Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 284–295 УДК 514

О цилиндричности полных сильно параболических кэлеровых подмногообразий в комплексном эрмитовом пространстве

А.А. Борисенко, С.А. Остроумов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Рассматривается полная l-мерная кэлерова поверхность F^l в эрмитовом пространстве с положительным вещественным внешним нуль-индексом. При определенных условиях, предъявляемых к множеству асимптотических направлений, доказано, что F^l — комплексный цилиндр.

Известна теорема Хартмана–Ниренберга [1, 2]: Полная гиперповерхность F^n в евклидовом пространстве E^{n+1}, у которой ранг гауссова отображения всюду ≤ 1, есть цилиндр с $(n-1)$-мерными плоскими образующими.

К. Абе [3] перенес эту теорему на случай голоморфной гиперповерхности F^n в $\mathbf{C}^{n+1}$: Полная голоморфная гиперповерхность F^n в эрмитовом пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, у которой вещественный ранг гауссова отображения всюду не превышает двух, есть комплексный цилиндр с $(n-1)$-мерными комплексными образующими. Под гауссовым отображением здесь понимается сопоставление точке поверхности F^n ее нормали в $\mathbf{C}P^n$.

В данной статье будет показана несущественность требования codim $F^n = 1$ и ограничения на ранг сферического изображения.

Основные понятия. Голоморфной поверхностью $F^l \subset \mathbf{C}^n$ назовем связное множество в $\mathbf{C}^n$, каждая точка которого имеет окрестность, описываемую голоморфным радиусом-вектором $r(u^1,\dots,u^l)$. Здесь r — отображение открытого подмножества в $U \subset \mathbf{C}^l$ в $\mathbf{C}^n$, причем $rg\{r_{u^1},\dots r_{u^l}\} = l$ для всех точек из U.

Пусть в точке $P \in F$ вещественной регулярной поверхности в евклидовом пространстве существует подпространство касательного пространства максимальной размерности μ, которое для всех матриц вторых квадратичных форм есть собственное подпространство, соответствующее собственному значению нуль. Тогда точка P — точка сильной μ-параболичности для F. Число μ называется индексом сильной параболичности. Если в каждой точке поверхности индекс сильной параболичности $\geq \mu$, то поверхность — сильно μ-параболическая. Такие поверхности изучались в [4,5].

Пусть теперь F^l — голоморфная поверхность в $\mathbf{C}^n$. Посмотрим на нее как на вещественную в R^{2n}. Тогда если есть вещественная сильная k-параболичность, то подпространство, аннулирующее вторые квадратичные вещественные формы, будет I-инвариантным, т.е. комплексной плоскостью (I — оператор комплексной структуры, $I^2 = -id$). Действительно, пусть α — вторая основная форма для $F^l \subset \mathbf{R}^{2n}$ и пусть $\alpha(X, Y) = 0$. Тогда $\alpha(IX, Y) = I\alpha(X, Y) = 0$. Имеем: $k = 2\mu$ — четное число.

В работе [7] вводилось понятие комплексной второй квадратичной формы для голоморфной поверхности в эрмитовом пространстве C^n. Пусть $r(u^1, \dots, u^l)$ — голоморфная параметризация поверхности $F^l \subset C^n$, n — вектор комплексной нормали к F^l в точке P. Эрмитово скалярное произведение обозначим через (,). Матрицей комплексной второй квадратичной формы относительно нормали n в точке P назовем

$$B(P, n) = \left\| (r_{u^i, u^j}, n) \right\|_{i, j = \overline{1, l}}.$$

Ясно, что $B(P, n) = A' + iA''$, где A' и A'' — вещественные симметрические матрицы.

Нормали $n = a + ib$ в комплексном смысле соответствует нормальная площадка $\mathrm{Lin}\,\{(a, b); (-b, a)\}$ к поверхности F^l в точке P в вещественном смысле. Рассмотрим вещественные нормали $n_1 = (a, b)$ и $In_1 = n_2 = (-b, a)$ к $F^l \subset R^{2n}$. Им отвечают матрицы вторых вещественных квадратичных форм соответственно:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} -A_2 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы $l \times l$. Если обозначить через $\langle\, ,\, \rangle$ вещественное евклидово скалярное произведение в R^{2n} и положить $u^k = x^k + iy^k$, то

$$\begin{aligned}
(\overline{A})_{\alpha, \beta} &= \langle r_{x^\alpha, x^\beta}; n_1 \rangle, \\
(\overline{A})_{\alpha, \beta + l} &= \langle r_{x^\alpha, y^\beta}; n_1 \rangle, \\
(\overline{A})_{\alpha + l, \beta} &= \langle r_{y^\alpha, x^\beta}; n_1 \rangle, \\
(\overline{A})_{\alpha + l, \beta + l} &= \langle r_{y^\alpha, y^\beta}; n_1 \rangle,
\end{aligned} \qquad \alpha, \ \beta = \overline{1, l}.$$

В [7] доказана следующая связь вещественных и комплексных вторых квадратичных форм:

$$A' = A_1, \quad A'' = -A_2,$$

так что

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A' & -A'' \\ -A'' & -A' \end{pmatrix}.$$

Если вектор $a + ib$ аннулирует матрицу $A' + iA''$, то векторы (a, b) и $(-b, a)$ аннулируют матрицу

$$\begin{pmatrix} A' & -A'' \\ -A'' & -A' \end{pmatrix},$$

и наоборот. Действительно, $(A' + iA'')(a + ib) = (A'a - A''b) + i(A''a + A'b) = 0$. Отсюда $A'a - A''b = 0$ и $A''a + A'b = 0$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} A' & -A'' \\ -A'' & -A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'a & -A''b \\ -A''a & -A'b \end{pmatrix} = 0.$$

Аналогичное рассмотрение проводится для вектора $(-b, a)$. Поэтому для голоморфных поверхностей наличие вещественного индекса сильной параболичности $k = 2\mu$ эквивалентно наличию сильной комплексной μ-параболичности, т.е. наличию в каждой точке касательного подпространства — комплексной μ-мерной плоскости, аннулирующей все матрицы второй комплексной квадратичной формы.

Кроме этого, если комплексное направление $a + ib$ — асимптотическое в комплексном смысле, то направление (a, b) асимптотическое в в вещественном смысле. В самом деле, в комплексном случае

$$(a^t + ib^t)(A' + iA'')(a + ib) = (a^t + ib^t)(A'\,a - A''\,b + i(A''\,a + A'\,b)) =$$
$$= a^t A'\,a - a^t A''\,b - b^t A''\,a - b^t A'\,b + i(b^t A'\,a - b^t A''\,b + a^t A''\,a + b^t A'\,b),$$

где знак t обозначает транспонирование. В вещественном случае

$$(a^t, b^t)\begin{pmatrix} A' & -A'' \\ -A'' & -A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a^t, b^t)\begin{pmatrix} A'\,a & -A''\,b \\ -A''\,a & -A'\,b \end{pmatrix} =$$
$$= a^t A'\,a - a^t A''\,b - b^t A'\,b - b^t A''\,a = 0.$$

Отсюда ясно, что если нет вещественных асимптотических направлений, то нет и комплексных.

Теперь основную теорему можно сформулировать и на "комплексном", и на "вещественном" языках.

Теорема 1. *Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^n$ — полная голоморфная поверхность, у которой индекс вещественной сильной параболичности $\geq 2\nu_0$ в каждой точке. Пусть множество вещественных асимптотических направлений совпадает с множеством векторов, аннулирующих вещественную вторую фундаментальную форму. Тогда F^l — цилиндр с ν_0-мерной комплексной образующей.*

Эквивалентная формулировка. *Пусть F^l — полная голоморфная поверхность в $\mathbb{C}^n$, у которой комплексный индекс сильной параболичности $\geq \nu_0$. Пусть множество комплексных асимптотических направлений совпадает с множеством направлений, аннулирующих вторые комплексные квадратичные формы относительно всех комплексных нормалей. Тогда F^l — цилиндр с ν_0-мерной комплексной образующей.*

Докажем теорему в последней формулировке.

Требование о том, чтобы конус асимптотических векторов совпадал с площадкой, аннулирующей вторую основную форму, уже влечет ограничение на коразмерность P поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^n$. Действительно, по теореме Безу система уравнений

$$\begin{matrix} a^1_{ij} z^i z^j = 0, & \\ \dots\dots\dots & i, j = \overline{1, l+1}, \\ a^l_{ij} z^i z^j = 0, & \end{matrix}$$

имеет по меньшей мере $2l$ нетривиальных решений с учетом кратности.

Указанное выше требование используется в доказательстве теоремы: если в какой-нибудь точке $Q \in F^l$ провести комплексную плоскость, ортогональную к площадке -"аннулятору" матриц вторых комплексных квадратичных форм в точке Q, то локально поверхность-сечение не будет иметь асимптотических направлений. Сечение нами рассматривается как поверхность в секущей плоскости. Размерность сечения равна $l - \nu_0$, размерность секущей плоскости равна $n - \nu_0$. Коразмерность сечения в секущей плоскости есть $(n - \nu_0) - (l - \nu_0) = n - l = p = \operatorname{codim} F^l \subset \mathbb{C}^n$.

Необходимо, чтобы сечение не имело асимптотических направлений, т.е. если через b^{α}_{ij}, $\alpha = \overline{1, p}$, обозначить комплексные вторые квадратичные формы сечения, система

$$b^1_{ij} z^i z^j = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b^p_{ij} z^i z^j = 0$$

должна иметь лишь тривиальное решение. Но по теореме Безу это будет возможно лишь при условии $l - \nu_0 \le p$. Отказаться от этого требования, не заменив его каким-либо другим, нельзя.

Рассмотрим, например, полную голоморфную поверхность в $\mathbb{C}^4$ с постоянным нуль-индексом 1

$$z_4 = z_1 \cos z_3 + z_2 \sin z_3,$$

а также полную голоморфную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^n$. Пусть в каждой точке индекс сильной параболичности (комплексный) $\ge \nu_0$, а в точке $Q_0 \in F^l$ этот индекс равен ν_0. Если на F^l смотреть как на вещественную поверхность, то в окрестности точки Q_0 вещественный индекс сильной параболичности равен $2\nu_0$. Поэтому через каждую точку в этой окрестности проходит единственная $2\nu_0$-мерная образующая, вдоль которой касательная плоскость стационарна [4]. Эта $2\nu_0$-мерная образующая есть ν_0-мерная комплексная плоскость. Для точки Q обозначим эту образующую через $A_{\nu_0}(Q)$.

Возьмем точку Q_0 и проведем через нее комплексную плоскость размерности $n - \nu_0$, ортогональную к $A_{\nu_0}(Q)$ в смысле эрмитова скалярного произведения. Она будет пересекать F^l по голоморфной поверхности $F^{l-\nu_0}$. Введем на $F^{l-\nu_0}$ голоморфные координаты $u^1, \ldots, u^{l-\nu_0}$. В $F^{l-\nu_0}$ существует окрестность точки Q_0, через каждую точку Q которой проходит $A_{\nu_0}(Q)$ трансверсально к $F^{l-\nu_0}$.

Выберем в $A_{\nu_0}(Q)$ ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{\nu_0}$ в смысле эрмитова скалярного произведения. В $A_{\nu_0}(Q)$ имеется единственный базис $s_1(Q), \ldots, s_{\nu_0}(Q)$, где $s_i(Q)$ — ортогонально проектируется в e_i, $i = \overline{1, \nu_0}$. Получим локальную параметризацию поверхности F^l:

$$r(u^1,\dots,u^{l-\nu_0},v^1,\dots,v^{\nu_0})=\rho\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})+\sum_{i=1}^{\nu_0}s_i\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})v^i. \qquad (1)$$

Здесь $\rho\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ — произвольная голоморфная параметризация окрестности точки Q_0 поверхности $F^{l-\nu_0}$.

Основная лемма. $s_i\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ — *голоморфные вектор-функции от* $u^1,\dots,u^{l-\nu_0}$. *А значит, (1) — голоморфная параметризация поверхности* F^l.

Сначала рассмотрим распределение Lin $\{s_1,\dots,s_{\nu_0}\}$. Покажем, что в рассматриваемой окрестности точки Q_0 каждой точке $Q(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})\in F^{l-\nu_0}$ можно поставить в соответствие базис $\Gamma_1\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}),\dots,\Gamma_{\nu_0}\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ линейного пространства $A_{\nu_0}(Q)=\mathrm{Lim}\,\{s_1,\dots,s_{\nu_0}\}$ и $\Gamma_j\,(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ — голоморфные вектор-функции ($j=\overline{1,\nu_0}$). Выберем декартовы координаты в C^n так, чтобы в окрестности точки Q_0 поверхность F^l задавалась в явной форме

$$\begin{aligned}&z^1=f^1(z^1,\dots,z^l),\\&\dots\dots\dots\dots\\&z^n=f^n(z^1,\dots,z^l),\end{aligned}$$

и матрицы вторых квадратичных форм относительно нормалей $\left(\bar f^{\,l+i}_{z^1};\dots;\bar f^{\,l+i}_{z^1};0;\dots;-1;0;\dots;0\right)$, $i=\overline{1,n-1}$ имели вид (с точностью до коэффициента пропорциональности)

$$\begin{pmatrix} f^{l+i}_{z^1z^1}; & \dots & f^{l+i}_{z^1z^l};\\ \dots & \dots & \dots\\ f^{l+i}_{z^lz^1}; & \dots & f^{l+i}_{z^lz^l};\end{pmatrix}^{l+i}.$$

Lin $\{s_1,\dots,s_{\nu_0}\}$ — это решение системы уравнений

$$\begin{aligned}&f^{l+1}_{z^1z^1}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)+\dots+f^{l+1}_{z^1z^l}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)=0,\\&f^{l+1}_{z^lz^1}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)+\dots+f^{l+1}_{z^lz^l}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)=0,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&f^{n}_{z^lz^1}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)+\dots+f^{n}_{z^lz^l}(z^1,\dots,z^l)A^1(z^1,\dots,z^l)=0.\end{aligned}\qquad(2)$$

$A^1,\dots,A^l$ — координаты векторов из Lin $\{s_1,\dots,s_{\nu_0}\}$ в базисе $r_{z^1};\dots;r_{z^l}$.

Система (2) по условию леммы имеет в окрестности точки Q_0 решение — ν_0-мерное линейное пространство. Значит, из этой системы можно выбрать $l - \nu_0$ независимых уравнений

$$B_{1,1} A^1 + \ldots + B_{1,l} A^l = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{l-\nu_0,1} A^1 + \ldots + B_{l-\nu_0,l} A^l = 0.$$

Функции $B_{ij}(z^1,\ldots,z^l)$, $i = \overline{1, l-\nu_0}$, $j = \overline{1, l}$ — голоморфные. Не ограничивая общности, пусть

$$\begin{vmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,1-\nu_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l-\nu_0,1} & \cdots & B_{l-\nu_0,l-\nu_0} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в точке } Q_0.$$

Рассмотрим систему

$$B_{1,1}A^1 + \ldots + B_{1,l-\nu_0}A^{l-\nu_0} = -B_{1,l-\nu_0+1}A^{l-\nu_0+1} - \ldots - B_{1,l}A^l;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{l-\nu_0,1}A^1 + \ldots + B_{l-\nu_0,l-\nu_0}A^{l-\nu_0} = B_{l-\nu_0,l-\nu_0+1}A^{l-\nu_0+1} - \ldots - B_{l-\nu_0,l}A^l.$$

Обратив невырожденную матрицу

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,l-\nu_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l-\nu_0,1} & \cdots & B_{l-\nu_0,l-\nu_0} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ \ldots \\ A^{l-\nu_0} \end{pmatrix} = A^{l-\nu_0+1} \begin{pmatrix} g_1^1 \\ \ldots \\ g_{l-\nu_0}^1 \end{pmatrix} + \ldots + A^l \begin{pmatrix} g_1^{\nu_0} \\ \ldots \\ g_{l-\nu_0}^{\nu_0} \end{pmatrix}.$$

Здесь $g_j^i(z^1,\ldots,z^l)$ — голоморфные функции, $A^{l-\nu_0+1},\ldots, A^l$ — произвольный набор чисел. Зададим его в следующем виде: $(1, 0,\ldots, 0);\ldots; (0;\ldots; 0, 1)$. Получим ν_0 линейно независимых векторов

$$\Gamma_1 = g_1^1 r_{z^1} + \ldots + g_{l-\nu_0}^1 r_{z^{l-\nu_0}} + r_{z^{l-\nu_0+1}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma_{\nu_0} = g_1^{\nu_0} r_{z^1} + \ldots + g_{l-\nu_0}^{\nu_0} r_{z^{l-\nu_0}} + r_{z^l};$$

$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\nu_0}$ — базис $\mathrm{Lin}\,\{ s_1, \ldots, s_{\nu_0} \}$. $\Gamma_i(z^1, \ldots, z^l)$ — голоморфные вектор-функции, $i = \overline{1, \nu_0}$. Какую бы другую голоморфную параметризацию поверхности F^l мы ни взяли, Γ_i, $i = \overline{1, \nu_0}$ останутся голоморфными вектор-функциями от новых параметров.

Выберем такую голоморфную параметризацию поверхности F^l в окрестности Q_0, в которой сечение $F^{l-\nu_0}$ локально описывается уравнениями $\xi^1 = 0; \ldots; \xi^{\nu_0}$, где $((\xi^1, \ldots, \xi^l)$ — новая голоморфная параметризация). Пусть $\Gamma_1(\xi^1, \ldots, \xi^l); \ldots; \Gamma_{\nu_0}(\xi^1, \ldots, \xi^l)$ — голоморфные вектор-функции. Но тогда и $\Gamma_1(0, \ldots, 0; \xi^{\nu_0+1}, \ldots, \xi^l), \ldots, \Gamma^{\nu_0}(0, \ldots, 0; \xi^{\nu_0+1}, \ldots, \xi^l)$ — голоморфные вектор-функции от $\xi^{\nu_0+1}, \ldots, \xi^l$, т.е. вектор-функции на $F^{l-\nu_0}$, а $\xi^{\nu_0+1}, \ldots, \xi^l$ — голоморфные координаты на $F^{l-\nu_0}$. Поэтому $\Gamma_i(u^1, \ldots, u^{l-\nu_0})$, $i = \overline{1, \nu_0}$ — голоморфные вектор-функции от голоморфных координат $u^1, \ldots, u^{l-\nu_0}$ на $F^{l-\nu_0}$ в окрестности точки Q_0 составляют базис

$$\{ \Gamma_i(u^1, \ldots, u^{l-\nu_0}) \}_{i=1}^{\nu_0};$$

при этом

$$\mathrm{Lin}\left\{ S_1(u^1, \ldots, u^{l-\nu_0}); \ldots; S_{\nu_0}(u^1, \ldots, u^{l-\nu_0}) \right\}.$$

Пусть $S_1(u_1, \ldots, u_{l-\nu_0}) = B_i^p(u)\Gamma_p(u)$, $p = \overline{1, \nu_0}$, $i = \overline{1, \nu_0}$. Выберем ортонормированный базис $\{ e_i \}$ в $\mathbb{C}^n$ так, что векторы $e_1, \ldots, e_{\nu_0}$ лежат в $A_{\nu_0}(Q)$. Тогда

$$\Gamma_j(u) = \Gamma_j^s(u) e_s, \quad j = \overline{1, \nu_0}, \quad s = \overline{1, n},$$

причем $\Gamma_j^s(u)$ — голоморфные вектор-функции.

$$S_i(u) = B_i^p(u)\Gamma_p^s(u) e_s; \qquad i,p = \overline{1, \nu_0}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Если мы покажем, что $B_i^p(u)$ — голоморфные функции, то основная лемма будет доказана. Учитывая, что в окрестности точки Q_0 пространство $A_{\nu_0}(Q)$ однозначно ортогонально проектируется на $A_{\nu_0}(Q) = \mathrm{Lin}\,\{ e_1, \ldots, e_{\nu_0} \}$, имеем

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1^1 & \dots & \Gamma_{\nu_0}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_1^{\nu_0} & \dots & \Gamma_{\nu_0}^{\nu_0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для нахождения коэффициентов B_i^p надо решить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & \dots & \Gamma_{\nu_0}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_1^{\nu_0} & \dots & \Gamma_{\nu_0}^{\nu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_i^1 \\ \dots \\ B_i^{l-\nu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} i,$$

здесь $\Gamma_j^i(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ — голоморфные функции. Элементы обратной матрицы тоже локально голоморфны. Значит, $B_i^p(u^1,\dots,u^{l-\nu_0})$ — голоморфные функции. Лемма доказана.

Мы доказали голоморфность параметризации F^l:

$$r(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}, v^1,\dots,v^{\nu_0}) = \rho(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}) + \sum_{i=1}^{\nu_0} v^i S_i(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}).$$

Заметим, что из-за полноты поверхности $v^1,\dots,v^{\nu_0}$ пробегают всевозможные значения из C.

Комплексная плоскость $\rho(u) + \mathrm{Lin}\{S_1(u);\dots;S_{\nu_0}(u)\}$ целиком лежит на F^l.

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем на "комплексном языке". В окрестности точки Q_0 поверхность голоморфно параметризована:

$$r(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}, v^1,\dots,v^{\nu_0}) = \rho(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}) + \sum_{i=1}^{\nu_0} v^i S^i(u^1,\dots,u^{l-\nu_0}) \tag{3}$$

Вектор S_i может быть представлен как

$$S_i = e_i + \overline{S}_i, \quad i = \overline{1,\dots,\nu_0},$$

где $\overline{S}_i$ — его составляющая в секущей плоскости — плоскости поверхности $F^{l-\nu_0}$. Тогда $\dfrac{\partial S^i}{\partial u^j}$ — вектор из секущей плоскости, который равен сумме вектора, касательного к $F^{l-\nu_0}$, и вектора, нормального к $F^{l-\nu_0}$:

$$\frac{\partial S_i}{\partial u^j} = B_{j,i}^q \rho_{u^q} + C_{j,i}^t N_t, \tag{4}$$

где $\{N_t\}$, $t = \overline{1, n-l}$ — базис нормального пространства к $F^{l-\nu_0}$;

$$r_{u^j} = \rho_{u^j} + \sum_{i=1}^{\nu_0} v^i \left(B^q_{j,i} \rho_{u^q} + C^t_{j,i} N_t \right). \tag{5}$$

Заметим, что касательное пространство вдоль $A_{\nu_0}(Q)$ стационарно [4] и при всех значениях $v^1, \ldots, v^{\nu_0}$ составлено из прямой суммы $A_{\nu_0}(Q)$ и $\mathrm{Lin}\,\{\rho_{u^1}; \ldots; \rho_{u^{l-\nu_0}}\}$.

Нормальное пространство к $F^{l-\nu_0}$ в секущей плоскости трансверсально к $A_{\nu_0}(Q) \oplus \mathrm{Lin}\,\{\rho_{u^1}; \ldots; \rho_{u^{l-\nu_0}}\}$. Поэтому в (5)

$$\sum_{i=1}^{\nu_0} v^i C^t_{ji} = 0$$

для всех v. Отсюда $C^t_{ji} \equiv 0$, и (4) запишется в виде

$$\frac{\partial S_i}{\partial u^j} = B^q_{j,i} \rho_{u^q}; \tag{6}$$

где $B^q_{j,i}(u^1, \ldots, u^{l-\nu_0})$ — голоморфные функции. Тогда (5) принимает вид

$$r_{u^j} = \rho_{u^j} + \sum_{i=1}^{\nu_0} v^i B^q_{j,i} \rho_{u^q} = \left(\delta^j_q + \sum_{i=1}^{\nu_0} v^i B^q_{j,i} \right) \rho_{u^q}. \tag{7}$$

Для того, чтобы поверхность была регулярной, необходимо, чтобы $r_{u^1}, \ldots, r_{u^{l-\nu_0}}$ образовывали линейно независимую систему.

Связь этой системы с системой $\rho_{u^1}, \ldots, \rho_{u^{l-\nu_0}}$ осуществляется матрицей $\left(I + \sum_{i=1}^{\nu_0} B_i v_i \right)$. Поэтому необходимое условие регулярности —

$$\det \left(I + \sum_{i=1}^{\nu_0} B_i v_i \right) \neq 0 \tag{8}$$

при всех v_i, $\overline{i = 1, \nu_0}$. Как мы уже отмечали, именно здесь используется полнота F^l.

Пусть $N_1, \ldots, N_{n-l}$ — ортонормированный базис нормального к $F^{l-\nu_0}$ пространства в секущей плоскости. Имеем

$$\frac{\partial \rho_{u^q}}{\partial u^t} = \Gamma^i_{tq} \rho_i + \Omega^p_{tq} N_p, \tag{9}$$

где Ω^p_{tq} — кристаллы комплексной второй квадратичной формы поверхности $F^{l-\nu_0}$ относительно нормали N_p в секущей плоскости. Продифференцируем по t равенство (6):

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial u^j \partial u^t} = \frac{\partial B^q_{j,i}}{\partial u^t} \rho_{u^q} B^q_{j,i} \Gamma^l_{t,q} \rho_l + B^q_{j,i} \Omega^p_{tq} N_p; \tag{10}$$

с другой стороны,

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial u^t\,\partial u^j} = \frac{\partial B^q_{t,i}}{\partial u^j}\rho_{u^q} B^q_{t,i}\Gamma^i_{j,q}\rho_i + B^q_{t,i}\Omega^p_{jq}N_p\,. \tag{11}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial^2 S_i}{\partial u^j\,\partial u^t} = \dfrac{\partial^2 S_i}{\partial u^t\,\partial u^j}$, приравняем нормальные составляющие (10) и (11):

$$B^q_{j,i}\,\Omega^p_{tq} = B^q_{t,i}\,\Omega^p_{jq}\,. \tag{12}$$

Заметим, что все встречающиеся здесь уравнения и условия аналогичны вещественным, полученным в [5].

А теперь покажем, что все собственные числа операторов B_i, $i = \overline{1, \nu_0}$, равны нулю. Например, рассмотрим B_1. Выберем в окрестности точки Q голоморфные координаты так, чтобы в точке Q матрица B_1 привелась к жордановой форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & & . & & & \\ 0 & \alpha_1 & 1 & & . & & 0 & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & \alpha_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \alpha_m & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & 0 & & . & 0 & . & \alpha_m \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — собственные числа оператора B_1. Покажем, к примеру, что $\alpha_m = 0$. Если бы $\alpha_m \neq 0$, можно было бы взять $v_1 = -\dfrac{1}{\alpha}$; $v_2 = \ldots = v_{\nu_0} = 0$, и тогда $\det(I + B_1 v_1) = 0$, что противоречит (8). Итак, все собственные числа операторов B_i, $i = \overline{1, \nu_0}$, равны нулю.

Теперь покажем, что все B_i, $i = \overline{1, \nu_0}$ — нулевые матрицы. Опять выберем параметризацию так, чтобы в точке $Q \in F^{l - \nu_0}$ матрица B_i привелась к жордановой форме:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \\ k \\ \\ \downarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

причем над главной диагональю имеется k единиц.

С учетом (12) произведение матриц $B_i\,\Omega^p$ — симметрическая матрица. Рассмотрим у этой матрицы элементы $(k, k+1)$ и $(k+1, k)$. Элемент $(k+1, k) = \Omega^p_{k+1,\,k+1}$; элемент $(k+1, k) = 0$.

Имеет место $\Omega^p_{k+1,\,k+1}$ для всех p. Но тогда имеется комплексное асимптотическое направление на $F^{l-\nu_0}$ как на поверхности в секущей плоскости, а отсюда следует наличие комплексного асимптотического направления на F^l, трансверсального к площадке-аннулятору вторых квадратичных комплексных форм. По условию теоремы это невозможно. Значит, над диагональю единиц быть не может.

Матрицы $B_i \equiv 0$, $i = \overline{1, \nu_0}$, в окрестности точки Q_0. Имеем

$$\frac{\partial S_i}{\partial u_j} \equiv 0, \quad i = \overline{1, \nu_0}; \quad j = \overline{1, l - \nu_0} \quad (\text{см. } (4)).$$

Поэтому в окрестности точки Q_0 векторы $S_1, \ldots, S_{\nu_0}$ постоянны вдоль сечения. Но тогда F^l в окрестности точки Q_0 — цилиндр. В силу голоморфности поверхность F^l является глобально цилиндром.

В ходе доказательства теоремы 1 показано: если имеется полная голоморфная поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^n$, у которой в окрестности точки Q_0 индекс комплексной сильной параболичности равен $(l-1)$ в каждой точке, то ее можно локально параметризовать:

$$r(u^1, \ldots, u^l) = \rho(u^1) + \sum_{i=2}^{l} u^i S_i(u^1),$$

здесь $\rho(u^1)$ описывает сечение F^l $(n - l + 1)$-мерной комплексной плоскостью. Поскольку $\dfrac{\partial S^i}{\partial u^1} = B_{\rho_{u^1}}$, B — это комплексное число, равное нулю, то

$$\frac{\partial S^i}{\partial u^1} \equiv 0, \quad i = \overline{r, l}.$$

Имеем $S^i = \mathrm{const}$ в окрестности точки Q_0 и F^l — цилиндр, имеющий $(l-1)$-мерную образующую. Из голоморфности следует, что F^l — глобальный цилиндр с $(l-1)$-мерной образующей. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^n$ — полная голоморфная поверхность, комплексный индекс сильной параболичности которой $\geq l - 1$. Тогда F^l — цилиндр с $(l-1)$-мерной комплексной образующей.*

Список литературы

1. *P. Hartman, L. Nirenberd*, On spherical image maps whose jacobians do not change sign.— Amer. J. Math. (1959), v. 81, No 1, pp. 13–15.
2. *С. Стернгберг*, Лекции по дифференциальной геометрии. Мир, Москва (1979), 195 с.
3. *K. Abe*, A complex analogue of Hartman-Nirenberg cylinder theorem.— J. Dif. geometry (1972), v. 7, № 3–4, pp. 381–392.
4. *А. А. Борисенко*, О строении n-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве. — Укр. геометр. сб. (1973), вып. 13, с. 18–27.
5. *А. А. Борисенко*, О полных параболических поверхностях.— Укр. геометр. сб. (1985), вып. 28, с. 8–19.
6. *А. А. Борисенко*, Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу.— Мат. заметки (1989), т. 46, № 3, с. 9–11.

7. *А. А. Борисенко*, Поверхности неположительной внешней кривизны в пространстве постоянной кривизны.— Мат. сб. (1981), т. 116 (158), № 3, с. 440–457.
8. *В. В. Шабат*, Введение в комплексный анализ, Ч. II. Наука, Москва (1985), 280 с.

On the cylindricity of complete strong parabolic Kahler submanifolds in complex Hermitian space

A.A. Borisenko, S.A. Ostroumov

A complete l-dimensional Kahler surface F^l in the Hermitian space of a positive real-valued extrinsic nullity index is considered. It is proved that F^l is a complex cylinder under certain conditions for a set of asymptotic directions.

Про циліндричність сильно параболічних келерових підмноговидів у комплексному ермітовому просторі

О.А. Борисенко, С.А. Остроумов

Розглядається повна l-вимірна келерова поверхня F^l в ермітовому просторі з додатним дійсним зовнішнім нуль-індексом. За певних умов, поставлених до множини асимптотичних напрямів, доведено, що F^l — комплексний циліндр.