Математическая физика, анализ, геометрия
1994, т. 1, № 3/4, с. 529–539

УДК 532.517.43; 532.031

О функции тока идеальной жидкости с заданными вихревыми нитями в кольце

$\boxed{\text{А. Д. Тюпцов}}$, Т. И. Зуева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 27 декабря 1993г.

Работа посвящена вычислению функции тока идеальной жидкости с вихрями в кольце. Основной результат работы — доказательство существования решения соответствующей краевой задачи и представление ее решения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса: функция тока представлена через σ-функции, а скорость жидкости в кольце — в виде разности ζ-функций Вейерштрасса. Результаты работы могут быть использованы при решении задач, связанных с отысканием равновесного положения вихревых цепочек во вращающейся сверхтекучей жидкости.

Робота присвячена знаходженню функції тока ідеальної рідини з вихорями в кільці. Основний результат роботи — доведення існування рішення відповідної крайової задачі і запис її рішення за допомогою еліптичних функцій Вейерштрасса: функцію тока виражено через σ-функції, а швидкість рідини в кільці представлено у вигляді різниці ζ-функцій Вейерштрасса. Результати роботи можуть бути застосовані при рішенні задач, що пов'язані із знаходженням рівноважного стану ланцюжків вихорів у надплинній рідині, що обертається.

Введение. При решении задач, связанных с отысканием равновесного положения вихревых цепочек во вращающейся сверхтекучей жидкости [1], возникает следующая краевая задача.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Σ, представляющую собой кольцо с внутренним радиусом R_1, внешним радиусом R_2, заполненное идеальной жидкостью. Пусть циркуляция вокруг внутреннего цилиндра равна $2\pi V$ и в жидкости возникли N вихрей интенсивности γ_k, расположенные в точках $\vec{r}_k$.

Для функции тока ψ имеем следующую задачу:

$$\Delta\psi = -2\pi \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k), \tag{B. 1}$$

$$\psi \Big|_{\Sigma} = \text{const}, \tag{B. 2}$$

$$R_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial r} \Big|_{r=R_1} d\theta = 2\pi V. \tag{B. 3}$$

Последнее условие получается из представления скорости жидкости через функцию тока [2] в полярных координатах (r,θ)

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_r + \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{e}_\theta \tag{B. 4}$$

и означает, что циркуляция вокруг внутреннего цилиндра равна $2\pi V$.

Целью данной работы является доказательство существования решения задачи (В. 1)-(В. 3) и представление ее решения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса.

1. Рассмотрим случай произвольного распределения вихрей в кольце.

Теорема 1. 1) *Функцию тока идеальной жидкости с вихрями в кольце можно выразить через σ-функции Вейерштрасса следующим образом:*

$$\psi(r,\theta) = \left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k + V\right)\ln\frac{r}{R_1} + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k \ln\frac{\sigma\left(i\ln(z/z_k)\right)}{\sigma\left(i\ln(zz_k/Z_{1,k}^2)\right)} -$$
$$-\frac{2\eta}{\pi}\ln\frac{r}{R_1}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1}. \tag{1. 1}$$

2) *Комплексно-сопряженная скорость идеальной жидкости с вихрями в кольце представима в виде разности ζ-функций Вейерштрасса*

$$\overline{v(z)} = -\left(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\right)\frac{i}{z} + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left[\zeta\left(i\ln\frac{z}{z_k}\right) - \zeta\left(i\ln\frac{zz_k}{Z_{1,2}^2}\right) + \frac{2i\eta}{\omega_1}\ln\frac{z_k}{Z_{1,k}}\right]. \tag{1. 2}$$

Здесь $z = re^{i\theta}$, *полупериоды* ζ- *и* σ-*функций равны* $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = i\ln(R_2/R_1)$, $\eta = \zeta(\omega_1)$, $Z_{1,k} = R_1\exp(i\theta_k)$.

Доказательство. Решение задачи (В. 1)-(В. 3) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1,$$

где ψ_0 — решение уравнения Пуассона (В. 1) в неограниченном пространстве, а ψ_1 — гармоническая функция, вычисленная так, чтобы полная функция тока удовлетворяла условиям (В. 2)-(В. 3).

Рассмотрим сначала единственный вихрь, расположенный в точке $z_k = r_k\exp(i\theta_k)$. Функция тока ψ_0 изолированной вихревой нити интенсивности γ_k в комплексной форме имеет вид [2]

$$\psi_0^{(k)}(z) = \gamma_k\ln|z - z_k| = \frac{\gamma_k}{2}\ln\left(r^2 + r_k^2 - \cos(\theta - \theta_k)\right). \tag{1. 3}$$

Если есть N вихрей интенсивности γ_k, расположенные в точках $z_k = r_k\exp(i\theta_k)$, $k = 1,2,\ldots,N$, то функция тока ψ_0, равна сумме вкладов вида (1. 3) от каждого вихря

$$\psi_0(r,\theta) = \sum_{k=1}^{N}\psi_0^{(k)}(r,\theta).$$

Функция тока ψ_0 удовлетворяет уравнению Пуассона (В. 1), поэтому для ψ_1 получаем задачу

$$\Delta\psi_1 = 0, \tag{1.4}$$

$$\psi_1\big|_{r=R_1} = -\psi_0\big|_{r=R_1} + C_1, \tag{1.5}$$

$$\psi_1\big|_{r=R_2} = -\psi_0\big|_{r=R_2} + C_2, \tag{1.6}$$

$$R_1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\Big|_{r=R_1}d\theta = -R_1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\Big|_{r=R_1}d\theta + 2\pi V. \tag{1.7}$$

Найдем точное решение задачи (1. 4)-(1. 7) в кольце.

Поскольку функция тока ψ в кольце периодична по θ с периодом 2π, то решение будем искать в виде ряда Фурье по θ.

Разложим $\psi_0^{(k)}(r,\theta)$ в ряд Фурье:

$$\psi_0^{(k)}(r,\theta) = \begin{cases} \gamma_k \ln r_k - \gamma_k \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/n)(r/r_k)^n \cos n(\theta - \theta_k), & r < r_k, \\ \gamma_k \ln r - \gamma_k \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/n)(r_k/r)^n \cos n(\theta - \theta_k), & r > r_k. \end{cases} \tag{1.8}$$

Решение уравнения Лапласа в полярных координатах

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2} = 0$$

будем искать в виде ряда [3]

$$\psi_1(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta).$$

Коэффициенты A_0, B_0, A_n, B_n, C_n и D_n найдем из граничных условий. Поскольку функция тока определяется с точностью до постоянного слагаемого, зададим ее равной нулю на одной из физических границ, например, при $r = R_1$. Тогда $C_1 = 0$, а из условий (1. 5)-(1. 7) получаем уравнения для коэффициентов:

$$A_0 = -\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \ln r_k - B_0 \ln R_1 ,$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \ln \frac{R_2}{r_k} + B_0 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$R_1^n A_n + R_1^{-n} C_n = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{1}{n}\left(\frac{R_1}{r_k}\right)^n \cos n\theta_k ,$$

$$R_1^n B_n + R_1^{-n} D_n = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{1}{n} \left(\frac{R_1}{r_k} \right)^n \sin n\theta_k ,$$

$$R_2^n A_n + R_2^{-n} C_n = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{1}{n} \left(\frac{r_k}{R_2} \right)^n \cos n\theta_k,$$

$$R_2^n B_n + R_2^{-n} D_n = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{1}{n} \left(\frac{r_k}{R_2} \right)^n \sin n\theta_k,$$

$$R_1 \int_0^{2\pi} \frac{B_0}{r} \Big|_{r=R_1} d\theta = 2\pi V.$$

Решая эти уравнения и делая некоторые несложные преобразования, получаем функцию тока ψ_1 в виде ряда

$$\psi_1 (r,\theta) = - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \ln r_k + V \ln r + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_k} \right)^n \frac{r_k^{2n} - R_1^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \cos n(\theta - \theta_k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{R_1^{2n}}{(rr_k)^n} \frac{R_2^{2n} - r_k^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \cos n(\theta - \theta_k). \tag{1.9}$$

Полная функция тока есть сумма выражений (1. 8) и (1. 9).

Теперь вычислим скорость жидкости, причем будем искать отдельно $\vec{v}_0 (r,\theta) = \vec{k} \times \nabla \psi_0$ и $\vec{v}_1 (r,\theta) = \vec{k} \times \nabla \psi_1$. Воспользуемся выражением (В. 4), но скорость будем вычислять в комплексной форме. Учтем,что $\hat{e}_r = e^{i\theta}$, а $\hat{e}_\theta = ie^{i\theta}$. Тогда комплексная скорость примет вид

$$v(r,\theta) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} e^{i\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} ie^{i\theta}.$$

Каждое слагаемое в сумме по k в выражении для скорости $v_0 (r,\theta)$ равно

$$v_0^{(k)} = - i\gamma_k e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r_k^n} e^{-in(\theta - \theta_k)}$$

при $r < r_k$, а при $r > r_k$

$$v_0^{(k)} = \frac{\gamma_k}{r} ie^{i\theta} + i\gamma_k e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_k^n}{r^{n+1}} e^{+in(\theta - \theta_k)}.$$

Записав в виде экспонент отношения $(r/r_k)^n$ и $(r_k/r)^n$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам, получаем следующее выражение для комплексно-сопряженной скорости $v_0 (r,\theta)$:

$$\overline{v_0^{(k)}} = \begin{cases} (i\gamma_k/(re^{i\theta}))\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp\left(in(\theta-\theta_k - i\ln(r/r_k))\right), & r<r_k, \\ -i\gamma_k/(re^{i\theta})\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp\left(-in(\theta-\theta_k-i\ln(r/r_k))\right)\right), & r>r_k. \end{cases} \tag{1.10}$$

Используя представление котангенса комплексного аргумента в виде ряда

$$\operatorname{ctg} z = \mp i\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty} e^{\pm 2ikz}\right) \tag{1.11}$$

(верхний знак соответствует $\operatorname{Im} z>0$, нижний — $\operatorname{Im} z<0$), суммы по n в выражении для скорости $\overline{v_0^{(k)}(r,\theta)}$ запишем как

$$\pm i\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\pm(\theta-\theta_k - i\ln(r/r_k))\right) = \mp\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{i}{2}\ln\frac{z}{z_k}\right),$$

тогда сопряженная скорость примет вид

$$\overline{v_0(z)} = -\frac{i}{2z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k + \frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\operatorname{ctg}\left(\frac{i}{2}\ln\frac{z}{z_k}\right), \tag{1.12}$$

причем, заметим, выражение получилось одно и то же для всех r.

Аналогично получим выражение для скорости $\overline{v_1(z)} = \sum\limits_{k=1}^{N}\overline{v_1^{(k)}(z)}$:

$$\overline{v_1^{(k)}(z)} = -\frac{iV}{Nz} - \frac{i\gamma_k}{z}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{r}{r_k}\right)^n\frac{r_k^{2n}-R_1^{2n}}{R_2^{2n}-R_1^{2n}}\exp\left(in(\theta-\theta_k)\right) +$$

$$+\frac{i\gamma_k}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_1^{2n}}{(rr_k)^n}\frac{R_2^{2n}-r_1^{2n}}{R_2^{2n}-R_1^{2n}}\exp\left(-in(\theta-\theta_k)\right).$$

Введем параметр $q=R_1/R_2$. Тогда $\overline{v_1^{(k)}(r,\theta)}$ после некоторых преобразований принимает вид

$$\overline{v_1^{(k)}(r,\theta)} = -\frac{iV}{Nz}+\frac{2\gamma_k}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin in\left(i(\theta-\theta_k)+\ln(r/r_k)\right) -$$

$$-\frac{2\gamma_k}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin in\left(\ln(rr_k/R_1^{2n})+i(\theta-\theta_k)\right) +$$

$$+\frac{i\gamma_k}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(in\left(i\ln(rr_k/R_1^2)-(\theta-\theta_k)\right)\right).$$

Последнюю сумму опять представим через котангенс (выражение при $\operatorname{Im} z>0$):

$$i\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(2in\left(\frac{i}{2}\ln\left(rr_k/R_1^{2n}\right)-(\theta-\theta_k)/2\right)\right)=-\frac{i}{2}-\frac{1}{z}\operatorname{ctg}\frac{i}{2}\left(\ln\left(rr_k/R_1^{2n}\right)+i(\theta-\theta_k)\right).$$

Тогда полную скорость можно записать в виде

$$\overline{v(z)}=\sum_{k=1}^{N}\left[\overline{v_0^{(k)}(z)}+\overline{v_1^{(k)}(z)}\right]=-\frac{iV}{z}-\frac{i}{z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k+\frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{i}{2}\ln\frac{z}{z_k}\right)+\right.$$
$$\left.+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\left(in\ln\frac{z}{z_k}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{i}{2}\ln\frac{zz_k}{Z_{1,k}^2}\right)-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\left(in\ln\frac{zz_k}{Z_{1,k}^2}\right)\right],\tag{1. 13}$$

где введено обозначение $Z_{1,k}=R_1\exp(i\theta_k)$.

Подобное разложение допускает периодическая часть ζ-функции Вейерштрасса [4]:

$$\zeta(z)-\frac{\eta z}{\omega_1}=\frac{\pi}{2\omega_1}\frac{\theta'_1(\pi z/(2\omega_1))}{\theta_1(\pi z/(2\omega_1))}=\frac{\pi}{2\omega_1}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\left(\frac{n\pi z}{\omega_1}\right)\right],\tag{1. 14}$$

где ω_1 — действительный полупериод ζ-функции, $\eta=\zeta(\omega_1)$.

Вводя величины $\omega_1=\pi$ и $\omega_2=i\ln(R_2/R_1)$, которые назовем полупериодами ζ-функции, получаем q в виде $q=\exp(i\pi\omega_2/\omega_1)$ — именно эта величина фигурирует в определении ζ-функции Вейерштрасса. Таким образом, комплексно-сопряженная скорость идеальной жидкости с N вихрями в кольце может быть представлена через разность периодических частей ζ-функций Вейерштрасса

$$\overline{v(z)}=-\left(V+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\right)\frac{i}{z}+\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left[\zeta\left(i\ln\frac{z}{z_k}\right)-\zeta\left(i\ln\frac{zz_k}{Z_{1,k}^2}\right)+\frac{2i\eta}{\omega_1}\ln\frac{z_k}{Z_{1,k}}\right].\tag{1. 15}$$

Используя свойство квазипериодичности ζ-функции и соотношение Лежандра [4], эту же скорость можно представить в другой форме:

$$\overline{v(z)}=-\frac{iV}{z}+\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left[\zeta\left(i\ln\frac{z}{z_k}\right)-\zeta\left(i\ln\frac{zz_k}{Z_{2,k}^2}\right)+\frac{2i\eta}{\omega_1}\ln\frac{z_k}{Z_{2,k}}\right],\tag{1. 16}$$

где $Z_{2,k}=R_2\exp(i\theta_k)$.

Для получения компактного представления для функции тока воспользуемся выражением для скорости (1. 15) и вычислим комплексный потенциал

$$W(z)=-\int\overline{v(z)}\,dz+D,$$

где D — некоторая комплексная постоянная.

Учтем, что $\zeta(z)=\sigma'(z)/\sigma(z)$, где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса [4]. Тогда $W(z)$ примет вид

$$W = i\Big(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Big)\ \ln z + i\sum_{k=1}^{N}\gamma_k \ln\frac{\sigma(i\ln(z/z_k))}{\sigma(i\ln(zz_k/Z_{1,k}^2))} - \frac{2i\eta}{\pi}\ln z\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1} + D.$$

Отсюда функция тока ψ равна

$$\psi(r,\theta) = \operatorname{Im} W(z) = \Big(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Big)\ \ln r + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{\sigma(i\ln(z/z_k))}{\sigma(i\ln(zz_k/Z_{1,k}^2))} -$$

$$- \frac{2\eta}{\pi}\ln r\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1} + D_1, \qquad (1.\ 17)$$

где $D_1 = \operatorname{Im} D$. Поскольку функция тока на границах кольца уже строго определена, нужно вычислить D_1, находя значение функции тока на любой из границ и приравнивая его известному значению. Для этого воспользуемся представлением σ-функций через θ-функции

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\pi}\exp\left(\frac{\eta z^2}{2\omega_1}\right)\frac{\theta_1(\pi z/(2\omega_1))}{\theta'_1(0)}$$

и соотношением для θ-функций [4]:

$$\ln\frac{\theta_1(\alpha+\beta)}{\theta_1(\alpha-\beta)} = \ln\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin_1(\alpha-\beta)} + 4\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{q^{2t}}{1-q^{2t}}\sin(2t\alpha)\sin(2t\beta).$$

Тогда

$$\psi(r,\theta) = \Big(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Big)\ \ln r - \frac{2\eta}{\pi}\ln r\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1} + D_1 +$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left[\ln\frac{\sin\left(\frac{\pi i}{2\omega_1}\ln\frac{z}{z_k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi i}{2\omega_1}\ln\frac{zz_k}{Z_{1,k}}\right)} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^{2t}}{1-q^{2t}}\sin\frac{\pi n i}{\omega_1}\Big(\ln(z/z_k)\Big)\sin\frac{\pi n i}{\omega_1}\Big(\ln(R_1/r_k)\Big)\right].$$

Вычисляя это выражение при $r = R_1$, получаем значение D_1 в виде

$$D_1 = -\Big(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Big)\ \ln R_1 + \frac{2\eta}{\omega_1}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1}\ln R_1,$$

а функция тока $\psi(r,\theta)$ тогда запишется как

$$\psi(r,\theta) = \Big(V + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\Big)\ \ln\frac{r}{R_1} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{\sigma(i\ln(z/z_k))}{\sigma(i\ln(zz_k/Z_{1,k}^2))} - \frac{2\eta}{\pi}\ln\frac{r}{R_1}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\ln\frac{r_k}{R_1}.$$

Это разложение имеет место всюду в кольце. Теорема 1 доказана.

2. При вычислении скорости и функции тока с помощью формул (1. 5) и (1. 2) основная трудность заключается в нахождении σ- и ζ-функций Вейерштрасса, которые определяются только рядами. Хотя все эти ряды быстро сходятся, при большом числе вихрей их вычисление становится слишком трудоемким.

Однако логично предположить, что в силу симметрии все вихри в реальных задачах имеют одинаковую интенсивность и равномерно распределены по окружности. В этом случае формулы для скорости и функции тока значительно упрощаются. В частности, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Если все вихри имеют одинаковую интенсивность γ и равномерно распределены по окружности радиуса r_0, т.е.*

$$r_k = r_0, \quad \theta_k = 2\pi k/N \text{ для всех } k, \tag{2.1}$$

то функция тока и скорость идеальной жидкости в кольце выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса с действительным полупериодом $\omega_1 = \pi/N$:

$$\psi(r,\theta) = (V+\gamma N)\ln\frac{r}{R_1} + \gamma\,\mathrm{Re}\left[\ln\frac{\hat\sigma(i\ln(z/r_0))}{\hat\sigma(i\ln(zr_0/R_1^2))} - \frac{2\hat\eta}{\hat\omega_1}\ln\frac{r_0}{R_1}\ln\frac{r}{R_1}\right], \tag{2.2}$$

$$\overline{v(z)} = -(V+\gamma N)\frac{i}{z} + \frac{\gamma}{z}\left[\hat\zeta\left(i\ln\frac{z}{r_0}\right) - \hat\zeta\left(i\ln\frac{zr_0}{R_1^2}\right) + \frac{2i\hat\eta}{\hat\omega_1}\ln\frac{r_0}{R_1}\right]. \tag{2.3}$$

Доказательство. Получим упрощенную формулу для функции тока, исходя из полученных в общем случае выражений (1.8) и (1.9):

$$\psi_0 = \begin{cases} \gamma N\ln r_0 - \gamma\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sum\limits_{k=1}^{N}(\cos n\theta\cos n\theta_k + \sin n\theta\sin n\theta_k), & r<r_0, \\ \gamma N\ln r - \gamma\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\cos n\theta\cos n\theta_k + \sin n\theta\sin n\theta_k), & r>r_0. \end{cases}$$

Рассмотрим суммы синусов и косинусов $n\theta_k$, учитывая, что $\theta_k = 2\pi k/N$ [5]:

$$\sum_{k=1}^{N}\cos n\theta_k = \sum_{k=1}^{N}\cos\left(k\frac{2\pi n}{N}\right) = \cos\frac{(N+1)\pi n}{N}\sin\pi n\,\mathrm{cosec}\,\frac{\pi n}{N},$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sin n\theta_k = \sum_{k=1}^{N}\sin\left(k\frac{2\pi n}{N}\right) = \sin\frac{(N+1)\pi n}{N}\sin\pi n\,\mathrm{cosec}\,\frac{\pi n}{N}.$$

Используя представление синуса кратного угла через сумму степеней [5], можно показать, что

$$\sin\pi n\,\mathrm{cosec}\,(\pi n/N) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\neq tN,\ t - \text{целое}, \\ N(-1)^{t(N-1)}, & \text{если } n = tN. \end{cases}$$

Но при $n = tN$ обращается в нуль первый множитель в выражении для суммы синусов, поэтому в разложении функции тока остаются только косинусы.

Поскольку $\cos \pi t(N + 1) = (-1)^{t(N+1)}$, то функция тока ψ_0 принимает вид

$$\psi_0(r,\theta) = \begin{cases} \gamma \ln r_0 - \gamma \sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{tN} \cos Nt\theta, \; r < r_0, \\ \gamma \ln r - \gamma \sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{tN} \cos Nt\theta, \quad r > r_0. \end{cases} \tag{2. 4}$$

Суммы по k в этом выражении уже отсутствуют — это разложение функции тока по более мелким гармоникам.

Вычисляя так же, как это было сделано выше, скорость $v_0(z)$, получим при всех z

$$\overline{v_0(z)} = -\frac{i\gamma N}{2z} + \frac{\gamma N}{2z} \operatorname{ctg} \left(\frac{iN}{2} \ln \frac{z}{z_0}\right). \tag{2. 5}$$

Аналогично получим функцию тока ψ_1, учитывая уже вычисленные выражения для суммы синусов и косинусов:

$$\psi_1(r,\theta) = -\gamma N \ln r_0 + V \ln r + \gamma \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{Nt} \frac{r_0^{2Nt} - R_1^{2Nt}}{R_2^{2Nt} - R_1^{2Nt}} \cos Nt\theta +$$

$$+ \gamma \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{R_1^{2Nt}}{(rr_0)^{Nt}} \frac{R_2^{2Nt} - r_0^{2Nt}}{R_2^{2Nt} - R_1^{2Nt}} \cos Nt\theta. \tag{2. 6}$$

Введем параметр $q = (R_1/R_2)^N$ и вычислим комплексно-сопряженную скорость, сделав те же преобразования, которые были сделаны ранее:

$$\overline{v_1(z)} = -\frac{iV}{z} + \frac{\gamma N}{z} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{iN}{2} \left(\ln \frac{rr_0}{R_1^2} + i\theta\right) - \frac{i}{2} \right] +$$

$$+ \frac{2\gamma N}{z} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{q^{2t}}{1 - q^{2t}} \sin iNt \left(\ln \frac{r}{r_0} + i\theta\right) - \frac{2\gamma N}{z} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{q^{2t}}{1 - q^{2t}} \sin iNt \left(\ln \frac{rr_0}{R_1^2} + i\theta\right).$$

Полная скорость $v(z)$ равна сумме $v_0(z)$ и $v_1(z)$. Учитывая представление (1. 14) для ζ-функции Вейерштрасса, запишем эту скорость в виде

$$\overline{v(z)} = -(V + \gamma N) \frac{i}{z} + \frac{\gamma}{z} \left[\hat{\zeta} \left(i \ln \frac{z}{r_0}\right) - \hat{\zeta} \left(i \ln \frac{zr_0}{R_1^2}\right) + \frac{2i\hat{\eta}}{\omega_1} \ln \frac{r_0}{R_1} \right].$$

При вычислении этой скорости нужно помнить, что полупериоды $\hat{\zeta}$-функций здесь уже другие: $\hat{\omega}_1 = \pi/N$, $\hat{\omega}_2 = i \ln (R_2/R_1)$, поэтому $\hat{q} = \exp (i\pi\omega_2/\omega_1) = (R_1/R_2)^N$. Кроме того, отличается от прежнего и значение $\hat{\eta}$. Чтобы подчеркнуть это, были введены обозначения со шляпками для всех перечисленных величин.

Вычисляя функцию тока как мнимую часть комплексного потенциала, приходим к выражению

$$\psi(r,\theta) = (V+\gamma N)\ln\frac{r}{R_1} + \gamma\,\mathrm{Re}\left[\ln\frac{\hat\sigma(i\ln(z/r_0))}{\hat\sigma(i\ln(zr_0/R_1^2))} - \frac{2\hat\eta}{\hat\omega_1}\ln\frac{r_0}{R_1}\ln\frac{r}{R_1}\right].$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что представление скорости идеальной жидкости, содержащей бесконечные вихревые решетки, через ζ-функции Вейерштрасса встречалось у В. К. Ткаченко [6]. Покажем, что полученное выше представление для скорости в кольце можно интерпретировать как скорость, порожденную двумя смещенными друг относительно друга бесконечными решетками вихрей. Для этого сделаем в кольце разрез (например, по действительной оси) и отобразим конформно кольцо с разрезом на отрезок горизонтальной полосы (z — переменная в кольце, u — в полосе):

$$z = f(u) = \exp(-iu).$$

Тогда кольцо с разрезом перейдет в отрезок полосы длиной 2π, шириной $d = \ln(R_2/R_1)$, а кольцо вихрей перейдет в цепочку вихрей, расположенную на расстоянии $h = \ln(R_2/r_1)$ от верхней стенки. Продолжив периодически этот отрезок полосы на всю горизонтальную полосу, получим задачу о нахождении скорости идеальной жидкости с вихрями в бесконечной полосе.

Используя принцип конформных отображений, можно легко найти скорость жидкости с вихрями в бесконечной полосе, зная скорость жидкости в кольце (u_0 — координата произвольного вихря):

$$\overline{v(u)} = -i\gamma\,(\zeta(u-u_0) - \zeta(u-u_0-2ih)) - \frac{2\gamma\eta h}{\omega_1} - V. \tag{2. 7}$$

Это выражение уже легко интерпретировать: если скорость, порожденная одной бесконечной решеткой вихрей, выражается через ζ-функцию Вейерштрасса как

$$\overline{v(z)} = -i\gamma\zeta(z-z_0),$$

то скорость (2. 7) есть не что иное, как скорость, генерируемая двумя решетками вихрей, смещенными друг относительно друга на расстояние $2h$ по вертикали, причем вихри смещенной решетки имеют интенсивность противоположного знака.

Дополнительные слагаемые в выражении (2. 7) означают наличие некоторого постоянного горизонтального потока.

Наличие двух смещенных друг относительно друга вихревых решеток можно увидеть и в кольце: переходя с помощью конформного отображения от полосы к кольцу, можно убедиться, что горизонтальные цепочки вихрей перейдут в кольца вихрей, причем число вихрей в кольце конечно (равно N), а вертикальные ряды перейдут в бесконечные цепочки, расположенные вдоль лучей с началом в центре кольца.

Список литературы

1. *С. Паттерман*, Гидродинамика сверхтекучей жидкости. Мир, Москва (1976), 520 с.
2. *Л. Милн-Томсон*, Теоретическая гидродинамика. Мир, Москва (1964), 655 с.

3. *Г. Ламб*, Гидродинамика. Гостехтеориздат, М.–Л. (1947), 928 с.

4. Справочник по специальным фукнциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Наука, Москва (1979), с. 389–390, 442–493.

5. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, Москва (1962), 1100 с.

6. *В. К. Ткаченко*, О вихревых решетках.— ЖЭТФ (1965), т. 49, вып. 6(12), с. 1875–1883.

On the flow function of ideal liquid with vortice lines in annulus

A. D. Tuptsov and T. I. Zujeva

The paper is devoted to finding of flow function of ideal liquid with vortex in annulus. The main result is the proof of existence of the corresponding boundary problem solution and representation of its solution with using elliptic Weierstrass function. The flow function is expressed in terms of σ-function and the velocity of ideal liquid is represented by using Weierstrass ζ-function. This results may be used for determination of vortice lattices equilibrium states in rotating superfluids.