Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 505–512

УДК 514

Псевдосферические конгруенции Бианки в E^{2n-1}

Л. А. Масальцев

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

Рассмотрены псевдосферические преобразования Бианки, т.е. отображения n-мерных поверхностей постоянной отрицательной кривизны в E^{2n-1}. Изучены свойства векторного поля $\pi\tau$ на L^n, которое является проекцией поля $\tau: L^n \to L^n_\tau$, порождающего псевдосферическую конгруенцию Бианки.

Розглянуто псевдосферичні перетворення Біанкі, тобто відображення n-вимірних поверхонь сталоі від'емноі кривини в E^{2n-1}. Вивчено властивості векторного поля $\pi\tau$ на L^n, яке є проекцією поля $\tau: L^n \to L^n_\tau$, породжуючого псевдосферичну конгруенцію Біанкі.

1. Введение

В дифференциальной геометрии известно преобразование Бианки [1], которое переводит поверхность F постоянной отрицательной кривизны -1 в поверхность F' в трехмерном евклидовом пространстве E^3. При этом преобразовании каждой точке $p \in F$ соответствует точка $p' \in F'$ так, что выполнены следующие условия:

1) расстояние в E^3 между p и p' равно единице: $|pp'| = 1$;

2) $\angle(\pi, \pi') = 90°$, где π и π' — касательные плоскости к F и F' в точках p и p' соответственно;

3) $pp' \in \pi \cap \pi'$.

Бианки доказал, что при этих условиях поверхность F' также имеет постоянную отрицательную кривизну -1. В работе [2] Ю. А. Аминов установил аналогичное свойство в применении к области n-мерного пространства Лобачевского постоянной отрицательной секционной кривизны -1, лежащей в $(2n-1)$-мерном евклидовом пространстве E^{2n-1}. Это преобразование определяется следующим образом. Пусть $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ — радиус-вектор области подмногообразия Лобачевского $L^n \subset E^{2n-1}$, u_i — полугеодезические координаты, в которых линейный элемент L^n имеет вид $ds^2 = e^{2u_n}(du_1^2 + \ldots + du_{n-1}^2) + du_n^2$. Тогда многомерное преобразование Бианки–Аминова подмногообразия $x(L^n)$ ставит ему в соответствие подмногообразие $\bar{x}(\bar{L}^n)$ по формуле $\bar{x} = x - x_{u_n}$. Поскольку линия u_n является геодезической L_n, то можно сказать, что преобразование Бианки–Аминова задается дифференцированием вдоль семейства геодезических линий, ортогональных некоторой орисфере L^n. При этом, как доказано в [2], $\bar{x}(\bar{L}^n)$ также имеет постоянную отрицательную секционную кривизну -1 и плоскость, нормальная к $x(L^n)$, лежит в касательной плоскости $\bar{x}(\bar{L}^n)$.

В работе [3] К. Тененблат и Ч. Л. Тернг изучали теорию линейных псевдосферических конгруенций между двумя n-мерными подмногообразиями M и M' в E^{2n-1}. Под линейной конгруенцией между M и M' в E^{2n-1} понимают диффеоморфизм l: $M \to M'$ такой, что для $p \in M$ прямая, соединяющая p и $p' = l(p)$, есть общая касательная к подмногообразиям M и M'. Для линейной конгруенции $l: M \to M'$ между двумя n-подмногообразиями в E^{2n-1} нормальные плоскости ν_p и $\nu_{p'}$ в соответствующих точках p и p' имеют размерности $n-1$ и обе ортогональны прямой pp'. Значит, ν_p и $\nu_{p'}$ лежат в $(2n-2)$-мерном подпространстве и между ними существует $n-1$ экстремальных значений углов. Согласно [3], линейная конгруенция $l: M \to M'$ называется псевдосферической, если:

1) расстояние $|pp'|$ постоянно и равно r;

2) $n-1$ углов между ν_p и $\nu_{p'}$ одинаковы и равны постоянному значению θ.

В работе [3] доказано, что если имеется псевдосферическая конгруенция $l: M \to M'$ между двумя n-подмногообразиями в E^{2n-1} с постоянным расстоянием r и углом θ между соответствующими нормальными плоскостями, то оба подмногообразия имеют постоянную отрицательную секционную кривизну $-\sin^2\theta/r^2$.

В настоящей статье изучаются псевдосферические конгруенции, для которых угол θ имеет постоянную величину, равную 90°. Мы называем такие линейные конгруенции в E^{2n-1} псевдосферическими конгруенциями Бианки.

2. Основные уравнения погружения L^n в E^{2n-1} и теорема существования

В работах Ю. А. Аминова [4,5] установлена основная система погружений L^n в E^{2n-1}. Доказано, что в области L^n можно ввести локальные координаты $u_1,\dots,u_n$, являющиеся линиями кривизны, в которых метрику погруженной области можно записать в виде $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} H_i^2\, du_i^2$, причем $\sum_{i=1}^{n} H_i^2 = 1$. Обозначим через $\beta_{ij} = \dfrac{\partial H_j}{\partial u_i}/H_i$, $i \neq j$, так называемые символы Дарбу [7, с. 148]. Тогда система уравнений относительно неизвестных H_i и β_{ij} решает задачу локального аналитического погружения L^n в E^{2n-1} [5]:

$$\begin{gathered}
a)\ \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \qquad b)\ \frac{\partial H_k}{\partial u_k} = -\sum_q \beta_{kq} H_q, \quad q \neq k, \qquad c)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_j} = \beta_{ij}\beta_{jk}, \\
d)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} = -\sum_j \beta_{ij}\beta_{kj}, \qquad e)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum \beta_{ji}\beta_{jk} = H_i H_k,
\end{gathered} \tag{1}$$

где индексы i, j и k различные и принимают значения от 1 до n. Пусть τ_i, $i = 1,\dots,n$, — орты главных направлений $L^n \subset E^{2n-1}$ в точке $p \in L^n$, ξ_i — единичные векторы в нормальном пространстве ν_p, направленные по i-ому главному вектору нормальной кривизны. В работе [6] найдены разложения Гаусса для вторых производных радиуса-вектора погружения L^n в E^{2n-1} в линиях кривизны

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial u_j} = \beta_{ij}\tau_j, \qquad \frac{\partial \tau_i}{\partial u_i} = -\sum_j \beta_{ji}\tau_j + h_i \xi_i, \qquad j \neq i, \tag{2}$$

где $h_i = \cos\sigma_i$, $H_i = \sin\sigma_i$, $i = 1,\dots,n$. Рассмотрим теперь преобразование подмногообразия $x(L^n)$ постоянной отрицательной кривизны -1 в подмногообразие $\bar{x}\,(L^n_\tau)$ по формуле $\bar{x}_\tau = x + \tau$, где $\tau = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tau_j$, $\sum \alpha_j^2 = 1$. Дифференцируя $\bar{x}_\tau$ с учетом (2), получим

$$\bar{x}_{\tau u_i} = x_{u_i} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ju_i}\tau_j + \alpha_i\Big(-\sum_{j\neq i}\beta_{ji}\tau_j + h_i\xi_i\Big) + \sum_{j\neq i}\alpha_j\beta_{ji}\tau_i. \tag{3}$$

В касательном пространстве $TL^n p$ выберем базис (неортонормированный) из векторов: $\tau, \tau_1^\perp,\dots,\tau_{n-1}^\perp$, где $\tau_k^\perp = \alpha_{k+1}\tau_k - \alpha_k\tau_{k+1}$. При таком выборе $(\tau, \tau_k^\perp) = 0$, $k = 1,\dots,n-1$. Для того чтобы поле векторов τ задавало псевдосферическую конгруенцию Бианки $\tau : L^n \to L^n_\tau$ в E^{2n-1}, необходимо выполнение условий: 1) $\tau \in TL^n_{\tau p'}$; 2) $\tau_i^\perp\ TL^n_{\tau p'}$. Первое условие означает, что вектор τ, направленный вдоль прямой pp', является касательным к L^n_τ в точке p', а второе равносильно тому, что нормальные пространства ν_p и $\nu_{p'}$ подмногообразий L^n и L^n_τ ортогональны в E^{2n-1}. Запишем условие 2) в виде системы уравнений $(\tau_k^\perp, \bar{x}_{\tau u_i}) = 0$, $k = 1,\dots n-1$, $i = 1,\dots n$. Используя (3), получим $n(n-1)$ уравнений относительно α_{ju_i}:

$$a)\ \alpha_{k+1}\Big(\sin\sigma_k + \sum_{j\neq k}\alpha_j\beta_{jk}\Big) + \alpha_k^2\beta_{k+1\,k} + \alpha_{k+1}\alpha_{ku_k} - \alpha_k\alpha_{k+1u_k} = 0,$$

$$b)\ \alpha_k\Big(\sin\sigma_{k+1} + \sum_{j\neq k}\alpha_j\beta_{jk+1}\Big) + \alpha_{k+1}^2\beta_{kk+1} + \alpha_k\alpha_{k+1u_{k+1}} - \alpha_{k+1}\alpha_{ku_{k+1}} = 0$$

$$c)\ \alpha_{k+1}\alpha_{ku_i} - \alpha_k\alpha_{k+1u_i} + \alpha_i(\beta_{k+1i}\alpha_k - \beta_{ki}\alpha_{k+1}) = 0,$$

$$k = 1,\dots n-1,\quad i = 1,\dots\hat{k}, \widehat{k+1},\dots n.$$

Знак $\wedge$ означает пропуск находящихся под ним индексов. Добавим к данным уравнениям еще n уравнений, которые получаются дифференцированием тождества $\sum\alpha_i^2 = 1$ по u_k:

$$\text{d)}\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_{iu_k} = 0,\quad k = 1,\dots n.$$

Таким образом, получается системы n^2 дифференциальных уравнений относительно α_{ju_i} неизвестных $(i,j = 1,\dots n)$. Она может быть разрешена относительно этих неизвестных:

$$\alpha_{iu_i} = -\sin\sigma_i\sum_{j\neq i}\alpha_j^2 - \sum_{j\neq i}\alpha_j\beta_{ji},$$

$$\alpha_{iu_j} = \alpha_j(\alpha_i\sin\sigma_j + \beta_{ij}). \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что условия интегрируемости данной системы $(\alpha_{iu_j})_{u_k} = (\alpha_{iu_k})_{u_j}$ выполнены в силу самой системы (4) и основной системы погружений (1). Таким образом, существует локально векторное поле $\tau = \sum \alpha_i \tau_i$, задающее псевдосферическую конгруенцию Бианки. Остается проверить выполнение условия 1). Если подставить значения α_{iu_j} из (4) в (3), то получим

$$\bar{x}_{\tau u_i} = \alpha_i (\sin \sigma_i \tau + \cos \sigma_i \xi_i). \tag{5}$$

В [5, с. 408] доказано, что $\sum \sin \sigma_i \cos \sigma_i \xi_i = 0$, поэтому вектор τ выражается через $\{ \bar{x}_{\tau u_i} \}$ следующим образом:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{\tau u_i} \sin \sigma_i / \alpha_i. \tag{6}$$

Мы видим, что вектор τ определяет псевдосферическую конгруенцию Бианки при условии $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,\ldots n$, как и указано в работе [3]. Метрика L^n_τ имеет вид

$$ds^2 (L^n_\tau) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, du_i^2. \tag{7}$$

Из [5] следует также, что векторы $\tau_i^{\perp} / | \tau_i^{\perp} |$, $i = 1,\ldots n - 1$ являются нормалями подмногообразия L^n_τ в соответствующей точке. Изложенное выше является упрощенной версией доказательства теоремы 5 из работы К. Тененблат и Е. Тернг для случая $\theta = 90°$. Для полноты изложения сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 1 [3]. *Пусть L^n — область подмногообразия постоянной отрицательной секционной кривизны -1 в E^{2n-1}. Пусть $\{ \tau_{10},\ldots,\tau_{n0} \}$ — ортонормированный базис пространства, касательного к L^n в точке p_0, и $\tau_0 = \sum \alpha_i \tau_{i0}$ — единичный вектор с $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда существует локально n-подмногообразие $L^n_\tau \subset E^{2n-1}$ и псевдосферическая конгруенция Бианки $\tau : L^n \to L^n_\tau$ такая, что $pp'_0 = \tau_0$, где $p'_0 \in L^n_\tau$, и базис $\{ \tau_i \}$ состоит из ортов, направленных вдоль линий кривизны L^n в E^{2n-1}.*

Согласно теореме 4 из [3], подмногообразие L^n_τ имеет постоянную отрицательную секционную кривизну -1.

3. Проектирование конгруенции $\tau : L^n \to L^n_\tau$ на L^n

Векторное поле $\tau = \sum \alpha_i \tau_i$ с α_i-решениями системы уравнений (4) представляет собой поле в E^{2n-1} касательных к L^n векторов. Рассмотрим теперь L^n как риманово пространство с метрикой $ds^2 (L^n) = \sum \sin^2 \sigma_i \, du_i^2$ и определим проекцию поля $\tau = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ как векторное поле $\pi\tau = \left(\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\sin\sigma_n}\right)$ в координатах $\{u_i\}$ на L_n. Смысл подобного определения состоит в том, что поле $\pi\tau$ образует с единичными ортами системы координат $\{u_i\}$ на L^n такие же углы, как и поле τ с ортами τ_i в E^{2n-1}, т.е. можно говорить о свойстве конформности данной операции проектирования.

Изучим свойства поля $\pi\tau$, которое является проекцией поля τ, порождающего псевдосферическую конгруенцию Бианки, т.е. координаты которого α_i удовлетворяют системе уравнений (4).

Лемма 1. *Поле $\pi\tau$ голономно в L^n.*

Доказательство. Вместе с полем $\pi\tau = \left(\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\sin\sigma_n}\right)$ рассмотрим ортогональные ему в метрике L^n поля $\pi\tau_k^{\perp} = \left(0, \ldots, \frac{\alpha_{k+1}}{\sin\sigma_k}, -\frac{\alpha_k}{\sin\sigma_{k+1}}, \ldots\right)$, $k = 1, \ldots n-1$. Известно, что поле $\pi\tau$ голономно, когда скобка Пуассона $\nabla(\pi\tau_k^{\perp}, \pi\tau_i^{\perp})$ для любых индексов $1 \le i < k \le n-1$ ортогональна полю $\pi\tau$ [8]. Следовательно, для доказательства достаточно проверить справедливость равенств

$$(\nabla(\pi\tau_k^{\perp}, \pi\tau_i^{\perp}), \pi\tau)_{L^n} = 0, \quad 1 \le i < k \le n-1.$$

Здесь можно рассмотреть два случая: 1) $i+1 = k$ и 2) $i+1 < k$. Разберем, например, второй случай. Не ограничивая общности, можно считать $i = 1$, $k = 3$. Имеем:

$$\pi\tau_1^{\perp} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots) = \left(\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}, -\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}, 0, \ldots\right),$$

$$\pi\tau_3^{\perp} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots) = \left(0, 0, \frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}, -\frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}, 0\ldots\right),$$

$$\nabla(\pi\tau_1^{\perp}, \pi\tau_3^{\perp}) = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\psi_j - \frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}\varphi_j\right)\frac{\partial}{\partial u_i} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}\right) - \frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}\frac{\partial}{\partial u_4}\left(\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_1} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(-\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_2}\right) - \frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}\frac{\partial}{\partial u_4}\left(\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_2} +$$

$$+ \left(-\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_2}\right) + \frac{\alpha_1}{\sin\sigma_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_3} +$$

$$+\left(-\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}\right)+\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_4}=$$

$$=\left(\alpha_3\alpha_4\left(\frac{\beta_{23}}{\sin\sigma_3}-\frac{\beta_{24}}{\sin\sigma_4}\right)+\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}(\alpha_3\beta_{41}-\alpha_4\beta_{31})\right)\frac{1}{\sin\sigma_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+$$

$$+\left(\alpha_3\alpha_4\left(\frac{\beta_{14}}{\sin\sigma_4}-\frac{\beta_{13}}{\sin\sigma_3}\right)+\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_2}(\alpha_4\beta_{32}-\alpha_3\beta_{42})\right)\frac{1}{\sin\sigma_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+$$

$$+\left(\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\beta_{42}}{\sin\sigma_2}-\frac{\beta_{41}}{\sin\sigma_1}\right)+\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}(\alpha_2\beta_{13}-\alpha_1\beta_{23})\right)\frac{1}{\sin\sigma_3}\frac{\partial}{\partial u_3}+$$

$$+\left(\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\beta_{31}}{\sin\sigma_1}-\frac{\beta_{32}}{\sin\sigma_2}\right)+\frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}(\alpha_1\beta_{24}-\alpha_2\beta_{14})\right)\frac{1}{\sin\sigma_4}\frac{\partial}{\partial u_4},$$

$$\left(\nabla(\pi\tau_1^{\perp},\pi\tau_3^{\perp}),\pi\tau\right)=\alpha_1\left(\alpha_3\alpha_4\left(\frac{\beta_{23}}{\sin\sigma_3}-\frac{\beta_{24}}{\sin\sigma_4}\right)+\frac{\alpha_2}{\sin\sigma_1}(\alpha_3\beta_{41}-\alpha_4\beta_{31})\right)+$$

$$+\alpha_2\left(\alpha_3\alpha_4\left(\frac{\beta_{14}}{\sin\sigma_4}-\frac{\beta_{13}}{\sin\sigma_3}\right)+\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_2}(\alpha_4\beta_{32}-\alpha_3\beta_{42})\right)+$$

$$+\alpha_3\left(\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\beta_{42}}{\sin\sigma_2}-\frac{\beta_{41}}{\sin\sigma_1}\right)+\frac{\alpha_4}{\sin\sigma_3}(\alpha_2\beta_{13}-\alpha_1\beta_{23})\right)+$$

$$+\alpha_4\left(\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\beta_{31}}{\sin\sigma_1}-\frac{\beta_{32}}{\sin\sigma_2}\right)+\frac{\alpha_3}{\sin\sigma_4}(\alpha_1\beta_{24}-\alpha_2\beta_{14})\right)=0.$$

Аналогично можно проверить первый случай.

Линия тока поля $\pi\tau$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений на L^n:

$$\frac{du^i}{ds}=\xi^i(u_1,\ldots u_n),\quad i=1,\ldots n.$$

Для вектора главной кривизны линии тока имеем $D\xi^i=k\nu^i\,ds$, где $D\xi^i$ — абсолютный дифференциал ξ^i, k — кривизна линии тока, ν^i — компоненты главной нормали линии тока. Отсюда получаем

$$k\nu^i=\frac{D\xi^i}{ds}=\frac{d\xi^i}{ds}+\Gamma^i_{kp}\xi^k\xi^p=\frac{d\xi^i}{du_j}\frac{du^j}{ds}+\Gamma^i_{kp}\xi^i\xi^p=\xi^i_{u_j}\xi^j+\Gamma^i_{kp}\xi^k\xi^p,$$

где Γ^i_{kp} — символы Кристоффеля метрики L^n.

Лемма 2. *Кривизна линии тока поля $\pi\tau$ равна* 0.

Для доказательства вычислим, например, $\frac{D\xi^1}{ds}$. используем (4) и выражения символов Кристоффеля метрики $ds^2=\sum\sin^2\sigma_i\,du_i^2$ [7, с. 60],

$$\Gamma^i_{\kappa p} = 0; \quad \Gamma^1_{\kappa\kappa} = -\frac{\sin\sigma_k}{\sin\sigma_1}\beta_{1k} \quad (k \neq 1);$$

$$\Gamma^1_{1\kappa} = \frac{\sin\sigma_k}{\sin\sigma_1}\beta_{k1}; \quad \Gamma^1_{11} = -\frac{1}{\sin\sigma_1}\left(\sum\beta_{1q}\sin\sigma_q\right).$$

Имеем:

$$\frac{D\xi^1}{ds} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}\right)\frac{\alpha_j}{\sin\sigma_j} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin\sigma_k}{\sin\sigma_1}\beta_{k1}\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}\frac{\alpha_k}{\sin\sigma_k} +$$

$$+\frac{1}{\sin\sigma_1}\frac{\partial\sin\sigma_1}{\partial u_1}\left(\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}\right)^2 - \sum_{k=2}^{n}\frac{\sin\sigma_k}{\sin\sigma_1}\beta_{1k}\left(\frac{\alpha_k}{\sin\sigma_k}\right)^2 =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_j}{\sin\sigma_j}\frac{1}{\sin^2\sigma_1}\frac{\partial\sin\sigma_1}{\partial u_j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\sin\sigma_j\sin\sigma_1}(\alpha_1)u_j +$$

$$+2\sum_{k=2}^{n}\frac{\beta_{k1}\alpha_1\alpha_k}{\sin^2\sigma_1} - \sum_{k=2}^{n}\beta_{1k}\frac{\alpha_k^2}{\sin\sigma_1\sin\sigma_k} + \frac{\alpha_1^2}{\sin^3\sigma_1}\frac{\partial\sin\sigma_1}{\partial u_1} =$$

$$= -\sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_j}{\sin^2\sigma_1}\beta_{j1} + \frac{\alpha_1}{\sin^2\sigma_1}\left(-\sin\sigma_1\left(\sum_{j=2}^{n}\alpha_j^2\right) - \sum_{j=2}^{n}\alpha_j\beta_{j1}\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_j}{\sin\sigma_j\sin\sigma_1}\alpha_j(\alpha_1\sin\sigma_j + \beta_{1j}) + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_k\beta_{k1}}{\sin^2\sigma_1} -$$

$$-\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k^2\beta_{1k}}{\sin\sigma_k\sin\sigma_1} = -\frac{\alpha_1}{\sin\sigma_1}\sum_{j=2}^{n}\alpha_j^2 - 2\sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_j\beta_{j1}}{\sin^2\sigma_1} +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_j^2}{\sin\sigma_1} + \sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_j^2\beta_{1j}}{\sin\sigma_j\sin\sigma_1} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_1\alpha_k\beta_{k1}}{\sin^2\sigma_1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k^2}{\sin\sigma_1\sin\sigma_k}\beta_{1k} = 0.$$

Следовательно, линии тока поля $\pi\tau$ являются геодезическими L^n.

Гиперповерхность $F^{n-1} \subset L^n$, которая ортогональна полю $\pi\tau$, является орисферой и несет на себе метрику нулевой секционной кривизны. Это нетрудно проверить, вычислив с помощью формул (4) абсолютный дифференциал нормали n^α к F^{n-1} для любого направления, касательного к гиперповерхности F^{n-1}: $Dn^\alpha = -du_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots n$. Следовательно, вторая фундаментальная форма F^{n-1} в L^n есть:

$$\mathrm{II}(F^{n-1}) = -(du,Dn) = (du,du) = \mathrm{I}(F^{n-1}).$$

Поэтому, внешняя кривизна F^{n-1} в L^n для любого направления равна $k_e = 1$, и внутренняя кривизна F^{n-1} равна $k_i = k_e + k_L n = 0$. Резюмируя, содержание данного пункта можно выразить следующим образом.

Теорема 2. *Всякая псевдосферическая когнруенция Бианки $\tau : L^n \to L^n_\tau$ в евклидовом пространстве E^{2n-1} может быть реализована посредством некоторого многомерного преобразования Бианки–Аминова вдоль семейства геодезический линий L^n, совпадающих с линиями тока поля $\pi\tau$.*

Список литературы

1. *G. Darboux*, Lecons sur la théorie générale des surfaces V. III. Paris (1905), 510 p.
2. *Ю. А. Аминов*, Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского. — Укр. геометр. сб. (1978), вып. 216 с. 3—5.
3. *K. Tenenblat, C. L. Terg*, Backlund's theorem for n-dimensional submanifolds of R^{2n-1}.— Ann. Math. (1980), v. 111, p. 477—490.
4. *Ю. А. Аминов*, Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Докл. АН СССР (1977), т. 236, № 3, с. 521—524.
5. *Ю. А. Аминов*, Изометрические погружения n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Мат. сб. (1980), т. 111, N 3, с. 402—433.
6. *Ю. А. Аминов*, Изометрические погружения областей трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство и движение твердого тела.— Мат. сб. (1983), т. 122, № 1, с. 12—30.
7. *Л. П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит., Москва (1948), 316 с.
8. *Ю. А. Аминов*, Геометрия векторного поля. Наука, Москва (1990), 205 с.
9. *А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — Успехи мат. наук (1991), т. 46, вып. 2, с. 41—83.

Pseudospherical Bianchi congruencies in E^{2n-1}

L. A. Masal'tsev

The pseudospherical Bianchi's transformation, i.e. the mappings of n-dimensional surfaces of constant negative curvature into E^{2n-1}, regarded. The properties of vector field $\pi\tau$ on L^n, which is a projection of the field $\tau : L^n \to L^n_\tau$, which generates the Bianchi's pseudospherical congruence, are studied.