Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 1, с. 108-122

УДК 517.55

Голоморфные периодические функции и периодические дивизоры

Л. И. Ронкин

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 31 января 1993 года

Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы для функции $f(z)$, голоморфной в трубчатой области T_B и имеющей n-периодический дивизор Z, существовала голоморфная в T_B периодическая функция $F(z)$ с дивизором $Z_F = Z$. Дана оценка роста функции $F(z)$ в случае дивизора $Z \subset C^n$ конечного порядка.

Пусть T_B — трубчатая область в $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^n_{(x)} + i\,\mathbf{R}^n_{(y)}$ с выпуклым основанием $B \subset \mathbf{R}^n_{(y)}$ и пусть Z — положительный дивизор в T_B. Напомним, что дивизором в области $G \subset \mathbf{C}^n$ называют пару $(|\,Z\,|, \gamma) = Z$, где носитель дивизора $|\,Z\,|$ — главное аналитическое множество в G, а его кратность $\gamma = \gamma_Z(z)$ — целочисленная функция, определенная на множестве $|\,Z\,|^*$ регулярных точек множества $|\,Z\,|$, постоянная на каждой связной компоненте множества $|\,Z\,|^*$. Дивизор называется положительным, если положительна его кратность. В тех случаях, когда значения функции γ_Z для изучения рассматриваемого вопроса не играют роли, мы для краткости будем отождествлять Z с множеством $|\,Z\,|$ и соответственно говорить "множество Z", "точка дивизора", "множество пересекается с дивизором" и т.д.

Назовем дивизор Z в области T_B n-периодическим с периодами $\omega_1 \in \mathbf{R}^n, \ldots, \omega_n \in \mathbf{R}^n$, если

$$|\,Z\,| + \omega_j = |\,Z\,|, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

и

$$\gamma_Z(z + \omega_j) = \gamma_Z(z), \ \forall\ z \in |\,Z\,|^*, \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

Всюду далее мы рассматриваем только положительные дивизоры, называя их для краткости просто дивизорами. Кроме того, как правило, полагаем, специально того не оговаривая, $\omega_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots, \omega_n = (0,\ldots,0,1)$. Условимся также для краткости n-периодические дивизоры называть периодическими дивизорами. Пространство всех функций, голоморфных в области $G \subset \mathbf{C}^n$, обозначается $H(G)$. Функция $f \in H(T_B)$ называется n-периодической или просто периодической, если $f(z + \omega_j) \equiv f(z)$, $\forall\, j = 1,2,\ldots,n$.

В связи с введенными понятиями естественно возникает вопрос: любой ли периодический дивизор Z является дивизором голоморфной периодической функции?*

Нетрудно видеть, что ответ на этот вопрос отрицателен. Действительно, пусть существует голоморфная периодическая функция $F(z)$ такая, что $Z_F = Z$. Совершим отображение α: $z \to w = (e^{2\pi i z_1},\ldots,e^{2\pi i z_n})$. При этом отображении ввиду периодичности Z и F дивизор Z перейдет в дивизор

$$\widetilde{Z} \subset G_B = \left\{ w \in \mathbf{C}^n \colon \left(\frac{1}{2\pi}\ln|w_1|,\ldots,\frac{1}{2\pi}\ln|w_n|\right) \in B \right\},$$

а функция $F(z)$ перейдет в функцию $\Phi = \Phi_F(w) = F\left(\frac{1}{2\pi i}\ln w_1,\ldots,\frac{1}{2\pi i}\ln w_n\right)$. Ясно также, что равенство $Z = Z_F$ влечет за собой равенство $\widetilde{Z} = Z_\Phi$. Верно и обратное: любая функция $\Phi \in H(G_B)$ порождает голоморфную периодическую в T_B функцию $F(z) = \Phi(\alpha z)$, а любой дивизор $\widetilde{Z} \subset G_B$ при отображении α^{-1} переходит в периодический дивизор $Z \subset T_B$. Поэтому вопрос о существовании голоморфной периодической функции с заданными периодическими дивизорами сводится к существованию голоморфной функции с заданным дивизором в области G_B.

Вообще говоря, как известно, такая задача — вторая проблема Кузена — неразрешима для указанного класса областей, т.е. существуют область B и дивизор $\widetilde{Z} \subset G_B$ такие, что $\widetilde{Z} \neq Z_\Phi$ ни для какой функции $\Phi \in H(G_B)$. Соответственно, существует периодический дивизор $Z \subset T_B$, не являющийся дивизором никакой голоморфной периодической функции в T_B. Конкретный пример такого периодического дивизора может быть, в частности, построен с помощью известного примера Ока дивизора в произведении колец, не являющегося дивизором никакой голоморфной функции (см. [3], с. 30).

В связи с описанной ситуацией возникает задача выделения тех или иных классов периодических дивизоров, являющихся дивизорами периодических функций. На языке когомологий эта задача может быть сформулирована так: при каких условиях на дивизор Z элемент группы $H^2(G_B, Z)$, естественным образом порожденный дивизором $\widetilde{Z}$ **, будет нулевым?

---

* Напомним, что дивизор Z есть дивизор Z_F голоморфной функции $F(z)$, если $|Z| = \{z\colon F(z) = 0\}$, а функция γ_Z равна кратности γ_F корня функции F в точке $z \in |Z|^*$. В случае неприводимости функции F, как известно (см., например, [1[, [2]), $\gamma_F \equiv 1$ и дивизор Z_F отождествляется с множеством $\{z\colon F(z) = 0\}$.

** Любой дивизор $Z \subset G$, где G — область голоморфности, может быть задан с помощью счетного набора шаров B_j, образующих покрытие G, и функций $f_j \in H(B_j)$, удовлетворяющих условиям $f_j/f_l = g_{j,l} \in H(B_j \cap B_l)$, $\forall\, j,l$, $B_j \cap B_l \neq \varnothing$. Так как $g_{j,l} \neq 0$, $\forall\, z \in B_j \cap B_l$, то $g_{j,l} = \exp\{h_{j,l}\}$, где $h_{j,l} \in B_j \cap B_l$, причем $h_{j,l} = -h_{l,j}$. Очевидно, что при $B_j \cap B_l \cap B_m \neq 0$ функции $N_{j,l,m} = \frac{1}{2\pi i}\left(h_{j,l} + h_{l,m} + h_{m,j}\right)$ — целочисленные и постоянные на $B_j \cap B_l \cap B_m$. Очевидно также, В случае $T_B \subset \mathbf{C}^n$ ответ на этот вопрос был получен как побочный, вспомогательный факт теории $2n$-периодических мероморфных функций n переменных (см., например, [4]). Здесь мы решаем указанную задачу для произвольной области T_B. Получены также достаточные чисто геометрические условия разрешимости этой задачи. Для дивизоров в $\mathbf{C}^n$ конечного порядка решен вопрос о минимальном росте соответствующей целой функции.

1. Условия существования голоморфной периодической функции с заданным периодическим дивизором

Пусть Z — периодический дивизор в T_B и пусть $f(z)$ — голоморфная в T_B функция, дивизор которой совпадает с Z. Как известно, такая функция существует для любого дивизора $Z \subset T_B$. Ввиду периодичности Z дивизоры функций $f(z)$ и $f(z+\omega_j)$ совпадают и поэтому при любом $j = 1,\ldots,n$

$$f(z+\omega_j) = f(z)e^{g_j(z)}, \tag{1}$$

где $g_j(z) \in H(T_B)$. Обозначим

$$\Delta_j\Phi = \Phi(z+\omega_j) - \Phi(z).$$

Теорема 1. *Пусть Z, f и g_j — те же, что и выше. Тогда для того чтобы существовала голоморфная периодическая в T_B функция $F(z)$ с $Z_F = Z$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta_p g_q = \Delta_q g_p\,,\ \forall\ p, q = 1,\ldots,n. \tag{2}$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\Pi = \Pi(a,b) = \{\, y \in \mathbf{R}^n\colon a_j < y_j < b_j\,,\ j = 1,\ldots,n\,\}, \Pi_j = \Pi_j(\alpha_j, \beta_j) = \{\, y \in \Pi\colon \alpha_j < y_j < \beta_j \,\}$, где $a_j < \alpha_j < \beta_j < b_j$ и пусть $f \in H(T_\Pi)$. Тогда существует функция $F \in H(T_{\Pi_1})$ такая, что $\Delta_1 F = f$, $\forall\ z \in T_{\Pi_1}$. При этом, если дополнительно $\Delta_p f = 0$ при некоторых $p \neq 1$, функцию F также можно взять, удовлетворяющую условиям $\Delta_p F = 0$ с теми же p.*

что числа $N_{j,l,m}$ образуют целочисленный коцикл ранга 2. Если этот коцикл является в то же время кограницей, т.е. принадлежит нулевому классу группы $H^2(G,\mathbf{Z})$, и, значит, $N_{j,l,m} = N_{l,m} + N_{m,j} + N_{j,l}$, то функции $h_{j,l} - 2\pi i N_{j,l}$ образуют голоморфный коцикл ранга 1 и, следовательно, являются кограницей цепи ранга 0. Таким образом, существуют функции $h_l \in H(B_l)$ такие, что $h_{j,l} - 2\pi i N_{j,l} = h_l - h_j$. В этой ситуации равенствами

$$F = f_j e^{h_j}, \qquad z \in B_j$$

в области G корректно определена функция, дивизор которой Z_F совпадает с Z. Такой функции не существует, если коцикл $\{\, N_{j,l,m} \,\}$ не является кограницей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $'z = (z_2,\ldots,z_n)$ и $'\Pi = {}'\Pi(a,b) = \{ 'y : a_j < y_j < b_j,\ j = 2,\ldots,n \}$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(w,'z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\exp(-2\pi\beta)}^{\exp(-2\pi\alpha)} \frac{f(\frac{1}{2\pi i}\ln t,'z)}{t-w}\,dt, \qquad w = u + iv \in \mathbf{C}.$$

Из свойств интегралов типа Коши следует, что функция $\Phi(w,'z)$ голоморфна, в частности, в произведении $G_1 \times T_{'\Pi}$, где

$$G_1 = \{ w \in \mathbf{C} : 0 < \arg w < 2\pi,\ e^{-2\pi\beta} < |w| < e^{-2\pi\alpha} \},$$

и что на верхнем и нижнем берегах разреза $\left[\exp(-2\pi\beta), \exp(-2\pi\alpha)\right]$ она имеет непрерывные граничные значения $\Phi^{\pm}(u,'z)$, удовлетворяющие условию

$$\Phi^{+}(u,'z) - \Phi^{-}(u,'z) = -f\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t,'z\right).$$

Поэтому функция $F_0(z) \overset{\text{def}}{=} \Phi\left(e^{2\pi i z_1},'z\right)$ голоморфна в области

$$\left\{(z_1,'z) : 0 < \operatorname{Re} z_1 < 1,\ \alpha_1 < \operatorname{Im} z_1 < \beta_1,\ 'z \in T_{'\Pi}\right\},$$

непрерывна на множестве $\left\{(z_1,'z) : 0 \le \operatorname{Re} z_1 \le 1,\ \alpha_1 < \operatorname{Im} z_1 < \beta_1,\ 'z \in T_{'\Pi}\right\}$ и обладает свойством

$$F_0(1 + iy_1,'z) - F_0(iy_1,'z) = f(iy_1,'z). \tag{3}$$

Определим теперь функцию $F_m(z)$ на множестве

$$\Omega_m = \left\{z \in T_{\Pi_1} : m \le \operatorname{Re} z_1 \le m + 1\right\}$$

посредством равенства

$$F_m(z_1,'z) - F_0(z_1 - m,'z) + f(z_1 - m,'z) + \ldots + f(z_1 - 1,'z), \tag{4}$$

если $m > 0$, и посредством равенства

$$F_m(z_1,'z) - F_0(z_1 - m,'z) - f(z_1 - m - 1,'z) - \ldots - f(z_1,'z) \tag{4'}$$

в случае $m < 0$. Заметим, что $F_m(z) = F_{m+1}(z),\ \forall\, z \in \Omega_m \cap \Omega_{m+1}$. Действительно, согласно (3), (4) и (4') для указанных z при $m > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_m(z) - F_{m+1}(z) &= \left\{F_0(1 + iy_1,'z) + f(1 + iy_1,'z) + \ldots + f(m + iy_1,'z)\right\} - \\ &- \left\{F_0(iy_1,'z) + f(iy_1,'z) + \ldots + f(m + iy_1,'z)\right\} = \\ &= F_0(1 + iy_1,'z) - F_0(iy_1,'z) - f(iy_1,'z) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется случай $m < 0$. Из сказанного следует, что функция

$$F(z) \overset{\text{def}}{=} F_m(z), \quad \forall\, z \in \Omega_m, \quad m \in \mathbf{Z},$$

корректно определена и голоморфна во всей области T_{Π_1}. Кроме того, поскольку $(1 + z_1, 'z) \in \Omega_{m+1}$, $\forall (z_1, 'z) \in \Omega_m$, то при $\operatorname{Re} z_1 > 0$

$$\Delta_1 F = F(z_1 + 1, 'z) - F(z_1, 'z) = \{F(z_1 - m, 'z) + f(z_1 - m, 'z) + \ldots + f(z_1, 'z)\} -$$
$$- \{F(z_1 - m, 'z) + f(z_1 - m, 'z) + \ldots + f(z_1 - 1, 'z)\} = f(z_1, 'z).$$

Аналогично рассматривается случай $\operatorname{Re} z_1 < 0$.

Заметим теперь, что, как видно из конструкции функции F_0, если $\Delta_p f = 0$ при некотором $p > 1$, то $\Delta_p F_0 = 0$. Но тогда, очевидно, и $\Delta_p F = 0$. Лемма доказана.

Положим

$$\Pi_l^* = \bigcap_{j=1}^{l} \Pi_j.$$

Лемма 2. *Для того чтобы существовала функция $F \in H(T_{\Pi_k^*})$, удовлетворяющая условиям*

$$\Delta_j F = g_j, \qquad j = 1,\ldots,k, \qquad k \le n, \tag{5}$$

где $g_1,\ldots,g_k$ — какая-либо система функций из $H(T_\Pi)$, необходимо и достаточно, чтобы в $T_{\Pi_k^*}$ выполнялись равенства

$$\Delta_p g_q = \Delta_q g_p, \quad \forall\ p,q = 1,\ldots,k. \tag{6}$$

Доказательство. Утверждение леммы в части необходимости очевидно $(\Delta_p g_q = \Delta_p \Delta_q F = \Delta_q \Delta_p F = \Delta_q g_p)$. Утверждение леммы в части достаточности докажем индукцией по числу k уравнений (5).

Случай $k = 1$ вытекает из леммы 1. Предположим, что условия (6) достаточны для разрешимости системы (5) при $k = 2,\ldots,l - 1$. Покажем, что тогда эти условия достаточны для разрешимости указанной системы и в случае $k = l$.

Пусть F_1 — функция из $H(T_{\Pi_{l-1}^*})$, удовлетворяющая условиям $\Delta_1 F_1 = g_1$, $\Delta_2 F_2 = g_2$, ... $\Delta_{l-1} F_1 = q_{l-1}$. Такая функция существует согласно предположению индукции. Заметим, что любая функция $F = F_1 + F_2$, где функция $F_2 \in H(T_{\Pi_l^*})$ такова, что $\Delta_1 F_2 = \Delta_2 F_2 = \ldots = \Delta_{l-1} F_2 = 0$, также удовлетворяет условиям (5) с $k = l - 1$. Выберем функцию F_2 так, чтобы функция F удовлетворяла еще и уравнению $\Delta_l F = g_l$. Для этого F_2 должно быть решением уравнения $\Delta_l F_2 = g_l - \Delta_l F_1$ и удовлетворять условиям $\Delta_1 F_2 = \ldots = \Delta_{l-1} F_2 = 0$. Существование такой функции немедленно следует из леммы 1, если заметить, что ввиду условий (6) $\Delta_j g_l - \Delta_j \Delta_l F_1 = \Delta_l (g_j - \Delta_j F_1) = 0$, $\forall j = 1,\ldots,l - 1$. Лемма доказана.

Теперь, то есть при наличии лемм 1 и 2, доказательство теоремы 1 в части достаточности стандартным образом (см. сноску ** на с. 109) сводится к известному и легко доказываемому факту тривиальности группы $H^2(B,\mathbf{Z})$ для любой выпуклой области $B \subset \mathbf{R}^n$. Действительно, пусть функции $f, g_1, \ldots, g_n$ — те же, что и в условии теоремы, т.е. $f \in H(T_B)$, $Z_f = Z$, а функции $g_1, \ldots, g_n$ определены равенствами (1). Выберем области $\Pi^{(j)} = \Pi(a^{(j)}, b^{(j)})$ и соответствующие им области $\widehat{\Pi}^{(j)} = \Pi(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})$ так, чтобы $\bigcup \Pi^{(j)} = B$ и $\bigcup \widehat{\Pi}^{(j)} = B$. Для каждой пары областей $\Pi^{(j)}$ и $\widehat{\Pi}^{(j)}$ построим по функциям $g_1, \ldots, g_n$ согласно лемме 2 функцию $F^{(j)}$. Непосредственно проверяется, что функция $f_j \overset{\text{def}}{=} f\exp(F^{(j)})$ является периодической в области $T_j = T_{\widehat{\Pi}^{(j)}}$. Далее, как и в упомянутой выше сноске, полагаем $g_{j,l} = f_j/f_l$, $h_{j,l} = \ln g_{j,l}$, $N_{j,l,m} = \frac{1}{2\pi i}(h_{j,l} + h_{l,m} + h_{m,j})$. При этом очевидно, что: 1) функции $g_{j,l}$ голоморфны и периодичны на $T_{j,l} = T_j \bigcap T_l \neq \varnothing$; 2) функции $h_{j,l}$ допускают представление $h_{j,l} = 2\pi i \langle C_{j,l}, z \rangle + \tilde{h}_{j,l}$, где $C_{j,l} \in \mathbf{Z}^n$, а $\tilde{h}_{j,l}$ — голоморфные периодические функции на $T_{j,l}$; 3) числа $N_{j,l,m}$ образуют целочисленный коцикл ранга 2 группы коцепей покрытия области B областями $\widehat{\Pi}^{(j)}$. Так как $H^2(B, \mathbf{Z}) = 0$, то и соответствующая группа когомологий этого покрытия также тривиальна. Поэтому существуют целые числа $N_{j,l}$ (целочисленная коцепь ранга 1) такая, что $N_{j,l,m} = N_{l,m} + N_{m,j} + N_{j,l}$. В этой ситуации функции $h_{j,l} - 2\pi i N_{j,l}$ образуют голоморфный коцикл, т.е. для любых j, l, m таких, что $T_{j,l,m} = T_{j,l} \bigcap T_{l,m} \bigcap T_{m,j} \neq \varnothing$ на $T_{j,l,m}$ выполняется равенство

$$\left(h_{j,l} - 2\pi i N_{j,l}\right) + \left(h_{l,m} - 2\pi i N_{l,m}\right) + \left(h_{m,j} - 2\pi i N_{m,j}\right) = 0.$$

Отсюда и из равенства $h_{j,l} = \tilde{h}_{j,l} + 2\pi i \langle C_{j,l}, z \rangle$ следует, что $C_{j,l} + C_{l,m} + C_{m,j} = 0$ и, значит, функции $h^*_{j,l} = h_{j,l} - 2\pi i N_{j,l}$ также образуют голоморфный коцикл. Так как функции $h^*_{j,l}$ периодичны, то функции

$$\hat{h}_{j,l}(w) = h^*_{j,l}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln w_1, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\ln w_n\right)$$

голоморфны в областях $\widehat{T}_{j,l} = \{w \in \mathbf{C}^n\colon w_j = \exp(2\pi i z_j),\ j = 1, \ldots, n,\ z \in T_{j,l}\}$ и, так же как функции $h^*_{j,l}$, образуют голоморфный коцикл. Отсюда, учитывая разрешимость первой проблемы Кузена в области $G_{\mathcal{B}} = \{w \in \mathbf{C}^n\colon (\ln|w_1|, \ldots, \ln|w_n|) \in (2\pi B)\}$, заключаем, что существуют функции $h_j(w)$, голоморфные в соответствующих областях $\widehat{T}_j$ и такие, что $\hat{h}_{j,l} = \hat{h}_l - \hat{h}_j$ на $\widehat{T}_{j,l}$. Далее, делая замену $w = \left(e^{2\pi i z_1}, \ldots, e^{2\pi i z_n}\right)$, получим периодические функции $h_j(z) \in H(T_j)$ такие, что $h^*_{j,l} = h_l - h_j$ на $T_{j,l}$. Искомой функцией тогда является функция

$$F = fe^{-h_j},\ \forall\ z \in T_j.$$

Тем самым в части достаточности теорема 1 доказана. В части необходимости утверждение теоремы 1 тривиально, поскольку в случае существования периодической функции F с $Z_F = Z$ функции $g_j(z)$ имеют вид $g_j(z) = \Delta_j g$, где $g = \ln F/f$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае $B = \mathbf{R}^n$ легко обойтись без обращения к свойствам соответствующих групп когомологий. Например, если в предположении $f \in H(\mathbf{C}^n)$ в лемме 1 положить

$$\Phi(w,z) = -\eta(w)\,\eta\left(\frac{1}{w}\right)(1+w)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0 \frac{f\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t, 'z\right)}{\eta(t)\,\eta\left(\frac{1}{t}\right)(1+t)(t-w)}\,dt,$$

где целая функция $\eta(w)$ построена по тейлоровским коэффициентам a_k функции f посредством равенства

$$\eta(w) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} w^m \sum_{\|k\|=m} |\,a_k\,|,$$

то получим целую функцию F, удовлетворяющую условию $\Delta_1 F = f$ во всем пространстве $\mathbf{C}^n$. Соответственно, в случае целых функций $g_1,\ldots,g_n$ и выполнения условий (2) в $\mathbf{C}^n$ функция F из леммы 2 является целой и удовлетворяет условиям * $\Delta_j F = g_j$, $j = 1,\ldots,n$, $\forall\ z \in \mathbf{C}^n$. Искомой периодической функцией тогда является функция $\Phi = fe^{-F}$.

С помощью теоремы 1 можно получить геометрические условия на дивизор Z, достаточные для существования голоморфной периодической функции с этим дивизором.

Дивизор $Z \subset T_B$ назовем симметрическим, если вместе с каждой точкой $z \in |\,Z\,|$ любая точка ζ, полученная из z произвольной перестановкой координат, также принадлежит $|\,Z\,|$ и при этом $\gamma_Z(z) = \gamma_Z(\zeta)$.

Теорема 2. *Если Z — симметрический периодический дивизор в T_B, то существует периодическая функция $\Phi \in H(T_B)$ такая, что $Z_\Phi = Z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $D_{i,j}$ перестановку координат z_i и z_j. Очевидно, что, не нарушая общности, можно считать область T_B инвариантной относительно всех преобразований $D_{i,j}$. Покажем, что существует функция $f \in H(T_B)$ с дивизором $Z_f = Z$, для которой при любых i и j выполняется соотношение

$$f(D_{i,j}z) = \varepsilon_{i,j} f(z), \tag{7}$$

где постоянная $\varepsilon_{i,j}$ равна одному из значений корня $\sqrt[N]{1}$, $N = n(n-1)$. Действительно, пусть $f_1(z)$ — какая-то голоморфная в T_B функция с дивизором $Z_{f_1} = Z$. Тогда ввиду симметричности дивизора Z функции $f_1(z)$ и $f_1(D_{i,j}z)$ имеют его своим дивизо-

---

* Это утверждение известно, см., например, [4].

ром, причем, функция $f_1(D_{i,j}z)$, так же как и функция $f_1(z)$, голоморфна в T_B. Следовательно, функции $f_1^N(z)$ и

$$\tilde{f}(z) = \prod_{j \neq i} f_1(D_{i,j}z)$$

голоморфны в T_B и имеют один и тот же дивизор Z. Поэтому

$$\tilde{f}(z) = e^{\Phi(z)} f_1^N(z);$$

где $\varphi \in H(\mathbb{C}^n)$ и, значит, функция $f(z) \overset{\text{def}}{=} f_1(z)e^{\frac{1}{N}\varphi(z)}$ имеет дивизор Z и удовлетворяет условию $f^N = \tilde{f}$. Отсюда, ввиду очевидной симметричности функции $\tilde{f}$, заключаем, что при любых i и j

$$\left[\frac{f(z)}{f(D_{i,j}z)}\right]^N = 1,$$

и, значит, выполнено условие (7).

Из (7) следует, что функции g_j, построенные указанным ранее способом по функции f, можно взять связанными между собой соотношениями

$$g_j(z) = g_1(D_{1,j}z), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{8}$$

Действительно, если $e^{g_1(z)}f(z) = f(z + \omega_1)$, то

$$e^{g_1(D_{1,j}z)}f(z) = \varepsilon_{j,1}^{-1}f(D_{j,1}z)\, e^{g_1(D_{1,j}z)} = \varepsilon_{1,j}^{-1}f(D_{j,1}z + \omega_1) =$$
$$= \varepsilon_{1,j}^{-1}f(D_{1,j}(z + \omega_j)) = f(z + \omega_j).$$

Покажем теперь, что функции g_j удовлетворяют условию (1). Имеем

$$\frac{f(z + \omega_p + \omega_q)}{f(z)} = \frac{f(z + \omega_p + \omega_q)}{f(z + \omega_p)}\frac{f(z + \omega_p)}{f(z)} = e^{g_q(z + \omega_p) + g_p(z)}.$$

Аналогично

$$\frac{f(z + \omega_p + \omega_q)}{f(z)} = e^{g_p(z + \omega_q) + g_q(z)}.$$

Следовательно,

$$g_p(z + \omega_q) + g_q(z) = g_q(z + \omega_p) + g_p(z) + 2\pi i N_{p,q}, \qquad N_{p,q} \in \mathbb{Z},$$

и, таким образом,

$$\Delta_p g_q - \Delta_q g_p = 2\pi i N_{p,q}\,.^*$$

Докажем, что $N_{p,q} = 0$. Достаточно рассмотреть случай $p = 1$, $q = 2$. Запишем функцию $g_1(z)$ в виде

---

* Это равенство известно. Оно, очевидно, имеет место для функций g_j, порождаемых целой функцией

$$g_1(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(z_2, ''z)z_1^l, \tag{9}$$

где $''z = (z_3,\ldots,z_n)$. Соответственно, см. (8),

$$g_2(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(z_1, ''z)z_2^l. \tag{10}$$

Отсюда следует, что $N_{1,2} = \frac{1}{2\pi i}(N_1 - N_2)$, где $N_1 = (\Delta_2 g_1)\,\big|_{z=0}$, $N_2 = (\Delta_1 g_2)\,\big|_{z=0}$.
Из представлений (9) и (10) заключаем далее, что

$$N_1 = a_0(1,0) - a_0(0,0), \qquad N_2 = a_0(1,0) - a_0(0,0)$$

и, таким образом, $N_{1,2} = N_1 - N_2 = 0$. Следовательно, выполнено условие (1) теоремы 1, применяя которую, заключаем о существовании периодической функции $\Phi \in H(T_B)$ с $Z_\Phi = Z$. Теорема доказана.

2. О росте периодических функций с заданным дивизором конечного порядка

При дополнительном предположении о том, что $T_B = \mathbb{C}^n$ и дивизор Z, фигурирующий в теоремах 1 и 2, имеет конечный порядок, утверждения этих теорем могут быть дополнены оценкой порядка соответствующих функций F.

Напомним, что порядком дивизора $Z \subset \mathbb{C}^n$ называется величина

$$\rho_Z = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln n_Z(t)}{\ln t},$$

где $n_Z(t)$ — проективный объем* дивизора Z в шаре $B_t = \{ z \in \mathbb{C}^n\colon |z| < t\}$. Если целая функция $f(z)$ такова, что $Z_f = Z$, то, как известно (см. [5]),

$$\rho_Z = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln N_f(t\alpha_1,\ldots,t\alpha_n)}{\ln t},$$

где

$$N_f(r_1,\ldots,r_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} \ln\,\big|f(r_1e^{i\varphi_1},\ldots,r_ne^{i\varphi_n})\big|\,d\varphi_1\ldots d\varphi_n,$$

а $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — произвольно фиксированные положительные числа. Напомним также, что порядком целой функции $f(z) \not\equiv 0$ называется величина

$$\rho_f = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(t)}{\ln t}.$$

Заметим, что $\rho_f \ge \rho_z$, $\forall f \in H(\mathbb{C}^n)$, $Z_f = Z$.

---

* Определение и свойства величины $n_z(t)$ см., например, в монографиях [5], [6].

Теорема 3. *Пусть периодический дивизор Z имеет конечный порядок* $\rho_Z = \rho$* *и пусть существует какая-либо целая периодическая функция* φ *с дивизором* $Z_\varphi = Z$. *Тогда существует целая периодическая функция* $F(z)$ *с* $Z_F = Z$ *и* $\rho_F = \rho$.

Доказательство. Поскольку дивизор Z имеет конечный порядок, то, как известно (см., например, [5] и [6]), существует целая, вообще говоря, не периодическая функция $f(z)$ с дивизором $Z_f = Z$ и порядком $\rho_f = \rho$. Из известной оценки частного целых функций (см., например, [5]) следует, что функции $e^{g_j(z)} = f(z + \omega_j)/f(z)$ имеют порядок не выше ρ. Следовательно, функции $g_j(z)$ являются полиномами степени не выше ρ. В рассматриваемой здесь ситуации оценка степени полиномов g_j может быть уточнена.

Лемма 3. *Если целая функция* $f(z)$ *имеет конечный порядок* ρ, *а дивизоры функций* $f(z)$ *и* $f(z + a)$, $a \in \mathbb{C}^n$, *совпадают, то функция* $g(z)$, *определенная равенством* $e^{g(z)} = f(z + a)/f(z)$, *является полиномом степени не выше* $\rho - 1$.

Доказательство. Обозначим через $\mu = \mu_f$ меру, ассоциированную по Риссу функции $\ln |f(z)|$. Как известно (см., например, [5], [6]), $d\mu$ совпадает с элементом "объема" дивизора Z_f. Обозначим $\mu_z(t) = \mu(B(z,t))$, где $B(z,t) = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z| < t \}$. Ввиду предполагаемой условием леммы периодичности (с периодом a) дивизора Z_f имеет место равенство

$$\mu_z(t) = \mu_{z+a}(t). \tag{11}$$

Обозначим через $S_u(z,r)$ и $\Gamma_u(z,r)$ средние значения функции u, соответственно по сфере $\partial B(z,r)$ и шару $B(z,r)$. Объем единичного шара и единичной сферы в C обозначим через V_n и σ_n соответственно.

Для того чтобы показать, что функция $g(z)$ — полином степени не выше $\rho - 1$, достаточно показать, что

$$\varlimsup_{R \to \infty} \frac{1}{\ln R} S_{|\operatorname{Re} g(z)|}(0,R) \le \rho - 1. \tag{12}$$

Оценим $|\operatorname{Re} g(z)| = \big| \ln |f(z + a)| - \ln |f(z)| \big|$. Для этого используем формулу Иенсена для субгармонических функций в пространстве (см., например, [5]). В рассматриваемой ситуации при $f(z) \ne 0$ эта формула может быть записана в виде

$$S_{\ln |f|}(z,R) = C_n \int_0^R t^{-2n+1} \mu_z(t)\,dt - \ln |f(z)|,$$

где $C_n = 2n - 2$ при $n > 1$ и $C_1 = \frac{1}{2\pi}$. Из нее следует, что

---

* Очевидно, что $\rho \ge 1$.

$$\ln |f(z)| = \Gamma_{\ln |f|}(z,R) - \frac{2nC_n}{R^{2n}} \int_0^R t^{2n-1} dt \int_0^t s^{1-2n} \mu_z(s) ds \ .$$

Используя (11), получаем далее

$$|\operatorname{Re} g(z)| = \Gamma_{\ln |f|}(z + a,R) - \Gamma_{\ln |f|}(z,R) =$$

$$= \left| \frac{1}{V_n R^{2n}} \left(\int_{B(z+a)\setminus B(z)} \ln |f(\zeta)| \, d\zeta - \int_{B(z,R)\setminus B(z+a,R)} \ln |f(\zeta)| \, d\zeta \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{V_n R^{2n}} \int_{R - |a| < |z - \zeta| < R + |a|} \Big| \ln |f(\zeta)| \Big| \, d\zeta, \ R > |a|. \tag{13}$$

Используем теперь то, что, как известно, для субгармонических функций $u(z)$ справедлива оценка (см., например, [7])

$$S_{|u|}(z,r) \leq 2M_{u^+}(z,r) - u(z),$$

где $u^+ = \max\{0,u\}$, $M_{u^+}(z,r) = \max\{u(\zeta): |z - \zeta| = r\}$.

Отсюда и из (13) следует

$$|\operatorname{Re} g(z)| \leq \frac{\sigma_n}{V_n R^{2n}} \int_{R-|a|}^{R+|a|} t^{2n-1} S_{\ln^+ |f|}(z,t) \, dt \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_n}{R^{2n}} M_{\ln^+ |f|}(0, |z| + R + |a|) \left[(R + |a|)^{2n} - (R - |a|)^{2n} \right] -$$

$$- \alpha(R) \ln |f(z)|, \tag{14}$$

где

$$\alpha(R) = \frac{\sigma_n}{V_n R^{2n}} \left[(R + |a|)^{2n} - (R - |a|)^{2n} \right].$$

Отметим, что $\alpha(R) > 0$ и $\alpha(R) = O\left(\frac{1}{R}\right)$.

Так как функция $f(z)$ имеет по условию леммы порядок ρ, то из (14) вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$, некоторой константе C_ε и всех R, бóльших некоторого R_0, имеет место неравенство

$$|\operatorname{Re} g(z)| \leq C_\varepsilon \frac{1}{R} (|z| + R)^{\rho+\varepsilon} - \alpha(R) \ln |f(z)|.$$

Поэтому

$$S_{|\operatorname{Re} g|}(0,R) \leq C_\varepsilon 2^{\rho+\varepsilon} R^{\rho+\varepsilon-1} - \alpha(R) \ln |f(0)|,$$

откуда немедленно следует неравенство (12).

Теперь при наличии леммы 3 для доказательства теоремы 3 естественно использовать схему доказательства теоремы 1 (в части достаточности), следя за степенями возникающих при этом полиномов. Соответствующим аналогом леммы 1 является

Лемма 4. *Пусть*

$$P(w) = \sum_{k=0}^{m} a_k w^{m-k}, \qquad a_0 \neq 0,$$

полином от $w \in \mathbb{C}$. Тогда существует такой полином

$$R(w) = \sum_{j=0}^{m+1} b_j w^{m+1-j},$$

что $R(w+1) - R(w) = P(w)$.

При этом коэффициент b_{m+1} произволен, а коэффициенты b_k, $0 \le k \le m$, имеют вид

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} a_j, \tag{13}$$

где $\alpha_{k,j} = \alpha_{k,j}(m)$.

Доказательство. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве $R(w+1) - R(w) = P(w)$, получаем, что

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} b_j C_{m+1-j}^{k+1-j}, \qquad k = 0,\ldots,m.$$

Относительно $b_0,\ldots,b_m$ эта система уравнений является треугольной с отличными от нуля диагональными коэффициентами. Поэтому эта система имеет решение вида (13). Произвольность b_{m+1} очевидна. Лемма доказана.

Обозначим через $\deg P$ степень полинома $P(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$. Следующая лемма является полиномиальным аналогом леммы 2.

Лемма 5. *Пусть полиномы $g_1(z),\ldots,g_k(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $k \le n$, удовлетворяют условиям $\Delta_p g_q = \Delta_q g_p$, $\forall\, p, q = 1,\ldots,k$. Тогда существует такой полином $F(z)$, что $\Delta_j F = g_j$, $j = 1,\ldots,k$, и при этом*

$$\deg F \le 1 + \max_{1 \le l \le k} \deg g_l\,.$$

Доказательство этой леммы в существенном повторяет доказательство леммы 2*. При этом вместо леммы 1 используется лемма 3 и необходимо лишь провести оценку степеней полиномов, возникающих при проведении индукции.

---

* Заметим, что в случае полиномов условие $\Delta_j F = 0$ означает независимость от переменной z_j.

Для функций F, F_1, F^* из леммы 2, являющихся в рассматриваемой ситуации полиномами, имеем

$$\deg F \le \max\{\deg F_1, \deg F^*\}.$$

По предположению индукции

$$\deg F_1 \le 1 + \max_{1 \le j \le l-1} \{\deg g_j\}.$$

Функция F^* построена согласно лемме 4 по функции g_l. Поэтому $\deg F^* \le 1 + \deg g_j$. Следовательно,

$$\deg F \le \max\{1 + \max_{1 \le j \le l-1} \deg g_j, 1 + \deg g_l\} = 1 + \max_{1 \le j \le l} \deg g_j.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь функции f и g_j — те же, что и прежде, т.е. указанные в начале доказательства теоремы 3. Так как по условию этой теоремы существует целая функция φ с дивизором $Z_\varphi = Z$, то согласно теореме 1 полиномы g_j удовлетворяют условиям (2). При этом, согласно лемме 3 $\deg g_j \le \rho - 1$. Поэтому полином F, построенный согласно лемме 5 по полиномам g_j, имеет степень $\deg F \le \rho$. Следовательно, функция $\Phi = fe^{-F}$ имеет порядок $\le \rho$. В то же время $Z_\Phi = Z_f = Z$ и, так же как в теореме 1,

$$\frac{\Phi(z + \omega_j)}{\Phi(z)} = 1, \ \forall\, j.$$

Теорема 3 доказана.

В случае $n = 1$ любой периодический дивизор является, конечно, дивизором целой периодической функции. При этом функция $F(z)$ из теоремы 3 может быть построена непосредственно, с помощью произведения Вейерштрасса. Действительно, пусть Z периодический дивизор в $\mathbf{C}$ конечного порядка ρ*. Его точки расположены на прямых $\operatorname{Im} z = y_k$, $k \in \mathbf{Z}$, $y_k < y_{k+1}$, $\forall\, k$.

Обозначим через n_k подсчитанное с учетом кратности число точек дивизора Z, принадлежащее полуинтервалу $\{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im} z = y_k, 0 \le \operatorname{Re} z < 1\}$. Положим

$$n^{(1)}(t) = \sum_{|g_k| < t} n_k.$$

Очевидно, что

$$n_Z(t) \le tn^{(1)}(t) \le n_Z(t\sqrt{2})$$

и, значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа C_ε, что

$$n^{(1)}(t) \le C_\varepsilon\, t^{\rho+\varepsilon-1}, \quad \forall\, t > 2.$$

---

* Напомним, что $\rho \ge 1$.

Предположим, что $|Z| \subset \overline{\mathrm{C}}_+$, где $\mathrm{C}_+ = \{ z \in \mathrm{C}: \operatorname{Im} z > 0 \}$, и рассмотрим дивизор $\widetilde{Z}$, получащийся из Z при отображении $w = e^{-2\pi i z}$. Таким образом, $\widetilde{Z} = \left(|\widetilde{Z}|, \gamma_{\widetilde{Z}}\right)$, где $|\widetilde{Z}| = \{ w = e^{-2\pi i z}, z \in |z| \}$, $\gamma_{\widetilde{Z}}(w) = \gamma_Z(-\frac{1}{2\pi i}\ln w)$. Ввиду периодичности дивизора Z это определение дивизора $\widetilde{Z}$ корректно.

Очевидно, что $n_{\widetilde{Z}}(t) = 0$, $\forall\, t < 1$, и $n_{\widetilde{Z}}(t) = n^{(1)}(\ln t)$. Поэтому произведение Вейерштрасса, отвечающее дивизору $\widetilde{Z}$, имеет род нуль, т.е. имеет вид

$$F(w) = \prod_{w_k \in \widetilde{Z}} \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{\gamma_{\widetilde{Z}}(w_k)}.$$

Это произведение оценивается стандартным образом, а именно

$$\ln M_F(r) \le \int_0^r \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_{\widetilde{Z}}(t) = r\int_0^\infty \frac{n_{\widetilde{Z}}(t)}{t(t+r)}\, dt \le$$

$$\le \int_2^r \frac{1}{t} n_{\widetilde{Z}}(t)\, dt + r\int_0^\infty t^{-2} n_{\widetilde{Z}}(t)\, dt + \int_1^2 \frac{1}{t} n_{\widetilde{Z}}(t)\, dt \le$$

$$\le C_\varepsilon \left(\int_1^r (\ln t)^{\rho+\varepsilon-1} \frac{dt}{t} + r\int_r^\infty t^{-2} (\ln t)^{\rho+\varepsilon-1}\, dt \right) + \mathrm{const} =$$

$$= C_\varepsilon \left(\frac{(\ln r)^{\rho+\varepsilon}}{\rho+\varepsilon} + I_\rho(r) \right) + \mathrm{const}. \tag{14}$$

Оценим $I_\rho(r)$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_\rho(r) = (\ln r)^{\rho+\varepsilon-1} + (\rho+\varepsilon-2) I_{\rho-1}(r) =$$

$$= (\ln r)^{\rho+\varepsilon-1} + (\rho+\varepsilon-2)(\ln r)^{\rho+\varepsilon-2} + (\rho+\varepsilon-2)(\rho+\varepsilon-3) I_{\rho-2}(r) =$$

$$= (\ln r)^{\rho+\varepsilon-1} + (\rho+\varepsilon-2)(\ln r)^{\rho+\varepsilon-2} + \ldots + \Big((\rho+\varepsilon-2)\ldots(\rho+\varepsilon-[\rho]-1)\Big) I_{\rho-[\rho]}(r) \le$$

$$\le (\ln r)^{\rho+\varepsilon-1}\Big(1 + \ldots + ((\rho+\varepsilon-2)\ldots(\rho+\varepsilon-[\rho]))\Big).$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln I_\rho(r)}{\ln\ln r} \le \rho.$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln\ln r} \le \rho. \tag{15}$$

Положим теперь $\Phi(z) = F(e^{-2\pi i z})$. Очевидно, что функция $\Phi(z)$ — целая, периодическая, ее дивизор совпадает с Z и $M_\Phi(R) = M_F(e^R)$, $\forall\, R > 0$. Отсюда и из (15) следует, что $\rho_\Phi \le \rho$, а поскольку всегда $\rho_\Phi \ge \rho_{Z_\Phi} = \rho$, то $\rho_\Phi = \rho$. Таким образом, функция Φ искомая, если $Z \in \overline{\mathbb{C}}_+$. В общем случае искомой является функция $\Phi(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z)$, где функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ построены указанным способом по дивизорам $Z_1 = Z \cap \overline{\mathbb{C}}_+$ и $Z_2 = \overline{Z} \cap \overline{\mathbb{C}}_+$. Здесь $\overline{Z}$ — дивизор, полученный из дивизора Z посредством отображения $z \to z$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. М. Руссаковскому за полезное обсуждение.

Проведение исследований, описанных в данной статье, в определенной степени стало возможным благодаря поддержке Международного научного фонда Сороса (грант № U2X000).

Список литературы

1. *M. Herve*, Several complex variables. Local theory. Oxford Univ. Press. London (1963), 134 p. (Пер. на рус. яз.: М. Эрве, Функции многих комплексных переменных. Мир, Москва (1965), 165 с.).
2. *Л. И. Ронкин*, Элементы теории аналитических функций многих переменных. Наук. думка, Киев (1977), 167 с.
3. *K. Oka*, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Tokyo (1961), 225 p.
4. *А. И. Маркушевич*, Введение в классическую теорию абелевых функций. Наука, Москва (1979),.239 с.
5. *Л. И. Ронкин*, Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. Наука, Москва (1971), 422 с. (Пер. на англ. яз.: L. I. Ronkin, Introduction to the theory of entire functions of several variables. Transaction of math. monographs. AMS Providence, R. I. (1974), v. 44, 392 p.).
6. *P. Lelon, L. Gruman*, Entire functions of several complex variables. Springer -Verlag, Berlin-Heidelberg (1986), 272 p. (Пер. на рус. яз.: П. Лелон, Л. Груман, Целые функции многих комплексных переменных. Мир, Москва (1989), 350 с.).
7. *L. I. Ronkin*, Functions of completely regular growth. Kluver Ac. Publ., Dordrecht, Boston, London (1992), 392 p.

Holomorphic periodic functions and periodic divisors

L. I. Ronkin

The necessary and sufficient conditions for the existence of a periodic holomorphic function $f(z)$ in a tube domain T_B with a given n-periodic divisor Z are found. An estimate of growth of such a function is obtained in the case when the divisor $Z \subset C^n$ has finite order.

Голоморфні періодичні функції та періодичні дивізори

Л. І. Ронкін

Здобуті необхідні та достатні умови того, щоб для функції $f(z)$, голоморфної у трубчатій області T_B та маючої n-періодичний дивізор Z, існувала голоморфна у T_B періодична функція $F(z)$ з дивізором $Z_F = Z$. Знайдена оцінка зростання функції $F(z)$ у випадку, коли дивізор $Z \subset C^n$ має скінчений порядок.