Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 2, с.227–231 УДК 514

Структура кривизны риманова многообразия с аксиомой гиперплоскостей

С. И. Окрут

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 15 декабря 1993 г.

Рассматривается обобщение аксиомы плоскостей Картана. Если каждое l-мерное (l-фиксированное) подпространство каждого касательного пространства содержится в касательном подмногообразии коразмерности 1, то такое риманово многообразие удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей, по определению. Дается описание таких многообразий в терминах строения кривизны.

Розглядається узагальнення аксіоми площин Картана. Якщо кожний l-вимірний підпростір (l-фіксоване) кожного дотичного простору міститься в дотичному простору підмноговиду ковимірності 1, то такий многовид за означенням задовольняє аксіому l-гіперплощин. Дається опис таких многовидів в термінах оператора кривини.

Гиперплоскостью в римановом многообразии будем называть вполне геодезическое подмногообразие коразмерности единица. Будем говорить, что риманово многообразие M^n удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскости ($1 \le l$-фиксированное $\le n-1$), если для любой точки x из M и для любого l-мерного подпространства Q, принадлежащего $T_x M$, существует гиперплоскость W, проходящая через x, такая, что Q содержится в $T_x W$. В работе [1] автором была подробно изучена аксиома $(n-2)$-гиперплоскостей.

Было показано, что в "точках общего положения" риманова метрика многообразия, удовлетворяющего аксиоме $(n-2)$-гиперплоскостей, является скрещенным произведением пространства постоянной кривизны на прямую. Было показано также, что тензор кривизны в любой точке риманова многообразия с аксиомой $(n-2)$-гиперплоскостей обладает специальной структурой. В этой работе полученные ранее результаты обобщаются на случай, когда l не обязательно равно $n-2$.

Многообразие M^n и риманова метрика на нем предполагаются гладкими (класса C^∞), а обозначения соответствуют принятым в [2]. Кроме того, если Ψ и Φ два подпространства в одном касательном пространстве, то обозначение $k(\Psi \wedge \Phi) = k$ означает, что значения секционных кривизн $k(X \wedge U)$ равны одному и тому же числу k независимо от выбора X из Ψ и U из Φ. То же соглашение действует и в тензорных выражениях, где вместо векторов стоят подпространства. Для произвольного тензора R, обладающего теми же алгебраическими свойствами, что и оператор преобразования кривизны риманова многообразия, назовем вектор X R-замкнутым, если для любых векторов U и V из ортогонального дополнения к X выполняется равенство $R(U,V)X = 0$. Для фиксированного вектора Z ковариантная производная оператора преобразования кривизны $(\nabla_Z R)(\cdot,\cdot)$ имеет тот же тип, что и тензор R, а также обладает теми же алгебраическими свойствами, что и R.

Теорема 1. *Если риманово многообразие M удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей, то в каждой точке x из M имеется прямое ортогональное разложение*

$$T_x M = \Psi \overset{\perp}{\oplus} \Phi_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \Phi_m, \tag{1}$$

$$k(\Psi \wedge \Psi) = k, \qquad k(\Psi \wedge \Phi_\alpha) = \kappa_\alpha, \qquad R(\Psi,\Psi)\Phi_\alpha = 0, \tag{2}$$

$$(\nabla_{\Phi_\alpha} R)(\Psi,\Psi)\Phi_\beta = 0, \tag{3}$$

где $\dim \Psi > l$, $\dim \Phi_\alpha = 1$, $(\alpha,\beta = 1,\ldots,m)$.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма [1]. *Если X и Y — неколлинеарные и неортогональные R-замкнутые векторы из одного касательного пространства, то каждый вектор из линейной оболочки $L = L(X,Y)$ является R-замкнутым и для любых единичных векторов Z и W из L и для любого вектора U из ортогонального дополнения $L^\perp$ выполняется равенство $R(U,Z)Z = R(U,W)W$.*

Доказательство теоремы. Из условия выполнения аксиомы l-гиперплоскостей следует, что в каждой точке x из M существует набор взаимно ортогональных гиперплоскостей W_i $(i = 1,\ldots, s > l)$, и будем считать этот набор в точке x максимальным. Пусть X_i — ортогональные к W_i векторы в точке x. Так как $s > l$, то существует ненулевое подпространство Q, натянутое на векторы $V_1,\ldots,V_{s-l}$ из линейной оболочки $L = L(X_1,\ldots,X_s)$ такого положения, что для всевозможных наборов $X_{i_1},\ldots,X_{i_{s-l}}$ выполняется условие

$$\langle V_1 \wedge \ldots \wedge V_{s-l}, X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_{s-l}} \rangle \neq 0, \tag{4}$$

т.е. в Q не существует векторов, ортогональных одновременно хотя бы одному набору из $s - l$ векторов X_i, в частности, Q не содержит ни одного вектора X_i. Подпространство $Q + L^\perp$ имеет размерность $n - l$. По аксиоме l-гиперплоскостей существует гиперплоскость такая, что ортогональный ей вектор Z лежит в $Q + L^\perp$. В разложении $Z = V + a^i X_i$, где V из $L^\perp$, не все a^i равны нулю, так как по построению набор взаимно ортогональных гиперплоскостей максимальный. Из (4) следует, что существует не менее $l + 1$ коэффициентов a^j, отличных от нуля (для определенности можно считать $j = 1,\ldots,l + 1$). Положим $\Psi = L(X_1,\ldots,X_{l+1},Z)$, тогда $\dim \Psi > l$, причем для любого X_i из Ψ, $\langle Z, X_i \rangle \neq 0$, пары векторов Z и X_i неколлинеарные и по построению являются R-замкнутыми, а также $(\nabla_U R)$-замкнутыми для U из $\Psi^\perp$. Из леммы следует, что все векторы из Ψ являются R-замкнутыми и $(\nabla_U R)$-замкнутыми, а также выполняются следующие равенства:

$$k := k(X \wedge Y) = \langle R(X,Y)Y,X \rangle = \langle R(X,Z)Z,X \rangle = \langle R(Z,W)W,Z \rangle = k(Z \wedge W),$$

где X, Y и Z, W — любые пары ортов из Ψ такие, что $\langle X,Z \rangle = 0$. В любой паре плоскостей из Ψ всегда можно выбрать такие векторы X и Z. Так как самосопряженные операторы $R(\cdot,X)X$ и $R(\cdot,Z)Z$, суженные на $\Psi^\perp$, по лемме совпадают для любых ортов Y и Z из Ψ, то они имеют общие единичные собственные векторы U_α, отвечающие общим собственным значениям κ_α. Определеим $\Phi_\alpha = L(U_\alpha)$.

$$\kappa_\alpha := k(U_\alpha \wedge Y) = \langle R(U_\alpha,Y)Y,U_\alpha \rangle = \langle R(U_\alpha,Z)Z,U_\alpha \rangle = k(U_\alpha \wedge Z).$$

Для любых ортогональных векторов X и Y из Ψ, используя R-замкнутость и $(\nabla_U R)$-замкнутость X и Y, получим

$$R(X,Y)V = R(V,Y)X + R(X,V)Y = 0,$$
$$(\nabla_U R)(X,Y)V = (\nabla_U R)(V,Y)X + (\nabla_U R)(X,V)Y = 0$$

для любых векторов U и V из $\Psi^\perp$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть M^n — риманово многообразие, касательное расслоение которого разлагается в прямую ортогональную сумму гладких распределений $TM = \Psi \overset{\perp}{\oplus} \Phi_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \Phi_{n-l-1}$ таких, что $\dim \Phi_\alpha = 1$, $1 \le l \le n-1$, причем в каждой точке M выполняются условия (2), (3) и к тому же $k \ne \kappa_\alpha$ для любого α. Тогда риманово многообразие M удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей.*

Доказательство. Пусть U_α — единичное векторное поле из распределения Φ_α, а X, Y, Z — единичные ортогональные векторные поля из распределения Ψ. Из второго тождества Бьянки $S_{X,U_\alpha,Y}(\nabla_X R)(U_\alpha,Y)Z = 0$, произведя дифференцирование и применив выражение для R

$$R(X,A)B = \langle B,JA \rangle X - \langle B,X \rangle JA, \tag{5}$$

эквивалентное условию (2), где $JA := \sum_\alpha \kappa_\alpha \mathrm{pr}_\alpha A + k \,\mathrm{ort}\, A$, pr_α и ort суть операторы проектирования на Φ_α и Ψ соответственно, получим

$$(\kappa_\alpha - k)\langle \nabla_X Z,U_\alpha \rangle Y - (\kappa_\alpha - k)\langle \nabla_Y Z,U_\alpha \rangle X = 0.$$

Так как X и Y линейно независимые и $\kappa_\alpha \ne k$, то

$$\langle \nabla_X Z,U_\alpha \rangle = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что распределение Ψ инволютивное. Второе тождество Бьянки $S_{X,U_\alpha,Y}(\nabla_X R)(U_\alpha,Y)Y = 0$ с учетом (5) и (6) эквивалентно выражению

$$(\kappa_\alpha - k)\,\mathrm{ort}\,\nabla_X U_\alpha + \Big(X\kappa_\alpha + (\kappa_\alpha - k)\,\langle \nabla_{U_\alpha} X,U_\alpha \rangle\Big) U_\alpha +$$
$$+ \Big((\kappa_\alpha - k)\langle \nabla_Y U_\alpha,Y \rangle - U_\alpha k\Big) X = 0$$

или, учитывая линейную независимость полей U и X, это эквивалентно

$$X\kappa_\alpha + (\kappa_\alpha - k)\,\langle \nabla_{U_\alpha} X,U_\alpha \rangle = 0, \tag{7}$$

$$\langle \nabla_X U_\alpha, X \rangle + \langle \nabla_Y U_\alpha, Y \rangle = \frac{U_\alpha k}{\kappa_\alpha - k} =: 2f_\alpha . \tag{8}$$

Так как поля $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ также единичные и ортогональные, то применяя (6), получим

$$\frac{1}{2}\Big(\langle \nabla_X U_\alpha, X \rangle - \langle \nabla_Y U_\alpha, Y \rangle\Big) = \frac{1}{2}\langle \nabla_{X+Y} U_\alpha, X - Y \rangle = 0. \tag{9}$$

Из (6), (8) и (9) следует, что

$$\nabla_X U_\alpha = f_\alpha X + \sum_\beta \mathrm{pr}_\beta \nabla_X U_\alpha , \tag{10}$$

$$\alpha(X,Y) = -\langle X,Y \rangle \sum_\beta f_\beta U_\beta , \tag{11}$$

где α — вторая основная форма для интегрального многообразия распределения Ψ. Уравнение Гаусса для интегрального многообразия приводит к выражению $k(X \wedge Y) = k + \sum_\alpha f_\alpha^2$ для секционной кривизны в индуцированной римановой метрике. Если $l \geq 2$, то по теореме Шура интегральные многообразия M_c являются пространствами постоянной кривизны $c = k + \sum_\alpha f_\alpha^2$ в индуцированной метрике. Из условия теоремы $(\nabla_{U_\alpha} R)(X,Y)U_\beta = 0$, что эквивалентно

$$(k - \kappa_\beta)\Big(\langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, X \rangle Y - \langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, Y \rangle X\Big) = 0,$$

и в силу независимости векторов X и Y, а также в силу того, что $k \neq \kappa_\alpha$, последнее влечет за собой инволютивность распределения $\sum_\alpha \Phi_\alpha$ и вполне геодезичность его интегральных многообразий. Отсюда, учитывая (10), получаем

$$\nabla_X U_\alpha = f_\alpha X. \tag{12}$$

Пусть M_c — интегральное многообразие для Ψ через некоторую точку x из M. Пусть x^i — координаты в M_c, а u^α — координаты в ортогональном слоении. Тогда первая квадратичная форма в окрестности M имеет вид

$$ds^2 = dl^2(u^1,\dots,u^{n-l-1}) + g_{ij}dx^i dx^j .$$

Из (12) следует, что $g_{ij}(x,u) = g_{ij}(x,0)\varphi^2(u)$. Таким образом, M есть скрещенное произведение произвольного $(n - l - 1)$-мерного риманова многообразия на пространство постоянной кривизны, если $l \geq 2$, и M есть скрещенное произведение произвольного риманова многообразия на двумерное риманово многообразие, если $l = 1$. Как известно [1], такие римановы многообразия удовлетворяют аксиоме l-гиперплоскостей. Теорема доказана.

Список литературы

1. *С. И. Окрут*, Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей.— Укр. геометр. сб. (1992), вып. 35, с. 103—110.
2. *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Наука, Москва (1981), т. 1, 344 с.

Curvature structure of a Riemannian manifold with the axiom of hyperplanes

S. I. Okrut

The generalization of the Cartan's axiom of planes is considered. By definition, a Riemannian manifold satisfies the axiom of l-hyperplanes (with l fixed) if its every l-dimensional tangent subspace contains in the tangent space of a totally geodesic submanifold. Description of such manifolds is given in terms of the structure of the curvature operator.