Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т 2, № 1, с. 42-50

УДК 514

Об одном свойстве в целом пространства-времени плоской однородной волны тяготения

В. И. Денисов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Доказана теорема о единственности (неединственности) геодезической в пространстве-времени плоской однородной волны тяготения. Эта теорема устанавливает однозначную связь между наличием сопряженных точек на геодезической и ее единственностью.

В общей теории относительности известен класс пространств, метрика которых — точное решение уравнений Эйнштейна с нулевым тензором энергии-импульса материи. Это — пространства PHW-плоских однородных волн тяготения. Каждое из этих пространств является псевдоримановым многообразием гомеоморфным R^4, с глобально определенной системой координат $\{x^i\}$, $i = 0,\ldots,3$; $-\infty < x^i < +\infty$, в которой метрика PHW имеет вид

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \{({x^2}^2 - {x^3}^2)a(x^1) + 2x^1x^2b(x^1)\}{dx^1}^2 + {dx^2}^2 + {dx^3}^2, \qquad (0.1)$$

где $a(x^1)$, $b(x^1)$ — функции класса C^2. Пространство-время (0.1) допускает пятипараметрическую группу движений, которая действует транзитивно на изотропных гиперповерхностях $x^1 = \text{const}$, т.е. обладает той же степенью симметрии, что и плоские электромагнитные волны. Поэтому пространство-время с метрикой (0.1) и называют пространством плоской однородной волны тяготения PHW.

Интерес к пространствам PHW определяется следующими обстоятельствами.

1. Такие пространства интерпретируют как пространства сильных гравитационных волн [1-4]. Действие этих волн на систему свободных пробных частиц проявляется в относительном движении частиц, описываемом уравнениями геодезического отклонения Якоби [3,5].

2. С точки зрения свободного наблюдателя, скорость движения которого асимптотически приближается к скорости света, любое релятивистское пространство является пространством PHW [6].

3. Пространство PHW одно из немногих релятивистских пространств, в которых могут распространяться сильные ударные волны тяготения [7].

Локальные свойства пространств PHW детально изучены [1,2,5]. Свойства же в целом этих пространств исследованы не столь полно. Здесь доказано, что PHW геодезически полно, и в нем нет замкнутых причинных кривых [2,8,9]. Последнее говорит о том, что пространства PHW удовлетворяют принципу причинности [8].

Цель этой работы — исследовать свойства в целом геодезических пространств PHW. Основной результат работы — две теоремы о геодезических PHW.

Теорема I. *Пусть M_0, M_1 — пара точек PHW, а γ — геодезическая, соединяющая их.*

Тогда γ — единственная геодезическая, если и только если M_0 и M_1 не сопряжены вдоль γ.

Теорема II. *Если M_0, M_1 — пара сопряженных точек геодезической γ в PHW, то*

а) *через M_0, M_1 проходит непрерывное семейство γ^* геодезических;*

в) *число параметров семейства γ^* равно индексу сопряженной точки M_1 относительно M_0 вдоль γ;*

с) *любая геодезическая семейства γ^* изометрична γ.*

В действительности, как будет видно из доказательств этих теорем, отмеченные свойства PHW в целом имеют место для более широкого класса релятивистских пространств, метрика которых имеет вид [8]

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \{\kappa_{22}(x^1){x^2}^2 + 2\kappa_{23}(x^1)x^2x^3 + \kappa_{33}(x^1){x^3}^2\}{dx^1}^2 + {dx^2}^2 + {dx^3}^2, \quad (0.2)$$

где $\kappa_{22}(x^1)$, $\kappa_{33}(x^1)$, $\kappa_{23}(x^1) = \kappa_{32}(x^1)$ — функции класса C^2. Эти пространства, как и PHW, допускают пятипараметрическую группу движений, транзитивную на $x^1 = \text{const}$, они геодезически полны и не имеют замкнутых причинных кривых. Метрический тензор пространств PHW является решением уравнений Эйнштейна, правая часть которых — тензор энергии импульса материи изотропного электромагнитного поля с плотностью энергии, пропорциональной сумме $\kappa_{22}(x^1) + \kappa_{33}(x^1)$.

Таким образом, пространство (0.2) — пространство-время, в котором наряду с гравитационными волнами есть и электромагнитные.

Во избежание недоразумений следует отметить, что часто используют другое представление метрик PHW и (0.2) [1-3,5], а именно

$$ds^2 = 2d\tilde{x}^0d\tilde{x}^1 + g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^1)d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta, \quad \alpha,\beta = 2,3, \quad -\infty < \tilde{x}^i < +\infty. \quad (0.3)$$

Как показано в [2,9], существуют преобразования координат, переводящие (0.2) в (0.3) и обратно.

Д о к а ж е м т е о р е м ы I и II.

В связи с этим рассмотрим релятивистское пространство с метрикой [10]

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + 2G(x^1, x^2, x^3){dx^1}^2 + {dx^2}^2 + {dx^3}^2, \quad (1.1)$$

где $-\infty < x^i < +\infty$; G — функция класса C^2. Сравнивая (0.1) и (0.2) с (1.1), видим, что PHW и пространства (0.2) входят в класс пространств с метрикой (1.1).

В метрике (1.1) векторное поле $\xi^i = (1,0,0,0)$ — изотропное и ковариантно-постоянное. Поэтому метрика (1.1) допускает группу движений по крайней мере однопараметрическую [11]. Тогда уравнения геодезической в (1.1) имеют первый интеграл $dx^1/ds = \alpha = \text{const}$, где s — канонический параметр геодезической.

1. Предположим, что $\alpha = 0$. В этом случае уравнения геодезической метрики (1.1) имеют вид

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^1}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^2}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^3}{ds^2} = 0, \tag{1.2}$$

а сама геодезическая либо изотропна, либо пространственноподобна. Из второго уравнения системы (1.2) следует, что все геодезические с $\alpha = 0$ лежат в гиперповерхности $x^1 = \text{const}$, которая является вполне геодезической гиперповерхностью.

Докажем, что в этом случае геодезическая, проходящая через любую пару точек гиперповерхности $x^1 = \text{const}$, — единственная. Прежде всего заметим, что любая геодезическая, проходящая через указанную пару точек, принадлежит гиперповерхности $x^1 = \text{const}$! Действительно, если бы это было не так, то в точке выхода геодезической из гиперповерхности $x^1 = \text{const}$ производная dx^1/ds была бы отличной от нуля. Тогда она должна быть ненулевой и в любой другой точке геодезической, так как $dx^1/ds = \text{const}$! Из последнего следует, что в таком случае x^1 вдоль геодезической изменяется монотонно, и поэтому геодезическая не может вновь пересечь гиперповерхность $x^1 = C$.

Теперь докажем, что геодезическая, проходящая через пару произвольных точек гиперповерхности $x^1 = C$, единственная среди геодезических, принадлежащих гиперповерхности $x^1 = C$. Так как общее решение уравнений (1.2) имеет вид

$$x^0 = x^0_0 + a^0 s, \qquad x^1 = C, \qquad x^2 = x^2_0 + a^2 s, \qquad x^3 = x^3_0 + a^3 s, \tag{1.3}$$

где x^i_0, a^i — постоянные, то, предполагая, что геодезическая выходит из точки $M_0(x^0_0, C, x^2_0, x^3_0)$ и проходит через точку $M_1(x^0_0 + \Delta x^0, C, x^2_0 + \Delta x^2, x^3_0 + \Delta x^3)$, отличную от M_0, получим систему равенств

$$\Delta x^0 = a^0 \Delta s, \qquad \Delta x^2 = a^2 \Delta s, \qquad \Delta x^3 = a^3 \Delta s.$$

Из последних равенств следует, что при $(\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 > 0$ геодезическая пространственноподобна и единственна, так как коэффициенты a^0, a^2, a^3 определяются в этом случае однозначно:

$$a^0 = \Delta x^0/s; \qquad a^2 = \Delta x^2/s; \qquad a^3 = \Delta x^3/s, \qquad s = \sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta x^3)^2}\,.$$

Если же $(\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = 0$, то геодезическая, соединяющая M_0 и M_1, — изотропная геодезическая. Она единственна, так как на ней можно доопределить канонический параметр условием $s = \Delta x^0$.

Итак доказано, что геодезическая пространства (1.1), проходящая через любую пару точек гиперповерхности $x_1 = C$, ($\alpha = 0$!) единственна.

Докажем теперь, что на таких геодезических нет сопряженных точек. Пусть $\bar{\gamma}$ — геодезическая, принадлежащая гиперповерхности $x^1 = \text{const}$. Легко видеть, что тогда $\bar{\gamma}$ либо изотропная геодезическая, либо пространственноподобная геодезическая.

Если $\bar{\gamma}$ — изотропная геодезическая, то ее касательный вектор u^i равен $(1,0,0,0)$. Последнее следует из (1.3) и возможности доопределить канонический параметр на $\bar{\gamma}$. Далее, так как векторное поле $\xi^i = (1,0,0,0)$ — ковариантно-постоянное в метрике (1.1), то все компоненты тензора кривизны R_{ijkl} пространства (1.1), среди индексов которого есть хотя бы один равный нулю, равны нулю, и поэтому на такой геодезической уравнения Якоби [12]

$$\frac{D^2 p^i}{ds^2} + R^i_{jkl} u^j p^k u^l = 0, \tag{1.4}$$

где p^i — компоненты поля Якоби геодезической, принимают вид $\dfrac{D^2 p^i}{ds^2} = 0.$

Общее решение последнего уравнения можно записать как $p^i(s) = p^i_1 s + p^i_0$, где p^i_0, p^i_1 — параллельные вдоль $\bar{\gamma}$ векторные поля. Из этого следует, что на $\bar{\gamma}$ поле Якоби, удовлетворяющее условиям сопряженности пары точек [12]

$$p^i(0) = p^i(s^*) = 0, \qquad s^* \neq 0, \tag{1.5}$$

тривиально, т.е. $p^i(s) = 0$. Поэтому на $\bar{\gamma}$ сопряженных точек нет.

Пусть теперь $\bar{\gamma}$ — пространственноподобная геодезическая. Касательный вектор u^i такой геодезической, как следует из (1.3), равен $(a^0, 0, a^2, a^3)$, где постоянные a^2 и a^3 связаны условием ${a^2}^2 + {a^3}^2 = 1$.

Докажем, что и на такой геодезической решение уравнений Якоби, удовлетворяющее условиям сопряженности (1.5), тривиально. Определим в связи с этим на $\bar{\gamma}$ векторные поля ξ^i, η^i, τ^i следующим образом:

$$\xi^i = (1,0,0,0); \qquad \eta^i = \left(\frac{1}{2} G(x^1, x^2, x^3), -\frac{1}{2}, 0, 0\right), \qquad \tau^i = (0, 0, -a^3, a^2).$$

Эти векторные поля вместе с полем u^i определяют на $\bar{\gamma}$ полную систему линейно независимых ортонормированных векторов, каждый из которых вдоль $\bar{\gamma}$ параллелен. Тогда поле Якоби p^i, определенное на $\bar{\gamma}$, можно представить в виде

$$p^i(s) = A\xi^i + C\eta^i + Vu^i + B\tau^i, \tag{1.6}$$

где A, C, V, B — функции s-канонического параметра геодезической $\bar{\gamma}$.

Далее, подставляя (1.6) в (1.4) и принимая во внимание, что отличными от нуля являются только компоненты R_{1212}, R_{1313}, R_{1213}, R_{1312} тензора кривизны пространства (1.1), причем

$$\begin{gathered} R_{1212} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2 \partial x^2} = -G_{22}, \qquad R_{1313} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^3 \partial x^3} = -G_{33}, \\ R_{1213} = R_{1312} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2 \partial x^3} = -G_{23}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

получим систему уравнений, эквивалентную системе (1.4):

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{1}{4} B R_{1\alpha 1\beta} a^\alpha a^\beta, \qquad (\alpha, \beta = 2,3), \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2 C}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2 V}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2 B}{ds^2} = 0. \tag{1.9}$$

Условия сопряженности точек (1.5) геодезической $\bar{\gamma}$ в терминах функций A, C, V, B имеют вид

$$A(0) = A(s^*) = 0; \quad C(0) = C(s^*) = 0; \quad V(0) = V(s^*) = 0; \quad B(0) = B(s^*) = 0.$$

Из уравнений (1.9) следует, что условиям сопряженности на $\bar{\gamma}$ удовлетворяют только тривиальные решения — $C(s) \equiv 0$, $V(s) \equiv 0$; $B(s) \equiv 0$. Согласно выражению (1.8) $A(s)$, удовлетворяющее условию сопряженности, тривиально — $A(s) \equiv 0$. Следовательно, на $\bar{\gamma}$ не существует нетривиального поля Якоби, удовлетворяющего условиям сопряженности. Поэтому и на пространственноподобных геодезических гиперповерхности $x^1 = \mathrm{const}$ сопряженных точек нет.

2. Теперь рассмотрим случай $\alpha \neq 0$.

Пусть $M_0(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ — начальная точка геодезической γ. Нетрудно убедиться, что в этом случае уравнения геодезической можно записать в следующей форме:

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{2\alpha}\left(\varepsilon - 2G(x^1, x^2, x^3)\alpha^2 - \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2\right), \quad \frac{dx^1}{ds} = \alpha, \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} = \alpha^2 G_2, \quad \frac{d^2x^3}{ds^2} = \alpha^2 G_3, \tag{2.2}$$

где $G_2 = \dfrac{\partial G}{\partial x^2}$, $G_3 = \dfrac{\partial G}{\partial x^3}$, ε — индикатор геодезической γ. Он соответственно равен $-1, 0, +1$ для времениподобных, изотропных, пространственноподобных геодезических.

Легко видеть, что основными уравнениями в системе (2.1), (2.2) геодезической является пара уравнений (2.2) — если найдено их решение, то $x^0(s)$ находится простым интегрированием.

Преобразуем теперь уравнения Якоби (1.4). Для этого определим на γ полный базис параллельных вдоль γ векторных полей. Два таких векторных поля определяются просто: это $\xi^i = (1,0,0,0)$ и u^i — касательный вектор геодезической γ. Два других векторных поля определим следующим образом:

$$\underset{2}{\tau}^i = (-u^2/\alpha, 0, 1, 0), \quad \underset{3}{\tau}^i = (-u^3/\alpha, 0, 0, 1).$$

Нетрудно убедиться, что векторные поля $\underset{2}{\tau}^i$ и $\underset{3}{\tau}^i$ вдоль γ параллельны, и

$$(\xi\xi) = 0, \quad (\xi u) = \alpha, \quad (\xi\tau) = (u\underset{\beta}{\tau}) = 0, \quad (\beta = 2,3),$$

$$\left(\underset{2}{\tau}\underset{2}{\tau}\right) = 1, \quad \left(\underset{3}{\tau}\underset{3}{\tau}\right) = 1, \quad \left(\underset{2}{\tau}\underset{3}{\tau}\right) = 0,$$

где знак ( ) — скалярное произведение соответствующих векторов в метрике (1.1).

Тогда поле $p^i(s)$ на γ однозначно представимо в виде

$$p^i(s) = A\,\xi^i + V u^i + B^2 \underset{2}{\tau}^i + B^3 \underset{3}{\tau}^i, \tag{2.3}$$

где A, V, B^2, B^3 — функции канонического параметра s геодезической γ. Подставляя (2.3) в уравнение Якоби (1.4) и принимая во внимание (1.7), после преобразований получим представление уравнения Якоби на γ в виде

$$\frac{d^2A}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2V}{ds^2} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d^2B^2}{ds^2} = \alpha^2(B^2 G_{22} + B^3 G_{23}), \quad \frac{d^3B^3}{ds^2} = \alpha^2(B^2 G_{32} + B^3 G_{33}). \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что решения этих уравнений $A(s)$ и $B(s)$, удовлетворяющие условиям сопряженности, тривиальны, т.е. $A(s) = 0$; $B(s) = 0$.

Таким образом, нетривиальные решения уравнений Якоби, которые удовлетворяют условиям сопряженности, определяются системой уравнений (2.5).

3. Следующие замечания являются существенными для дальнейшего.

1) Так как для геодезической γ $dx^1/ds = \alpha \neq 0$, то x^1 вдоль γ изменяется монотонно. Перейдем в уравнениях (2.2), (2.5) к дифференцированию по x^1, после чего эти уравнения примут вид

$$\frac{d^2x^2}{du^2} = G_2(u,x^2,x^3), \quad \frac{d^2x^3}{du^2} = G_3(u,x^2,x^3), \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2B^2}{du^2} = B^2G_{22}(u,x^2,x^3) + B^3G_{23}(u,x^2,x^3),$$

$$\frac{d^2B^3}{du^2} = B^2G_{32}(u,x^2,x^3) + B^3G_{33}(u,x^2,x^3), \tag{3.2}$$

где $u = x^1$.

Далее, из (2.1) следует:

$$x^0 - x^0_0 = \frac{\varepsilon(x^1 - x^1_0)}{2\alpha^2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x^1_0}^{x^1} \left(2G - \left(\frac{dx^2}{du}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{du}\right)^2\right)du,$$

откуда, интегрируя два последних слагаемых по частям и приняв во внимание (3.1), получим

$$x^0 - x^0_0 = \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}(x^1 - x^1_0) - \left.\frac{x^2\dot{x}^2 + x^3\dot{x}^3}{2}\right|_{x^1_0}^{x^1} + \int\limits_{x^1_0}^{x^1} \left(2G - x^2G_2 - x^3G_3\right)du, \tag{3.3}$$

где $\dot{x}^2 = dx^2/du$; $\dot{x}^3 = dx^3/du$.

2) Так как в (1.1) G — функция x^1, x^2, x^3, то (3.1) в общем случае нелинейная система уравнений относительно x^2, x^3. Система (3.2) — система линейных уравнений относительно B^2 и B^3. Нетрудно убедиться, что эти системы уравнений совпадают с точностью до обозначения неизвестных, если и только если метрическая функция $G(x^1,x^2,x^3)$ имеет следующий вид:

$$G = \frac{1}{2}\left\{\kappa_{22}(x^1)*x^{2^2} + 2\kappa_{23}(x^1)*x^2x^3 + \kappa_{33}(x^1)x^{3^2}\right\}. \tag{3.4}$$

Сравнивая (3.4) с (0.2), видим, что пространство с метрической функцией (3.4) является пространством PHW, в котором уравнения (3.1) и (3.2) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^2}{du^2} = \kappa_{22}(u)x^2 + \kappa_{23}(u)x^3, \\ \dfrac{d^2x^3}{du^2} = \kappa_{23}(u)x^2 + \kappa_{33}(u)x^3; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2B^2}{du^2} = \kappa_{22}(u)B^2 + \kappa_{23}(u)B^3, \\ \dfrac{d^2B^3}{du^2} = \kappa_{23}(u)B^2 + \kappa_{33}(u)B^3. \end{cases} \tag{3.6}$$

Что касается функции (3.3), то в пространстве PHW она допускает безынтегральное представление:

$$x^0 - x^0_0 = \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}(x^1 - x^1_0) - \frac{x^2{x'}^2 + x^3{x'}^3}{2}\Big|_{x^1_0}^{x^1}. \tag{3.7}$$

3) Следующее замечание относится к решениям системы уравнений (3.5) и (3.6). Легко убедиться, что для любых решений системы (3.6) имеет место равенство

$$\left(x^2{B'}^2 + x^3{B'}^2\right) - \left(B^2{x'}^2 + B^3{x'}^2\right) = \mathrm{const}. \tag{3.8}$$

Докажем теперь, что если через пару точек M_0, M_1 в пространстве PHW проходит единственная геодезическая с $\alpha \neq 0$, то эти точки не могут быть сопряженными. Действительно, если такая геодезическая единственна, то решение системы (3.5) относительно $x^2(u)$, $x^3(u)$ при соответствующих краевых условиях единственно. Тогда решение системы (3.6) относительно B^2, B^3, удовлетворяющее условиям сопряженности точек M_0, M_1, а именно $B^2(M_0) = B^2(M_1) = B^3(M_0) = B^3(M_1) = 0$, тривиально: $B^2 = B^3 \equiv 0$, т.е. M_0 и M_1 не могут быть сопряженными вдоль γ.

Теперь предположим, что через M_0, M_1 проходят, по крайней мере, две геодезические γ и $\tilde{\gamma}$. Тогда разности $\tilde{x}^2(u) - x^2(u)$ и $\tilde{x}^3(u) - x^3(u)$ удовлетворяют системе (3.6) и обращаются в нуль в точках M_0, M_1. Следовательно, M_0 и M_1 сопряжены.

Докажем утверждение, обратное предыдущему. Пусть точки M_0, M_1 сопряжены вдоль геодезической γ. Тогда система (3.6) имеет нетривиальное решение $\{B^2(u), B^3(u)\}$, такое, что $B^2(u)$ и $B^3(u)$ обращаются в нуль в M_0 и M_1. Тогда, если $\{x^2(u), x^3(u)\}$ — пара функций, определяющих γ, то функции $\tilde{x}^2 = x^2(u) + \lambda B^2(u)$, $\tilde{x}^3 = x^3(u) + \lambda B^3(u)$, где λ — любое вещественное число, определяют геодезическую, проходящую через точки M_0, M_1. Поэтому через точки M_0 , M_1 проходит, по крайней мере, однопараметрическое семейство геодезических. Теорема I доказана.

Докажем теорему II.

Пусть M_0, M_1 — пара сопряженных вдоль геодезической γ точек пространства PHW. Тогда у такой геодезической $\alpha \neq 0$, а система уравнений (3.6) имеет нетривиальные решения $\{ B^2(u), B^3(u) \}$, которые обращаются в нуль в точках M_0, M_1 (M_0 и M_1 сопряжены вдоль γ!).

Пусть $\{ B_i^2(u), B_i^3(u) \}$, $1 \le i \le I$ — фундаментальная система решений уравнения (3.6), удовлетворяющих условиям сопряжения точек M_0, M_1 вдоль γ. Здесь I — индекс сопряженной точки M_1 [12]. Тогда, если $\{ x^2(u), x^3(u) \}$ — пара функций, определяющих геодезическую γ, то пара функций

$$\left\{ x^2(u) + \sum_{1 \le i \le I} \lambda^i B_i^2(u),\ x^3(u) + \sum_{1 \le i \le I} \alpha^i B_i^3(u) \right\}$$

при любых вещественных λ^i ($1 \le i \le I$) определяет геодезическую, проходящую через точки M_0, M_1. Эти геодезические образуют семейство γ^* геодезических. Число параметров этого семейства (λ^i) равно индексу сопряженной точки M_1.

Докажем теперь, что любая геодезическая семейства γ^* изометрична γ. Из (3.7) и (3.8) следует, что для произвольной геодезической семейства γ^* имеет место равенство

$$\frac{\varepsilon^*}{2(\alpha^*)^2} = \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}, \tag{3.9}$$

где ε^* — индикатор геодезической γ^*, $\alpha^* = \dfrac{d\overset{*}{x}{}^1}{ds^*} = \mathrm{const}$ вдоль геодезической γ^*. Так как α^* — вещественное число, то из (3.9) следует, что индикатор ε^* геодезических γ^* равен индикатору γ, а поэтому $\alpha^* = \alpha$. Из последнего равенства следует, что геодезические γ^* изометричны γ.

Теорема II доказана.

4. В процессе доказательства теорем I и II по существу установлены новые свойства пространств PHW.

Одно из этих свойств заключается в том, что в пространстве PHW уравнения (3.5) геодезической и уравнения (3.6) геодезического отклонения совпадают. Поэтому совпадают их общие решения. В этом смысле пространства PHW являются автомодельными.

Рассмотрим теперь W-пространство (1.1) с произвольной метрической функцией $\widetilde{G}(x^1, x^2, x^3)$ класса C^2. Пусть γ — геодезическая W. Тогда уравнения геодезического отклонения (3.2) на γ совпадают с уравнениями геодезического отклонения в PHW, метрическая функция (3.4) которого

$$\kappa_{\alpha\beta}(x^1) = \frac{\partial 2\widetilde{G}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\Big|_\gamma, \qquad (\alpha, \beta = 2,3).$$

С другой стороны, известно, что гравитационное поле проявляет себя в действии на систему свободных частиц. В силу принципа эквивалентности общей теории относительности это действие проявляется в относительном движении частиц, которое описывается уравнениями геодезического отклонения — уравнениями Якоби [13]. Поэтому можно считать, что с точки зрения относительного движения любое пространство-время (1.1) "на геодезической γ" является пространством PHW.

Представляет интерес вопрос о том, как выглядит изображение точечного источника света в пространстве PHW. Легко видеть, что если на изотропной геодезической в PHW есть сопряженные точки, то изображение точечного источника света на "небесной сфере" в PHW представляет собой область, размерность которой равна индексу сопряженной точки.

Список литературы

1. *H. Boudi, F. A. Pirani, I. Robinson*, Gravitational waves in General Relabivity. III. Exact plane waves. — Proc. Roy. Soc. London (1959), v. A251, p. 519–533.
2. *I. Ehlers, W. Kundt*, Exact solutions of the gravitational field equations.— In: Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, New York (1962), p. 49–101.
3. *Дж. Вебер*, Общая теория относительности и гравитационные волны. Изд-во иностр. лит., Москва (1962), 271 с.
4. *В. Д. Захаров*, Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. Наука, Москва (1972), 199 с.
5. *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер*, Гравитация. Т. 3, Мир, Москва (1977), 510 с.
6. *R. Penrose*, Any space-time has a plane wave as a limit.— In: Differential Geometry and Relativity. Dortrecht-Boston (1976), p. 124–133.
7. *В. И. Денисов, Т. С. Замерец*, О неустранимых разрывах первых производных метрического тензора пространства-времени, допускающего группу движений.— VI Всесоюз. конф. "Современные теоретические и экспериментальные проблемы относительности и гравитации": Тез. докл.— МГУ, Москва (1984), 98 с.
8. *R. Penrose*, A remarkable property of a plane waves in General Relativity.— Rev. Mod. Phys. (1965), v. 37, № 1, p. 215–220.
9. *С. П. Гаврилов*, Геодезическая полнота и канонические формы плосковолновых метрик.— Гравитация и теория относительности, КазГУ, Казань (1986), вып. 23, с.36–53.
10. *A. Peres*, Phys. Rev. Lett. (1959), v. 3, p. 571.
11. *А. З. Петров*, Новые методы в общей теории относительности. Наука, Москва (1966), 495 с.
12. *Дж. Милнор*, Теория Морса. Мир, Москва (1965), 184 с.
13. *Ф. Пирани*, Инвариантная формулировка теории гравитационного излучения.— В кн.: Новейшие проблемы гравитации. Изд-во иностр. лит., Москва (1961), с. 257–287.

On a property in the large of the space-time of a plane homogeneous gravitational wave

V. I. Denisov

The theorem has been proved on the uniqueness (nonuniqueness) of geodesics in the space-time of a plane homogeneous gravity wave. The theorem establish one-to-one correspondence between the existance of conjugate points on geodesics and its nonuniqueness.

Про одну властивість в цілому простору-часу плоскої однорідної хвилі тяжіння

В. І. Денісов

Доведена теорема про єдиність (неєдиність) геодезичної в просторі-часу плоскої однорідної хвилі тяжіння. Ця теорема встановлює зв'язок між наявністю спряжених точок на геодезичній та її єдиністю.