Математическая физика, анализ, геометрия УДК 513
1994, т. 1, № 2, с. 216–226

Уточнение изодиаметрального неравенства в геометрии Минковского

В. И. Дискант

Черкасский инженерно-технологический институт, Украина, 257006, г. Черкассы, ул. Шевченко, 460

Статья поступила в редакцию 15 декабря 1993 г.

Получено уточнение изодиаметрального неравенства для компактного тела в геометрии Минковского с несимметричной метрикой. Показано, что следствием этого уточнения являются как само изодиаметральное неравенство, так и условие равенства в нем, доказанные В. Бертелем и Г. Пабелем в 1987 г.

Здобуто уточнення ізодіаметральної нерівності для компактного тіла в геометрії Мінковського з несиметричною метрикою. Показано, що наслідком цього уточнення є як сама ізодіаметральна нерівність, так і умова рівності в ній, що були доведені В. Бартелем та Г. Пабелем в 1987 р.

Пусть B — собственное выпуклое компактное тело в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $(n \geq 2)$, точка $\overline{o} \in R^n$ — внутренняя точка тела B.

Следуя Минковскому [1], введем в R^n с помощью пары $(B,\overline{o})$ новую метрику — метрику Минковского, положив

$$\rho_B(\overline{x},\overline{y}) = F(\overline{y} - \overline{x}),$$

где $\rho_B(\overline{x},\overline{y})$ — новое расстояние между точками $\overline{x}$ и $\overline{y}$ в R^n; $F(\overline{x})$ — дистанционная функция, определяемая парой $(B,\overline{o})$ [2]. В данной работе точки R^n будем отождествлять с их радиус-векторами относительно $\overline{o}$. Расстояние $\rho_B(\overline{x},\overline{y})$ обладает свойствами метрики. При этом равенство $\rho_B(\overline{x},\overline{y}) = \rho_B(\overline{y},\overline{x})$ для любой пары точек $\overline{x},\overline{y} \in R^n$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{o}$ является центром симметрии тела B, т.е. в случае, когда $B = (-B)$, где $(-B)$ — тело, симметричное B относительно $\overline{o}$.

Пусть теперь B — собственное выпуклое компактное тело в n-мерном аффинном пространстве A^n, $(n \geq 2)$, точка $\overline{o}$ — внутренняя точка тела B. Введем в A^n систему координат, выбрав $\overline{o}$ за ее начало. Обозначим через R^n присоединенное к A^n евклидово пространство, т.е. пространство, которое получается из A^n введением в A^n скалярного произведения с помощью некоторой положительно определенной симметричной билинейной формы. С помощью пары $(B,\overline{o})$ введем в R^n, а следовательно, и в A^n метрику Минковского ρ_B. Эта метрика не зависит от выбора вспомогательной евклидовой метрики в A^n и полностью определяется заданием пары $(B,\overline{o})$ в A^n.

Аффинное пространство A^n, в котором с помощью пары $(B,\overline{o})$ введена метрика Минковского ρ_B, назовем n-мерным пространством M^n, наделенным геометрией Минковского. Тело B назовем нормирующим телом M^n. Заметим, что в случае, если $B = (-B)$, M^n является n-мерным пространством Минковского [3].

Для компактного тела A в M^n обозначим через A' его выпуклую оболочку, через $D_B(A)$ — диаметр A, через $V_B(A)$ — объем A в M^n. По определению

$$D_B(A) = \max_{\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A} \rho_B(\bar{a}_1, \bar{a}_2),$$

а величина $V_B(A)$ равна n-мерной мере Лебега тела A в A^n, нормированной так, что

$$V_B(B) = v_n = \pi^{n/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right),$$

где v_n — объем единичного шара в R^n.

Впервые изодиаметральное неравенство для компактного тела A в R^n было получено Бибербахом [4] в виде

$$\left(\frac{D}{2}\right)^n - \frac{V}{v_n} \geq 0, \tag{1}$$

где D — диаметр, V — объем тела A в R^n. Равенство в (1) для собственного тела A имеет место тогда и только тогда, когда A — шар в R^n.

Изодиаметральное неравенство для компактного тела A в M^n с симметричной метрикой было получено Бартелем [5] в виде

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{v_n} \geq \left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A')}{v_n} \geq 0. \tag{2}$$

Равенство нулю левой части в (2) для собственного тела A имеет место тогда и только тогда, когда A положительно гомотетично B.

В случае, когда метрика ρ_B, вообще говоря, не обладает свойством симметрии, Бартель и Пабель [6] для компактного тела A в M^n получили изодиаметральное неравенство в виде

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} \geq \left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A')}{V_B(B_1)} \geq 0. \tag{3}$$

Равенство нулю левой части в (3) для собственного тела A имеет место тогда и только тогда, когда A положительно гомотетично B_1, где $B_1 = B \cap (-B)$.

Отметим, что (1) и (2) с условиями равенства в них являются частными случаями неравенства (3) с условием равенства в нем.

В настоящей работе будет получено уточнение неравенства (3), учитывающее отклонение тел A' и B_1 от гомотетичности.

Для удобства изложения вначале будет доказано уточнение изодиаметрального неравенства (2) для выпуклого компактного тела A в M^n с симметричной метрикой, затем уточнение (3) для выпуклого компактного тела A в M^n с несимметричной метрикой и, наконец, уточнение (3) для компактного тела A в M^n с несимметричной метрикой.

Пусть B — собственное выпуклое компактное тело в M^n, имеющее $\bar{o}$ своим центром симметрии.

Теорема 1. *Для выпуклого компактного тела A в M^n, ($n \geq 2$), с нормирующим телом B имеет место следующее уточнение изодиаметрального неравенства (2) геометрии Минковского с симметричной метрикой*

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{v_n} \geq \left(\frac{D_B(A)}{2} - q(A,B)\right)^n,$$

где $q(A,B) = \sup\left(\alpha \in R_+ \mid \bar{x} + \alpha B \subset A, \bar{x} \in A\right)$ — коэффициент вместимости тела B в тело A.

Доказательству теоремы предпошлем доказательство четырех лемм.

Пусть R^n — присоединенное к M^n евклидово пространство.

Лемма 1. *Существует такой вектор $\bar{u}_0 \in \Omega$, что*

$$D_B(A) = \frac{H_A(\bar{u}_0) + H_A(-\bar{u}_0)}{H_B(\bar{u}_0)},$$

где Ω — единичная сфера в R^n с центром в точке $\bar{o}$, $H_A(\bar{u})$, $H_B(\bar{u})$ — опорные функции тел A и B.

Доказательство. Если A — точка в R^n, то утверждение леммы очевидно. Пусть A отлично от точки. Для двух различных точек $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2 \in A$ рассмотрим вектор $\overline{ob_2}$, направленный одинаково с вектором $\overline{a_1a_2}$ и такой, что точка $\bar{b}_2$ принадлежит границе тела B. Тогда расстояние от $\bar{a}_1$ до $\bar{a}_2$ определяется по формуле $\rho_b(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \dfrac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{ob_2}|}$, где $|\overline{a_1a_2}|$, $|\overline{ob_2}|$ — длины векторов $\overline{a_1a_2}$ и $\overline{ob_2}$ в R^n. Если $\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = D_B(A)$, то отрезок $[\bar{a}_1\bar{a}_2]$ является хордой тела A.

Пусть $\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = D_B(A)$ и $T_B^{\bar{b}_2}$ — опорная гиперплоскость тела B, проходящая через точку $\bar{b}_2$. Пусть $\bar{u}_0$ — единичная внешняя нормаль к $T_B^{\bar{b}_2}$, т.е. $T_B^{\bar{b}_2} = T_B(\bar{u}_0)$, где через $T_B(\bar{u}_0)$ обозначена опорная гиперплоскость тела B с внешней единичной нормалью $\bar{u}_0$. Покажем, что гиперплоскость $T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0)$, проходящая через точку $\bar{a}_2$ ортогонально к вектору $\bar{u}_0$, является опорной гиперплоскостью тела A с внешней нормалью $\bar{u}_0$, т.е. $T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0) = T_A(\bar{u}_0)$.

Отметим, что векторы $\bar{u}_0$ и $\overline{a_2a_1}$ образуют тупой угол. Это следует из того, что векторы $\bar{u}_0$ и $\overline{b_2o}$ образуют тупой угол. Поэтому для доказательства равенства $T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0) = T_A(\bar{u}_0)$ достаточно показать, что для любой точки $\bar{a} \in A$ отрезок $[\bar{a}_1,\bar{a}]$ либо не пересекается с $T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0)$, либо $[\bar{a}_1,\bar{a}] \cap T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0) = \bar{a}$.

Предположим противное, т.е. предположим, что существует точка $\bar{a}_3$, для которой $[\bar{a}_1,\bar{a}_3]\bigcap T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0) = \bar{a}_4$, причем $\bar{a}_4$ — внутренняя точка отрезка $[\bar{a}_1,\bar{a}_3]$. Покажем, что тогда $\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) < D_B(A)$.

Действительно, пусть вектор $\overline{ob_4}$ и вектор $\overline{a_1a_4}$ имеют одинаковое направление и $\bar{b}_4 \in T_B(\bar{u}_0)$. Обозначим через $\bar{b}_3$ точку пересечения отрезка $[\bar{o},\bar{b}_4]$ с границей тела B. Тогда треугольники $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_4$ и $\bar{o}\bar{b}_2\bar{b}_4$ подобны, как треугольники с параллельными сторонами. Кроме того, $|\overline{ob_3}| \le |\overline{ob_4}|$, $|\overline{a_1a_4}| < |\overline{a_1a_3}|$. Поэтому

$$\frac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{ob_2}|} = \frac{|\overline{a_1a_4}|}{|\overline{ob_4}|} \le \frac{|\overline{a_1a_4}|}{|\overline{ob_3}|} < \frac{|\overline{a_1a_3}|}{|\overline{ob_3}|},$$

т.е.

$$\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) < \frac{|\overline{a_1a_3}|}{|\overline{ob_3}|} = \rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_3) \le D_B(A).$$

Полученное противоречие показывает, что $T^{\bar{a}_2}(\bar{u}_0) = T_A(\bar{u}_0)$.

Из-за симметрии тела B относительно точки $\bar{o}$ гиперплоскость $T^{\bar{b}_1}(-\bar{u}_0)$, проходящая через точку $\bar{b}_1$, симметричную точке $\bar{b}_2$ относительно $\bar{o}$, ортогонально вектору $-\bar{u}_0$, является опорной гиперплоскостью $T_B(-\bar{u}_0)$ тела B в точке $\bar{b}_1$ с внешней единичной нормалью $-\bar{u}_0$. Так как

$$D_B(A) = \rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \rho_B(\bar{a}_2,\bar{a}_1) = \frac{|\overline{a_2a_1}|}{|\overline{ob_1}|},$$

то, поменяв в предыдущих рассуждениях ролями $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, придем к утверждению, что гиперплоскость $T^{\bar{a}_1}(-\bar{u}_0)$, проходящая через $\bar{a}_1$ ортогонально вектору $-\bar{u}_0$, является опорной гиперплоскостью $T_A(-\bar{u}_0)$ тела A с внешней нормалью $-\bar{u}_0$.

Пусть теперь $T_A(\bar{u}_0, -\bar{u}_0)$ — телесный слой, заключенный между опорными гиперплоскостями $T_A(\bar{u}_0)$ и $T_A(-\bar{u}_0)$ тела A. Тогда отрезки $[\bar{a}_1,\bar{a}_2]$ и $[\bar{b}_1,\bar{b}_2]$ являются пересечениями двух параллельных прямых, содержащих эти отрезки, со слоями $T_A(\bar{u}_0, -\bar{u}_0)$ и $T_B(\bar{u}_0, -\bar{u}_0)$ соответственно. Толщина слоя $T_A(\bar{u}_0, -\bar{u}_0)$ равна расстоянию между опорными плоскостями $T_A(\bar{u}_0)$ и $T_A(-\bar{u}_0)$, т.е. равна $H_A(\bar{u}_0) + H_A(-\bar{u}_0), \bar{u}_0 \in \Omega$. Так как отношение длин отрезков $[\bar{a}_1,\bar{a}_2]$ и $[\bar{b}_1,\bar{b}_2]$ равно отношению расстояний между $T_A(\bar{u}_0)$ и $T_A(-\bar{u}_0)$, $T_B(\bar{u}_0)$ и $T_B(-\bar{u}_0)$, то

$$D_B(A) = \rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = 2\frac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{b_1b_2}|} = 2\frac{H_A(\bar{u}_0) + H_A(-\bar{u}_0)}{H_B(\bar{u}_0) + H_B(-\bar{u}_0)} = \frac{H_A(\bar{u}_0) + H_A(-\bar{u}_0)}{H_B(\bar{u}_0)}.$$

Лемма 2.

$$D_B(A) = \max_{\bar u \in \Omega} \frac{H_A(\bar u) + H_A(-\bar u)}{H_B(\bar u)}.$$

Доказательство. Из утверждения леммы 1, непрерывности функций $H_A(\bar u)$, $H_B(\bar u)$, оценки $H_B(\bar u) > 0$ при $\bar u \in \Omega$ имеем

$$D_B(A) \le \max_{\bar u \in \Omega} \frac{H_A(\bar u) + H_A(-\bar u)}{H_B(\bar u)}.$$

Покажем выполнение противоположного неравенства. Пусть $\max\limits_{\bar u \in \Omega} \frac{H_A(\bar u) + H_A(-\bar u)}{H_B(\bar u)}$ достигается в точке $\bar u_1$. Будем предполагать, что $H_A(\bar u_1) + H_A(-\bar u_1) > 0$, ибо в противном случае тело A является точкой и утверждение леммы в этом случае очевидно. Тогда опорные к телу A гиперплоскости $T_A(\bar u_1)$ и $T_A(-\bar u_1)$ не совпадают между собой. Возьмем на границе тела A точки $\bar a_1 \in T_A(-\bar u_1) \bigcap A$ и $\bar a_2 \in T_A(\bar u_1) \bigcap A$ и рассмотрим прямую l, проходящую через 0 и параллельную вектору $\overline{a_1 a_2}$. Пусть $\bar c_1 = T_B(-\bar u_0) \bigcap l$, $\bar c_2 = T_B(\bar u_1) \bigcap l$, $\bar b_1$ и $\bar b_2$ — точки пересечения l с границей тела B, причем $\bar b_1 \ne \bar b_2$ и $\overline{b_1 b_2}$ имеет одинаковое направление с вектором $\overline{a_1 a_2}$. Так как тело B лежит между гиперплоскостями $T_B(-\bar u_1)$ и $T_B(\bar u_1)$, то для отрезков $[\bar b_1, \bar b_2]$, $[\bar c_1, \bar c_2]$ справедливо включение $[\bar b_1, \bar b_2] \subset [\bar c_1, \bar c_2]$. Поэтому

$$\max_{\bar u \in \Omega} \frac{H_A(\bar u) + H_A(-\bar u)}{H_B(\bar u)} = \frac{H_A(\bar u_1) + H_A(-\bar u_1)}{H_B(\bar u_1)} = 2\,\frac{H_A(\bar u_1) + H_A(-\bar u_1)}{H_B(\bar u_1) + H_B(-\bar u_1)} =$$

$$= 2\,\frac{|\overline{a_1 a_2}|}{|\overline{c_1 c_2}|} \le 2\,\frac{|\overline{a_1 a_2}|}{|\overline{b_1 b_2}|} = \frac{|\overline{a_1 a_2}|}{|\overline{o b_2}|} = \rho_B(\bar a_1, \bar a_2) \le D_B(A),$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Рассмотрим тело $(-A)$, симметричное выпуклому компактному телу A относительно начала координат $\bar o$ в R^n. Легко показать [2], что $(-A)$ — выпуклое компактное тело в R^n

Лемма 3. *Пусть* $C = \frac{1}{2}(A + (-A))$. *Тогда* $D_B(C) = D_B(A)$ *и* $C \subset \frac{D_B(A)}{2} B$.

Доказательство. По определению [2] $H_A(\bar u) = \max\limits_{\bar x \in A} \langle \bar x \bar u \rangle$, $\bar u \in \Omega$. Так как $\max\limits_{\bar x \in A} \langle \bar x(-\bar u) \rangle = \max\limits_{-\bar x \in (-A)} \langle (-\bar x)\bar u \rangle$, то $H_A(-\bar u) = H_{(-A)}(\bar u)$.

Из выражения опорной функции для линейной комбинации выпуклых компактных тел [2] имеем

$$H_C(\overline{u}) = \frac{1}{2}\left(H_A(\overline{u}) + H_{(-A)}(\overline{u})\right) = \frac{1}{2}\left(H_A(\overline{u}) + H_A(-\overline{u})\right).$$

Отсюда следует, что $H_C(\overline{u}) = H_C(-\overline{u})$, и тело C имеет $\overline{o}$ своим центром симметрии. Из леммы 2 получаем

$$D_B(C) = \max_{\overline{u}\in\Omega}\frac{H_C(\overline{u}) + H_C(-\overline{u})}{H_B(\overline{u})} = \max_{\overline{u}\in\Omega}\frac{H_A(\overline{u}) + H_A(-\overline{u})}{H_B(\overline{u})} = D_B(A).$$

Покажем теперь, что $C \subset \frac{D_B(A)}{2}B$. Действительно, для произвольного $\overline{u} \in \Omega$ имеем

$$H_C(\overline{u}) = \frac{1}{2}\left(H_A(\overline{u}) + H_A(-\overline{u})\right) = \frac{1}{2}\frac{H_A(\overline{u}) + H_A(-\overline{u})}{H_B(\overline{u})}H_B(\overline{u}) \le$$

$$\le \frac{1}{2}H_B(\overline{u})\max_{\overline{u}\in\Omega}\frac{H_A(\overline{u}) + H_A(-\overline{u})}{H_B(\overline{u})} = \frac{D_B(A)}{2}H_B(\overline{u}) = H_{\frac{D_B(A)}{2}B}(\overline{u}).$$

Из последнего неравенства следует включение $C \subset \frac{D_B(A)}{2}B$.

Лемма 4. *Для компактных выпуклых тел A и B в R^n справедливо равенство*

$$V_k(A,B) = V_k((-A),(-B)),$$

где $V_k(A,B)$ — k-й смешанный объем тел A и B [2], $k = \overline{0,n}$.

Доказательство. Пусть $A_\rho(B) = A + \rho B$ ($\rho \ge 0$) — внешнее тело тела A относительно тела B с коэффициентом ρ [7]. Из равенства

$$H_{(-A_\rho(B))}(\overline{u}) = H_{A_\rho(B)}(-\overline{u}) = H_{A+\rho B}(-\overline{u}) = H_A(-\overline{u}) + H_{\rho B}(-\overline{u}) =$$

$$= H_{(-A)}(\overline{u}) + H_{-\rho B}(\overline{u}) = H_{(-A)+(-\rho B)}(\overline{u}), \quad \overline{u}\in\Omega, \quad \rho \ge 0,$$

заключаем, что $(-A_\rho(B)) = (-A) + (-\rho B) = (-A)_\rho(-B)$.

По формуле для объема линейной комбинации компактных выпуклых тел в R^n [2] имеем

$$V(A_\rho(B)) = V(A + \rho B) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k V_k(A,B)\rho^k,$$

$$V((-A)_\rho(-B)) = V((-A) + \rho(-B)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k V_k((-A),(-B))\rho^k.$$

Так как $V((-A)_\rho(-B)) = V((-A_\rho(B))) = V(A_\rho(B))$, $\rho \ge 0$, то из равенства двух последних многочленов при каждом $\rho \ge 0$ приходим к утверждению леммы 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть Ω' — замкнутое множество на единичной сфере Ω в R^n, не лежащее в одной замкнутой полусфере, $H^*(\overline{u})$ — непрерывная положительная функция на Ω'. Определим с помощью $H^*(\overline{u})$ собственное выпуклое тело N так, как это делает А. Д. Александров в [8]. А именно, рассмотрим для каждого $\overline{u} \in \Omega'$ гиперплоскость, ортогональную $\overline{u}$ и отстоящую от начала координат в направлении $\overline{u}$ на расстоянии $H^*(\overline{u})$. Пересечение всех полупространств, ограниченных такими гиперплоскостями и содержащих начало координат, дает собственное выпуклое компактное тело N, которое будем обозначать через $N = \left(\Omega', H^*(\overline{u})\right)$.

Будем предполагать, что тело A — собственное. Для несобственного тела A утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим тело $N_\sigma = \left(\Omega, N_\sigma^*(\overline{u})\right)$, которое задается с помощью положительной непрерывной функции

$$N_\sigma^*(\overline{u}) = H_A(\overline{u}) - \sigma H_B(\overline{u}), \qquad 0 \le \sigma < q = q(A,B),$$

определенной на Ω. Как показано в [9], имеет место равенство

$$V(A) = n \int_0^q V_1(N_\sigma, B)\, d\sigma. \tag{4}$$

Оценим сверху величину $V_1(N_\sigma, B)$ через величины $D_B(N_\sigma)$ и $V(B)$. Для этого воспользуемся аналогом относительного изопериметрического неравенства

$$V_{m+k}^{n-m}(X,Y) - V_m^{n-m-k}(X,Y)V^k(Y) \ge 0, \tag{5}$$

в котором X, Y — компактные выпуклые тела в R^n, $1 \le k \le n-1$, $0 \le m \le n-2$, $1 \le k+m \le n-1$, и которое является следствием более общих неравенств А. Д. Александрова [10] для смешанных объемов. Полагая в (5)

$$m = 1, \qquad k = n-2, \qquad X = N_\sigma, \qquad Y = B,$$

получим

$$V_1(N_\sigma, B) \le V_{n-1}^{n-1}(N_\sigma, B)/V^{n-2}(B). \tag{6}$$

По лемме 4 имеем $V_{n-1}((-N_\sigma),(-B)) = V_{n-1}(N_\sigma, B)$. Отсюда в силу симметрии B относительно $\overline{o}$ получаем $V_{n-1}((-N_\sigma),B) = V_{n-1}(N_\sigma,B)$, а с учетом линейности $V_{n-1}(X,Y)$ относительно первого аргумента [2] имеем

$$V_{n-1}(N_\sigma,B) = \frac{1}{2}V_{n-1}(N_\sigma,B) + \frac{1}{2}V_{n-1}((-N_\sigma),B) = V_{n-1}\left(\frac{1}{2}(N_\sigma + (-N_\sigma)),B\right).$$

Согласно лемме 3

$$\frac{1}{2}(N_\sigma + (-N_\sigma)) \subset \frac{D_B(N_\sigma)}{2}B.$$

Из последнего включения и свойства монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов [2] получаем следующую оценку сверху для $V_{n-1}(N_\sigma,B)$ через $D_B(N_\sigma)$ и $V(B)$:

$$V_{n-1}(N_\sigma, B) = V_{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(N_\sigma + (-N_\sigma)\right), B\right) \le \frac{D_B(N_\sigma)}{2} V(B).$$

Подставляя эту оценку в (6), получаем

$$V_1(N_\sigma, B) \le \left(\frac{D_B(N_\sigma)}{2}\right)^{n-1} V(B). \tag{7}$$

Оценим теперь сверху величину $D_B(N_\sigma)$ через $D_B(A)$ и σ. Для этого покажем, что $N_\sigma + \sigma B \subset A$. Действительно, если $H_{N_\sigma}(\bar{u})$ — опорная функция тела N_σ, то $H_{N_\sigma}(\bar{u}) + \sigma H_B(\bar{u})$ — опорная функция тела $N_\sigma + \sigma B$. Кроме того, из определения тела N_σ следует, что $H_{N_\sigma}(\bar{u}) \le N^*_\sigma(\bar{u})$. Поэтому

$$H_{N_\sigma}(\bar{u}) + \sigma H_B(\bar{u}) \le N^*_\sigma(\bar{u}) + \sigma H_B(\bar{u}) = H_A(\bar{u}) - \sigma H_B(\bar{u}) + \sigma H_B(\bar{u}) = H_A(\bar{u})$$

откуда и следует включение $N_\sigma + \sigma B \subset A$.

Из включения $N_\sigma + \sigma B \subset A$ имеем

$$D_B(N_\sigma + \sigma B) \le D_B(A). \tag{8}$$

Тогда, пользуясь утверждением леммы 2 и выражением опорной функции для линейной комбинации выпуклых компактных тел в R^n, получаем

$$D_B(N_\sigma + \sigma B) = \max_{\bar{u} \in \Omega} \frac{H_{N_\sigma}(\bar{u}) + \sigma H_B(\bar{u}) + H_{N_\sigma}(-\bar{u}) + \sigma H_B(-\bar{u})}{H_B(\bar{u})} =$$

$$= \max_{\bar{u} \in \Omega} \left(\frac{H_{N_\sigma}(-\bar{u}) + H_{N_\sigma}(\bar{u})}{H_B(\bar{u})} + 2\sigma\right) = D_B(N_\sigma) + 2\sigma.$$

Подставляя полученное значение для $D_B(N_\sigma + \sigma B)$ в (8), получаем оценку сверху для $D_B(N_\sigma)$ через $D_B(A)$ и σ:

$$D_B(N_\sigma) \le D_B(A) - 2\sigma.$$

Подставляя эту оценку для $D_B(N_\sigma)$ в (7), полученную оценку для $V_1(N_\sigma, B)$ — в равенство (4), придем к неравенству

$$V(A) \le nV(B) \int_0^q \left(\frac{D_B(A) - 2\sigma}{2}\right)^{n-1} d\sigma =$$

$$= V(B)\left(\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \left(\frac{D_B(A)}{2} - q\right)^n\right),$$

совпадающему при $V(B) = v_n$ и $V(A) = V_B(A)$ с утверждением теоремы.

Пусть теперь B — собственное выпуклое компактное тело в M^n, $\bar{o}$ — внутренняя точка тела B, причем тело B, вообще говоря, не совпадает с телом $B_1 = B \cap (-B)$.

Теорема 2. *Для выпуклого компактного тела A в M^n $(n \geq 2)$ с нормирующим телом B имеет место следующее уточнение изодиаметрального неравенства* (3) *геометрии Минковского с несимметричной метрикой:*

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} \geq \left(\frac{D_B(A)}{2} - q(A,B_1)\right)^n,$$

где $q(A,B_1)$ — коэффициент вместимости тела B_1 в тело A.

Доказательство. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, присоединенное к аффинному n-мерному пространству A^n, ρ_B и ρ_{B_1} — метрики Минковского, порожденные в R^n парами $(B,\bar{o})$ и $(B_1,\bar{o})$ соответственно. Покажем, что для компактного тела A в M^n имеет место равенство $D_B(A) = D_{B_1}(A)$.

Действительно, пусть $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ — точки тела A и $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$ (случай $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ не представляет интереса). Обозначим через l прямую, проходящую через $\bar{o}$ параллельно вектору $\overline{a_1a_2}$, через $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ — точки пересечения прямой l с границей тела B, занумерованные так, что векторы $\overline{a_1a_2}$ и $\overline{b_1b_2}$ имеют одинаковые направления. Тогда

$$\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \frac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{ob_2}|}, \qquad \rho_B(\bar{a}_2,\bar{a}_1) = \frac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{ob_1}|}.$$

Не умаляя общности, можем считать, что $|\overline{ob_2}| \geq |\overline{ob_1}|$. Тогда прямая l пересекает границу тела $B_1 = B \cap (-B)$ в точках $\bar{b}_1$ и $-\bar{b}_1$. Поэтому

$$\rho_{B_1}(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \frac{|\overline{a_1a_2}|}{|\overline{ob_1}|} = \rho_B(\bar{a}_2,\bar{a}_1) = \max\left(\rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2),\rho_B(\bar{a}_2,\bar{a}_1)\right).$$

Отсюда

$$D_{B_1}(A) = \max_{\bar{a}_1,\bar{a}_2 \in A} \rho_{B_1}(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \max_{\bar{a}_1,\bar{a}_2 \in A} \rho_B(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = D_B(A).$$

Так как тело B_1 имеет $\bar{o}$ своим центром симметрии, по теореме 1 получаем

$$\left(\frac{D_{B_1}(A)}{2}\right)^n - \frac{V_{B_1}(A)}{v_n} \geq \left(\frac{D_{B_1}(A)}{2} - q(A,B_1)\right)^n,$$

где $q(A,B_1)$ — коэффициент вместимости тела B_1 в тело A.

Учитывая, что $D_{B_1}(A) = D_B(A)$ и $V_{B_1}(A)/v_n = V_B(A)/V_B(B_1)$, видим, что последнее неравенство совпадает с неравенством в утверждении теоремы 2.

Теорема 3. *Для компактного тела A в M^n имеет место следующее уточнение изодиаметрального неравенства* (3) *геометрии Минковского с несимметричной метрикой:*

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} \ge \left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A')}{V_B(B_1)} \ge \left(\frac{D_B(A)}{2} - q(A',B_1)\right)^n. \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что $D_{B_1}(A') = D_B(A)$. Из включения $A \subset A'$ следует, что $D_B(A) \le D_B(A') = D_{B_1}(A')$. На основании леммы 2 найдется такой вектор $\bar{u}_1 \in \Omega$ в присоединенном к M^n евклидовом пространстве R^n, что

$$D_{B_1}(A') = \frac{H_{A'}(\bar{u}_1) + H_{A'}(-\bar{u}_1)}{H_{B_1}(\bar{u}_1)}.$$

Так как A — компактное тело, то каждое из множеств $T_{A'}(\bar{u}_1)\bigcap A$ и $T_{A'}(-u_1)\bigcap A$ не является пустым. Пусть $\bar{a}_1 \in T_{A'}(-\bar{u}_1)\bigcap A$ и $\bar{a}_2 \in T_{A'}(\bar{u}_1)\bigcap A$. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, придем к неравенству

$$D_{B_1}(A') \le \rho_{B_1}(\bar{a}_1,\bar{a}_2) \le D_{B_1}(A) = D_B(A).$$

Применяя теперь теорему 2 к выпуклому компактному телу A' в M^n с нормирующим телом B и учитывая, что $D_B(A) = D_{B_1}(A') = D_B(A')$, $V_B(A) \le V_B(A')$, придем к утверждению теоремы 3.

Замечание. Покажем, что из неравенства (9) следуют неравенство (3) и условие равенства нулю левой части в (3), т.е. покажем, что (9) действительно является уточнением (3).

Так как величины $D_B(A)$, $V_B(A)$, $V_B(A')$, $q(A',B_1)$ инвариантны относительно параллельных сдвигов тела A в M^n, можем считать, что $q(A',B_1)B_1 \subset A'$. Из этого включения следует, что $D_B(A) = D_{B_1}(A') \ge D_{B_1}\left(q(A',B_1)B_1\right) = 2q(A',B_1)$. Поэтому правая часть в неравенстве (9) неотрицательна. Заменяя правую часть в (9) нулем, придем к (3). Итак, (3) — следствие (9).

Покажем теперь, что (9) дает возможность решить вопрос о том, в каком случае левая часть (3) равна нулю. Предположим, что левая часть (3) равна нулю, т.е.

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} = 0. \tag{10}$$

Тогда и левая часть в (9) равна нулю. Следовательно, и правая часть в (9) в силу ее неотрицательности равна нулю. Это приводит к равенству

$$D_B(A) = 2q(A',B_1).$$

Предполагая, что $q(A',B_1)B_1 \subset A'$, покажем, что $A' = q(A',B_1)B_1$. Действительно, если $A' \neq q(A',B_1)B_1$, то найдется точка $\bar{a} \in A'$ такая, что $\bar{a} \,\bar{\in}\, q(A',B_1)B_1$. Пусть прямая l проходит через точки o и a и пересекает границу тела A' в точках $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Если $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ — точки пересечения прямой l с границей тела $q(A',B_1)B_1$, то

$$\rho_{B_1}(\bar{a}_1,\bar{a}_2) > \rho_{B_1}(\bar{b}_1,\bar{b}_2) = 2q(A',B_1) = D_B(A) = D_{B_1}(A').$$

Последнее неравенство противоречит определению $D_{B_1}(A')$. Следовательно, $A' = q(A',B_1)B_1$.

Убедимся теперь, что $A = A'$. Если $A \neq A'$, то из того, что A — компактное собственное тело, A' — выпуклое тело и $A \subset A'$, вытекает $V_B(A) < V_B(A')$. Тогда

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} > \left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A')}{V_B(B_1)}.$$

Из (9) следует, что правая часть последнего неравенства неотрицательна. Поэтому

$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} > 0,$$

что противоречит предположению (10). Следовательно, (10) для собственного компактного тела A в M^n имеет место тогда и только тогда, когда $A = q(A,B_1)B_1$, т.е. когда A положительно гомотетично телу B_1.

Список литературы

1. *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen. Leipzig-Berlin (1910), 256 p.
2. *T. Bonnesen, W. Fenchel*, Theorie der Konvexen Körper. Springer, Berlin (1934), 164 p.
3. *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985), 336 с.
4. *L. Bieberbach*, Über eine Extremaleigenschaft des Kreises.— Iber dtsch. Math. Ver. (1915), Bd. 24, S. 247—250.
5. *W. Barthel*, Zur isodiametrischen und isoperimetrischen Ungleichung in der Relativ Geometrie.— Comment. Math. Helv. (1959), v. 33, p. 241—257.
6. *W. Barthel, H. Pabel*, Das isodiametrische Problem der Minkowski -Geometrie.— Result. Math. (1987), v. 12, № 3–4, p. 252—267.
7. *Г. Хадвигер*, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. Наука, Москва (1966), 416 с.
8. *А. Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел.— Мат. сб. (1938), т. 3, № 1, с. 27—44.
9. *В. И. Дискант*, Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел.— Тр. ин-та матем. СО АН СССР (1989), т. 14, с. 98—132.
10. *А. Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел.— Мат. сб. (1937), т. 2, № 6, с. 1205—1235.

Improvement of the isodiametral inequality in the Minkowski geometry

V. I. Diskant

More precise isodiametral inequality for a compact body in the Minkowski geometry with non-symmetric metric is obtained. It is shown that its consequences are both the isodiametral inequality and the equality condition in it which were proved in 1987 by W. Barthel and H. Pabel.