Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 312–318

УДК 517.982

Продолжение равномерно выпуклых норм

А.Ю. Келлерман

Харьковский государственный университет Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 18 апреля 1994 года

Показано, что в суперрефлексивном пространстве любая эквивалентная равномерно выпуклая норма на подпространстве может быть продолжена до эквивалентной равномерновыпуклой нормы на всем пространстве. Аналогичный результат получен также для строго выпуклых норм.

0. Введение

Пусть X — банахово пространство и Y — его замкнутое подпространство. Пусть на Y задана некоторая норма, эквивалентная исходной норме пространства X и обладающая определенным "хорошим" свойством. Возникает вопрос, можно ли продолжить "хорошую" норму с Y на все X, сохраняя их эквивалентность. Ответ на этот вопрос, очевидно, отрицательный, если известно, что на X вообще нельзя ввести эквивалентную "хорошую" норму. Поэтому далее мы будем предполагать, что на пространстве X можно ввести эквивалентную норму, обладающую интересующим нас свойством.

В настоящей работе рассматривается вопрос о продолжении строго выпуклых и равномерно выпуклых норм.

Определение 0.1. *Норма $\|\cdot\|$ на пространстве X называется строго выпуклой, если единичная сфера пространства X*

$$S_{\|\cdot\|} = \{ x \in X : \|x\| = 1 \}$$

не содержит отрезков ненулевой длины.

Как легко убедиться, верно

Утверждение 0.2. *Норма $\|\cdot\|$ на X — строго выпуклая тогда и только тогда, когда для всех несонаправленных x и y из X выполняется "строгое неравенство треугольника"*

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Легко видеть, что если Y — дополняемое замкнутое подпространство в банаховом пространстве X, допускающем строго выпуклую норму, и на Y норма строго выпукла, то она эквивалентным образом продолжается с Y на X с сохранением свойства строгой выпуклости [1]. В работе [2] доказано, что в случае сепарабельного фактор-пространства X/Y строго выпуклую норму можно продолжить с X на Y с сохранением строгой выпуклости. В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 0.3. *Пусть X — банахово пространство, и на его замкнутом рефлексивном подпространстве Y задана эквивалентная строго выпуклая норма. Пусть на X существует некоторая эквивалентная строго выпуклая норма. Тогда норма на Y эквивалентно продолжается до строго выпуклой нормы на всем x.*

Определение 0.4. *Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Функция*

$$\delta_{\|\cdot\|}(t) = \inf \{ 1 - \|x + y\|/2 : x, y \in S,\ \|x + y\| \geq t \}$$

называется модулем выпуклости нормы $\|\cdot\|$.

Норма $\|\cdot\|$ на X называется равномерно выпуклой, если $\delta_{\|\cdot\|}(t) > 0$ при любом $t > 0$.

Утверждение 0.5 [3]. *Норма $\|\cdot\|$ на X равномерно выпукла тогда и только тогда, когда для любых двух последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ из единичной сферы S условие $\|x_n + y_n\| \to 2$ влечет $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

Основным результатом данной работы является доказательство того, что в суперрефлективном пространстве любая эквивалентная равномерно выпуклая норма на подпространстве может быть продолжена до эквивалентной равномерно выпуклой нормы на всем пространстве.

Предлагаемая работа является кратким изложением работы, выполненной автором в Харьковском государственном университете в 1993 г. под руководством В.М. Кадеца. Все доказательства даны в сжатом виде.

1. Основная конструкция

Построим норму, которую впоследствии используем для доказательства основного результата.

Пусть X — банахово пространство с нормой $|\cdot|$, Y — его замкнутое подпространство с эквивалентной нормой $\|\cdot\|_1$, а $\|\cdot\|_2$ — некоторая эквивалентная норма на X, выбранная так, что

$$\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \text{ на } Y.$$

Хорошо известна следующая теорема (см., например, [4]).

Теорема 1.1. *Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_2$, а на замкнутом подпространстве $Y \subset X$ задана также эквивалентная норма $\|\cdot\|_1$. Тогда норма на Y эквивалентно продолжается на все X.*

Новая норма на X в этой теореме определяется следующим образом:

$$\|x\| = \inf \{ \|z\|_2 + \|y\|_1 : z \in X, y \in Y, x = y + z \}. \tag{1.1}$$

Утверждение 1.2. *Пусть в условиях теоремы* 1.1 Y *— рефлексивное пространство. Тогда в формуле* (1.1) *для любого* $x \in X$ *существуют такие* $y \in Y$ *и* $z \in X$, *что* $x = y + z$ *и* $\|x\| = \|y\|_1 + \|z\|_2$.

Заметим, что, если на Y задана равномерно выпуклая норма, то пространство Y является рефлексивным [5, гл. 2, п. 4, теорема 2], т.е. удовлетворяет условиям утверждения 1.2.

Норму на фактор-пространстве X/Y определим обычным образом: $p(\bar{x}) = \inf \{ \|y\|_2 : y \in x \}$, где $\bar{x}$ — класс эквивалентности элемента x.

Введем новую норму на X:

$$|||x||| = (\|x\|^2 + p^2(\bar{x}))^{1/2}. \tag{1.2}$$

Это норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|$ на X, и $|||\cdot||| = \|\cdot\|_1$ на Y.

Заметим, что в случае рефлексивного Y для любого $x \in X/Y$ существует такое $y \in x$, для которого $\|y\|_2 = p(\bar{x})$. Отсюда простой проверкой получаем две леммы.

Лемма 1.3. *Пусть X — строго выпуклое банахово пространство и Y — его замкнутое рефлексивное подпространство. Тогда фактор-пространство X/Y — строго выпуклое пространство.*

Лемма 1.4 [6, с. 194]. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и Y — его замкнутое подпространство. Тогда фактор-пространство X/Y — равномерно выпуклое пространство.*

Утверждение 1.5. *Пусть в условиях утверждения* 1.2 *нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *строго выпуклые. Тогда для любых несонаправленных* x_1 *и* x_2 *из* $S_{|||\cdot|||}$, *если* $x_1 - x_2 \in Y$, *то* $\|x_1 - x_2\| < 2$.

В силу утверждения 1.2 существуют такие y_1, $y_2 \in Y$ и z_1, $z_2 \in X$, что $x_1 = y_1 + z_1$, $\|x_1\| = \|y_1\|_1 + \|z_1\|_2$ и $x_2 = y_2 + z_2$, $\|x_2\| = \|y_2\|_1 + \|z_1\|_2$. Далее в силу строгой выпуклости норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ получаем требуемое.

Утверждение 1.6. *Пусть в условиях утверждения* 1.2 *нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *строго выпуклые. Тогда для любых* x_1, $x_2 \in S_{|||\cdot|||}$ *условие* $[x_1, x_2] \subset S_{|||\cdot|||}$ *влечет* $x_1 - x_2 \in Y$, *где* $[x_1, x_2] = \{ ax_1 + (1-a)x_2 : a \in [0, 1] \}$.

Предположим, что существуют такие x_1, $x_2 \in S_{|||\cdot|||}$, что $[x_1, x_2] \subset S_{\|\cdot\|}$ и $x_1 - x_2 \notin Y$. Тогда $|||x_1 + x_2||| = 2$. То есть

$$2 = |||x_1 + x_2||| \le \left((\|x_1\| + \|x_2\|)^2 + (p(\bar{x}_1) + p(\bar{x}_2))^2 \right)^{1/2} \le$$
$$\le \left(\|x_1\|^2 + p^2(\bar{x}_1) \right)^{1/2} + \left(\|x_2\|^2 + p^2(\bar{x}_2) \right)^{1/2} = 2. \tag{1.3}$$

Следовательно, выражение (1.3) является равенством. В силу строгой выпуклости нормы p векторы x_1 и x_2 сонаправлены и $(x_1 = ax_2, a > 0)$, $\|x_1\| = a\|x_2\|$ и $p(\bar{x}_1) = ap(\bar{x}_2)$. Но $|||x_1||| = |||x_2|||$и, следовательно, $a = 1$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ и $x_1 - x_2 \in Y$.

Из последних двух утверждений легко получается теорема 0.3.

2. Доказательство основного результата

Легко видеть, что верно следующее

Утверждение 2.1. *Норма* $\|\cdot\|$ *на* X *равномерно выпукла тогда и только тогда, когда для любой последовательности пар* $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $x_n \in S_{\|\cdot\|}$, $y_n \in S_{\|\cdot\|}$, *удовлетворяющей условию* $\|x_n + y_n\| \to 2$, *существует такая подпоследовательность* $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ *исходной последовательности, что* $\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \to 0$.

Лемма 2.2. [6, с. 191]. *Пусть* X *— равномерно выпуклое пространство с нормой* $\|\cdot\|$. *Тогда для всех* $x, y \in X$

$$\|x + y\|/2 \leq (\|x\| + \|y\|) - \min\{\|x\|, \|y\|\}\,\delta_{\|\cdot\|}(x\widehat{,}y),$$

где $x\widehat{,}y = \left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|$.

Воспользуемся описанными выше обозначениями. Докажем, что построенная норма $|||\cdot|||$на X — искомая, а именно, что она равномерно выпуклая, если нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ равномерно выпуклы. Пусть

$$\{(x_n', x_n'')\}_{n=1}^{\infty} \subset S_{|||\cdot|||} \times S_{|||\cdot|||} \text{ и } |||x_n' + x_n''||| \to 2.$$

Докажем, что в ней существует такая подпоследовательность $\{(x_{n_k}', x_{n_k}'')\}_{k=1}^{\infty}$, что $|||x_{n_k}' + x_{n_k}''||| \to 0$. Тогда по утверждению 2.1 норма $|||\cdot|||$ будет равномерно выпуклой. То есть

$$\begin{aligned} |||x_n' + x_n''||| &\leq \left((\|x_n' + x_n''\|)^2 + (p(\overline{x_n' + x_n''}))^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left((\|x_n'\| + \|x_n''\|)^2 + (p(\bar{x}_n') + (p(\bar{x}_n''))^2 \right)^{1/2} \leq 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Условие $|||x_n' + x_n''||| \to 2$ влечет

$$\left((\|x_n'\| + \|x_n''\|)^2 + (p(\bar{x}_n') + (p(\bar{x}_n''))^2 \right)^{1/2} \to 2. \tag{2.2}$$

По утверждению 1.2 для любого n существуют такие $y_n', y_n'' \in Y$ и $z_n', z_n'' \in X$, что

$$x'_n = y'_n + z'_n, \quad \|x'_n\| = \|y'_n\|_1 + \|z'_n\|_2, \quad x''_n = y''_n + z''_n,$$
$$\|x''_n\| = \|y''_n\|_1 + \|z''_n\|_2.$$

Рассмотрим последовательность

$$u_n = \Big(\|x'_n\|, \|x''_n\|, p(\overline{x}'_n), p(\overline{x}''_n),$$
$$\|x'_n + x''_n\|, p(\overline{x'_n + x''_n}), \|y'_n\|_1, \|y''_n\|_1, \|z'_n\|_2, \|z''_n\|_2\Big)$$

в R^{10}. Очевидно, она ограничена в R^{10}, и, следовательно, имеет подпоследовательность (обозначим ее так же), сходящуюся к некоторому $u_0 = (a', a'', b', b'', 2a, 2b, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$. Ввиду (2.1) и (2.2) имеем

$$a' = a'' = a, \quad b' = b'' = b, \quad \alpha' + \beta' = \alpha'' + \beta'' = a. \tag{2.3}$$

В силу равномерной выпуклости нормы p имеем

$$p(\overline{x'_n - x''_n}) = p(\overline{z'_n - z''_n}) \to 0. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $\|x'_n\| \to a$, $\|x'_n + x''_n\| \to 2a$, $\overline{x}'_n \to 0$ *и* $\overline{x}''_n \to 0$. *Тогда* $\|x'_n - x''_n\| \to 0$.

Доказательство. Так как $x'_n \to 0$ и $x''_n \to 0$, то для любого числа n существуют такие $\tilde{x}'_n$, $\tilde{x}''_n \in Y$, что $\|\tilde{x}'_n - x'_n\| \to 0$ и $\|\tilde{x}''_n - x''_n\| \to 0$. Легко видеть, что $\|\tilde{x}'_n\| \to a$, $\|\tilde{x}''_n\| \to a$, $\|\tilde{x}'_n + \tilde{x}''_n\| \to 2a$, откуда, в силу равномерной выпуклости нормы $\|\cdot\|$ на Y, имеем $\|\tilde{x}'_n - \tilde{x}''_n\| \to 0$ и $\|x'_n - x''_n\| \to 0$.

Лемма 2.4. *Пусть*

$$\|\beta' z''_n - \beta'' z'_n\| \to 0, \tag{2.5}$$

$$\|\alpha' y''_n - \alpha'' y'_n\| \to 0. \tag{2.6}$$

Тогда $\|x'_n - x''_n\| \to 0$.

Доказательство. Если $\beta' = \beta''$, тогда в силу (2.3) $\alpha' = \alpha''$ и $\|x'_n - x''_n\| \to 0$. Пусть $\beta'' \neq \beta'$. Обозначим $z'_n - z''_n$ через v_n. Тогда $z''_n = z'_n - v_n$ и по (2.4) $p(\overline{v}_n) \to 0$. Из (2.3) получаем $p(\overline{\beta' z''_n - \beta'' z'_n}) \to 0$ и $p(\overline{\beta'' z''_n - \beta' (z'_n - v_n)}) \to 0$. Отсюда

$$0 \le |\beta' - \beta''|\, p(\overline{z}'_n) = p(\overline{\beta'' z'_n - \beta' z'_n}) \le p(\overline{v}_n) + p(\overline{\beta'' z''_n - \beta' (z'_n - v_n)}) \to 0$$
$$\text{и } |\beta' - \beta''|\, p(\overline{z}_n) \to 0.$$

Аналогично $|\beta' - \beta''|\, p(\overline{z}''_n) \to 0$. Итак, $p(\overline{z}'_n) \to 0$ и $p(\overline{z}''_n) \to 0$. Тогда $x'_n \to 0$ и $x''_n \to 0$ и по лемме 2.3 $\|x'_n - x''_n\| \to 0$.

Переходим к заключительному этапу доказательства основного результата. Пусть $\delta_1 = \delta_2$ — модули выпуклости норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, $a_n = \min\{\|y_n'\|_1, \|y_n''\|_1\}$ и $b_n = \min\{\|z_n'\|_2, \|z_n''\|_2\}$. Тогда существует подпоследовательность пар $\{(x_n', x_n'')\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая одному из следующих условий:

1. $b_n \to 0$,

2. $b_n \to \beta > 0$ и $a_n \to 0$,

3. $b_n \to \beta > 0$, $a_n \to \alpha > 0$, $a_n > 0$ и $b_n > 0$ для всех n.

Докажем, что $\|x_n' - x_n''\| \to 0$ во всех трех случаях.

1. Пусть $b_n \to 0$, тогда $z_n' \to 0$ или $z_n'' \to 0$ и, по (2.4), $p(\bar{z}_n') \to 0$ и $p(\bar{z}_n'') \to 0$. Следовательно, $\bar{x}_n' \to 0$ и $\bar{x}_n'' \to 0$ и по лемме 2.3 $\|x_n' - x_n''\| \to 0$.

2. Пусть $b_n \to b > 0$ и $a_n \to 0$. Можно считать, что $a_n = \|y_n'\|_1$. Тогда

$$2a \leftarrow \|x_n' + x_n''\| \le \|z_n' + z_n''\|_2 + \|y_n' + y_n''\|_1 \le$$

$$\le \|y_n'\|_1 + \|y_n''\|_1 - 2a_n\delta_1(y_n' \widehat{,} y_n'') + \|z_n'\|_2 + \|z_n''\|_2 - 2b_n\delta_2(z_n' \widehat{,} z_n'')$$

(по лемме 2.2). Напомним, что $\|y_n'\|_1 + \|y_n''\|_1 + \|z_n'\|_2 + \|z_n''\|_2 \to 2a$. Имеем $a_n\delta_1(y_n' \widehat{,} y_n'') + b_n\delta_2(z_n' \widehat{,} z_n'') \to 0$ и $b_n\delta_2(z_n' \widehat{,} z_n'') \to 0$. Следовательно, из свойств модуля выпуклости $z_n' \widehat{,} z_n'' \to 0$ и $\left\| \dfrac{z_n'}{\|z_n'\|_2} - \dfrac{z_n''}{\|z_n''\|_2} \right\| \to 0$, откуда имеем $\|\beta' z_n'' - \beta'' z_n'\| \to 0$.

Так как $a_n \to 0$, то $\alpha' = 0$ и $y_n \to 0$, откуда $\alpha' y_n'' - \alpha'' y_n' \to 0$ и по лемме 2.4 $\|x_n' - x_n''\| \to 0$.

3. Пусть $b_n \to \beta > 0$, $a_n \to \alpha > 0$, $a_n > 0$ и $b_n > 0$. Тогда имеем $a_n\delta_1(y_n' \widehat{,} y_n'') + b_n\delta_2(z_n' \widehat{,} z_n'') \to 0$, как и во втором случае. Итак, $a_n\delta_1(y_n' \widehat{,} y_n'') \to 0$ и $b_n\delta_2(z_n' \widehat{,} z_n'') \to 0$. Поэтому $y_n' \widehat{,} y_n'' \to 0$ и $z_n' \widehat{,} z_n'' \to 0$.Отсюда $\|\alpha' y_n'' - \alpha'' y_n'\| \to 0$ и $\|\beta' z_n'' - \beta'' z_n'\| \to 0$. По лемме 2.4 имеем $\|x_n' - y_n''\| \to 0$. Доказана теорема:

Теорема 2.5. *Пусть X — банахово пространство, Y — его замкнутое подпространство. Пусть на Y задана эквивалентная равномерно выпуклая норма и на X существует некоторая эквивалентная равномерно выпуклая норма. Тогда норма на Y эквивалентно продолжается до равномерно выпуклой нормы на всем X.*

Список литературы

1. *K. John, V. Zizler*, On extension of rotund norms. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sc. math., astron. et. phis. (1976), v. 24, № 9, pp. 705–707.
2. *K. John, V. Zizler*, On extension of rotund norms. II.— Pacif. J. Math. (1979), v. 82, pp. 451–455.
3. *М. М. Дэй*, Нормированные линейные пространства. Мир, Москва (1961), 232 с.

4. *A. Pelczynski.* — Studia Math. (1960), v. 19, pp. 209–228.
5. *Дж. Дистель*, Геометрия банаховых пространств. Вища школа, Киев, (1980), 215 с.
6. *B. Beausamy*, Introduction to Banach spaces and their geometry. North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford (1982), 308 p.

Extension of Uniformly Convex Norms

A.Yu. Kellerman

In the uniformly convex Banach space any equivalent uniformly convex norm on a closed subspace may be extended to an equivalent uniformly convex norm on the whole space. The same result is obtained also for strictly convex norm.

Продовження рівномірно опуклих норм

Г.Ю. Келлерман

Показано, що у суперрефлексивному просторі кожна еквівалентна рівномірно опукла норма на підпросторі може бути продовжена до еквівалентної рівномірно опуклої норми на усьому просторі. Аналогічний результат отримано також для строго опуклих норм.