этот список необходимых и достаточных условий можно было бы продолжить.

Глубину теории целых функций в.р.р. иллюстрирует то обстоятельство, что даже вспомогательные леммы стимулировали появление ряда исследований и новых приложений (как тут не провести аналогию с леммой о логарифмической производной в неванлинновской теории!).

Лемма "о сдвиге нулей" нашла продолжение в работах И. Ф. Красичкова–Терновского, А. А. Гольдберга, А. Ф. Гришина, М. Л. Содина и др. Формула, которую Б. Я. Левин использовал для получения теорем единственности, была переоткрыта М. Цудзи и использована для построения одного из вариантов теории распределения значений функций, мероморфных в полуплоскости. Теория Цудзи в свою очередь оказалась очень полезной при решении некоторых задач распределения значений по аргументам (Б. Я. Левин, И. В. Островский) и в аналитической теории дифференциальных уравнений в полуплоскости. Г. В. Микаелян использовал формулу

Б. Я. Левина, подвергнув ее преобразованию $z \to 1/z$ при построении аналога метода рядов Фурье для функций, мероморфных в полуплоскости.

3. Обширные и разнообразные приложения. Именно в силу их обширности и разнообразия здесь можно только упомянуть о них. Сам Б. Я. Левин и другие математики с помощью целых функций в.р.р. решили многие проблемы полноты, единственности, интерполяции, распределения нулей экспоненциальных сумм, теории почти периодических функций, свойств целых функций, ограниченных определенным образом на действительной оси, и т.д. А. Пфлюгер доказал с помощью целых функций в.р.р. справедливость гипотезы Ф. Неванлинны о функциях с максимальной суммой дефектов для случая целых функций. Далее добавились проблемы функционального анализа, дифференциальных операторов, уравнений свертки, характеристических функций вероятностных законов, а также опосредствовано и непосредственно некоторые задачи теоретической физики, электро- и радиотехники. Причем речь идет не об эпизодических ссылках. Например, А. Ф. Леонтьев как в учебном пособии "Целые функции. Ряды экспонент", так и в специальных монографиях "Ряды экспонент" (1976 г.) и "Последовательности полиномов из экспонент" (1980 г.) отдельные параграфы отвел для изложения основных положений теории целых функций в.р.р., так часто на них приходиться ссылаться.

4. Развитие теории вглубь. Несмотря на известную законченность классической теории целых функций в.р.р. в том виде,в каком ее изложил Б. Я. Левин в своей книге, ряд проблем был решен впоследствии, а еще ряд вопросов остается открытым и сейчас, как бывает во всякой живой и развивающейся теории.

Для простоты мы все индикаторы ранее рассматривали относительно $r^{\rho}$. На самом деле, Б. Я. Левин использовал в качестве функции сравнения $r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок функции. Здесь имелся досадный пробел. Важная теорема о существовании целой функции в.р.р. с заданным ндикатором в случае целого $\rho$ была решена не для всякого уточненного порядка. Этот пробел был закрыт в 1972 году В. Н. Логвиненко, через 16 лет значительно более простую конструкцию предложил В. С. Бойчук.

В определении целой функции в.р.р. в качестве исключительного множества участвует некоторое $C_0^1$-множество. В. С. Азарин показал, что равносильные определения получим, если будем исключать $C_0^{\alpha}$-множества при любом $\alpha$, $0<\alpha \le 2$. $C_0^{\alpha}$-множество определяется как $C_0^1$-множество, но на центры кружков $z_k$ и радиусы $r_k$ накладывается условие

$$\sum_{|z_k|<r} r_k^{\alpha} = o(r^{\alpha}), \qquad r \to \infty.$$

Еще более точное описание исключительного множества позднее дали С. Ю. Фаворов и В. Я. Эйдерман.

П. З. Агранович и В. Н. Логвиненко существенно дополнили теорию целых функций в.р.р., предполагая, что для угловой плотности нулей или для $\ln |f(z)|$ известны не только главный член, но и несколько последующих членов асимптотики.

А. А. Гольдберг, Н. Е. Коренков, М. Л. Содин и Н. Н. Строчик полностью описали асимптотическое поведение логарифмической производной от целой функции в.р.р. Интересно, что здесь выступают в качестве исключительных $C_0^{\alpha}$-множества при

$1 < \alpha \le 2$, $\alpha = 1$ брать уже нельзя. Можно дать эквивалентное определение в.р.р. целой функции, используя асимптотику ее логарифмической производной.

Для целых функций в.р.р. порядка $1/2 < \rho < \infty$ исследовалось распределение конечных дефектных значений (при $\rho \le 1/2$ они отсутствуют для любой целой функции). Ум Ки Чжул (1969 г.) показал, что число конечных дефектных значений строго меньше $2\rho$, а А. А. Гольдберг (1971 г.) установил неулучшаемость этого результата. Для дефекта в нуле получена точная оценка сверху. Согласно до сих пор не доказанной гипотезе Неванлинны эта оценка справедлива и для всех целых функций порядка $\rho$. Естественно возникает вопрос. Пусть $q < 2\rho$, $a_1,\dots,a_q$ — различные комплексные числа. Какое множество в $q$-мерном единичном кубе описывает точка $\left(\delta(a_1,f),\dots,\delta(a_q,f)\right)$, когда функция $f$ пробегает класс целых функций в.р.р. порядка $\rho$? Решение этого вопроса полностью закрыло бы вопрос о распределении дефектов целых функций в.р.р. Могу засвидетельствовать, что где-то в середине 70-х годов Б. Я. Левин рассказывал И. В. Островскому и мне довольно сложное полное решение этой проблемы. Насколько мне известно, этот результат Бориса Яковлевича никогда не только не был опубликован, но и просто записан.

Достаточно детально описано возможное множество валироновских дефектных значений целых функций в.р.р. В частности, оно может иметь мощность континуума (А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко, И. В. Островский).

Первообразная от целой функции в.р.р. тоже имеет в.р.р. При некоторых дополнительных условиях на индикатор целой функции в.р.р. ее производная тоже в.р.р., и без всяких дополнительных условий производная имеет в.р.р. в углах, где индикатор положителен (А. А. Гольдберг, И. В. Островский). Эта же проблема исследовалась в случае, когда оператор $d/dz$ заменен оператором $\varphi(d/dz)$, где $\varphi(w)$ — целая функция экспоненциального типа. Вместо первообразной рассматривается целое решение уравнения $\varphi(d/dz)F(z) = f(z)$, где $f$ — заданная целая функция в.р.р. Если порядок $\rho$ целой функции в.р.р. меньше единицы, результат такой же, как для $\varphi(w) = w$ (И. В. Островский). При $\rho \ge 1$ положение усложняется, однако и в этом случае получены результаты, исчерпывающие проблему (О. Е. Епифанов, Ю. Ф. Коробейник).

Начато изучение вопроса о связи между в.р.р. целой функции экспоненциального типа и свойствами функции, ассоциированной с ней по Борелю. Так, если ассоциированная по Борелю функция однозначна и имеет конечное число изолированных особых точек или если она является алгебраической функцией, то целая функция имеет в.р.р. (Н. В. Говоров, Н. М. Черных).

5. Развитие теории вширь. Первоначальный вариант теории касался целых функций одной переменной и функций, аналитических в углу. Затем теория распространялась на другие классы функций, где возникали свои трудности и обнаруживались феномены, которые не наблюдались в случае целой функции одной переменной. Этот бурный процесс хочется сравнить с половодьем, когда поднимающаяся вода заливает все новые и новые площади. Здесь нет места хотя бы для упоминания достигнутых результатов. Укажем лишь классы функций в.р.р., на которые распространялись основные идеи теории целых функций в.р.р. Это:

- функции в.р.р., аналитические в полуплоскости (Н. В. Говоров, А. И. Хейфиц);
- целые функции в.р.р. по кривым правильного вращения (С. К. Балашов, Г. Опитц, А. И. Хейфиц);
- функции в.р.р., аналитические в круге (М. А. Гирнык);

– функции в.р.р., мероморфные в плоскости (А. А. Кондратюк, Ю. П. Лапенко);

– функции в.р.р., субгармонические в $\mathbf{R}^m$ или в конусе (П. З. Агранович, В. С. Азарин, Я. В. Васылькив, Л. Груман, К. Кизельман, А. А. Кондратюк, А. Ю. Рашковский, Л. И. Ронкин, С. И. Тарасюк, С. Ю. Фаворов);

– функции в.р.р., $\delta$-субгармонические в $\mathbf{R}^m$ (Я. В. Васылькив, А. А. Кондратюк, С. И. Тарасюк);

– целые функции в.р.р. в $\mathbf{C}^m$ (П. З. Агранович, Л. Груман, Л. И. Ронкин, Р. Сигурдсон, С. Ю. Фаворов);

– функции в.р.р., в том числе целые одной переменной, где в качестве функции сравнения берутся не $r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, а функции из более широких классов (Я. В. Васылькив, А. А. Кондратюк, С. И. Тарасюк).

Невозможно дать в кратком выступлении достаточно полный обзор современного состояния теории функций в.р.р., а мне это и не под силу, даже если бы я и не был ограничен во времени. Я охотно допускаю, что допустил досадные пропуски, не так, как нужно, расставил акценты и т.д. За все эти промахи прошу прощения у слушателей. Моей целью было убедительно показать, что теория целых функций в.р.р. — не случайный эпизод в истории нашей науки. Не случайно она создана двумя математиками почти одновременно, хотя о существовании друг друга они узнали лишь после войны, а впервые встретились в 1965 году в Ереване. Поразительно, что выделенный класс функций они назвали совершенно одинаково. "Funktionen von vollkommen regulären Wachstum" у А. Пфлюгера буквально совпадает с термином "функции в.р.р." у Б. Я. Левина. Есть что-то мистическое в том, что оба создателя теории ушли из жизни почти одновременно. При этом надо отметить, что А. Пфлюгер не создал школы, остался исследователем-одиночкой, в то время как Б. Я. Левин явился родоначальником целого научного направления.

Теория функций в.р.р. — одна из не очень многочисленных теорий, созданных в нашем веке в недрах комплексного анализа. К ней полностью подходят слова, сказанные Н. Бурбаки о всей математике: "Это большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению". Борис Яковлевич Левин навсегда вошел в историю математики как основатель большого города теории функций в.р.р., как архитектор и строитель его исторического центра.

## B. Ya. Levin is a creator of the theory of entire functions of completely regular growth

A. A. Goldberg

The lecture was proclaimed on the meeting of the Kharkov Mathematical Society on December 21, 1993.