Математическая физика, анализ, геометрия
1995, т. 2, № 3/4, с. 319–328

УДК 514

О построении изометрических погружений областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с помощью решений уравнения "синус-Гордона"

О.В. Кузнецов

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 г.

Рассматриваются изометрические погружения областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 в виде поверхностей в E^4, имеющих нулевое гауссово кручение. Эти погружения строятся с помощью решений уравнения "синус Гордлона". Доказывается, что погружаемые области L^2 есть части полос, ограниченных двумя орициклами или двумя эквидистантами геодезической линии; указываются также размеры рассмотренных областей.

Вопрос об изометрических погружениях двумерных метрик (поверхностей) в евклидовом пространстве является одним из интересных вопросов геометрии в целом. Согласно теореме Гильберта всю плоскость Лобачевского невозможно изометрически погрузить в трехмерное евклидово пространство E^3. Известно, однако, что L^2 погружается в E^5 [1]. Вопрос о погружении L^2 в E^4 по-прежнему остается открытым.

В настоящей работе автор рассматривает изометрические погружения областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с плоской нормальной связностью. Такие погружения рассматривались Ю.А. Аминовым в работах [2-4]. Показано, что если в качестве координатной сети взять сеть, состоящую из линий кривизны, то метрика реализации $F^2 \subset E^4$ погружений указанного типа будет иметь вид

$$ds^2 = \cos^2\theta\,(\sin^2\omega\, dx^2 + \cos^2\omega\, dy^2).$$

В [3] установлено, что при определенных условиях функции ω и θ есть решения вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений:

$$\omega_x = -\varphi_y - \frac{\sin\varphi\cos\omega\,(\alpha\sin\theta + 1)}{\cos\theta},$$
$$\omega_y = -\varphi_x + \frac{\cos\varphi\sin\omega\,(\alpha\sin\theta + 1)}{\cos\theta}, \tag{1}$$

$$\theta_x = \sin\varphi\sin\omega\,(\sin\theta + \alpha),$$
$$\theta_y = \cos\varphi\cos\omega\,(\sin\theta + \alpha), \tag{2}$$

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = (\alpha^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{3}$$

Здесь α — произвольная константа. Задавая какие-либо функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющие уравнению (3), мы получим решения системы (1)-(2), а значит, и некоторые параметризации гиперболической плоскости, приводящие к погружениям в E^4. Для полноты укажем, что геометрические исследования поверхностей в E^3, связанные с уравнением "синус-Гордона", проводились в работах [5,6].

Следует обратить внимание, что, как замечено в работе [3], у описываемых погружений ни одна из координат центра эллипса нормальной кривизны не обращается в нуль тождественно, т.е. заданные погружения не могут быть помещены в E^3.

В работе [3] решена система (1)-(2) для случая, когда $|\alpha| = 1$. В [7] найдено решение этой же системы, соответствующее односолитонному решению $\varphi(x, y)$ уравнения (3).

В данной статье автор предлагает обобщение рассматриваемой задачи на случаи, когда на $\varphi(x, y)$ не накладываются никакие ограничения кроме того, что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет (3). Доказаны такие теоремы:

Теорема 1. *Для любой функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению* (3), *существует решение системы* (1)-(2), *а значит, изометрическое погружение некоторой области плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с плоской нормальной связностью. При этом если $\sin\theta + \alpha \not\equiv 0$, то погружаются куски полос постоянной ширины, заключенные между двумя орициклами. Размеры указанных кусков зависят от начальных условий $\varphi(\xi, 0)$, $\varphi(0, \tau)$, $\theta(0, 0)$, $\omega(0, 0)$, где $\xi = \dfrac{x+y}{2}$, $\tau = \dfrac{x-y}{2}$.*

Теорема 2. *Если $\sin\theta + \alpha \equiv 0$, то:*

а) *Функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет уравнению "синус-Гордона"*

$$\omega_{xx} - \omega_{yy} = (\alpha^2 - 1)\sin\omega\cos\omega. \tag{4}$$

б) *Для любой функции $\omega(x, y)$, являющейся решением уравнения* (4) *в круге $\rho \le R_3 - \varepsilon$ (где ρ — полярный радиус на плоскости параметров (x, y), R_3 зависит от начальных условий $\omega(\xi, 0)$, $\omega(0, \tau)$, $\omega(0, 0)$), существует единственная функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая* (3) *такая, что будет выполняться система уравнений* (1)–(2).

1. Априорные оценки на область параметров

Во-первых, сделаем замену переменных x, y на ξ, τ по закону $\xi = \dfrac{x+y}{2}$, $\tau = \dfrac{x-y}{2}$. Тогда

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = \varphi_{\xi\tau} = (\alpha^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{3'}$$

В переменных ξ, τ (1)–(2) примет такой вид:

$$(\omega + \varphi)_\xi = \frac{\alpha\sin\theta + 1}{\cos\theta}\sin(\omega - \varphi),$$

$$(\omega - \varphi)_\tau = -\frac{\alpha\sin\theta + 1}{\cos\theta}\sin(\omega + \varphi), \tag{1'}$$

$$\theta_\xi = (\sin\theta + \alpha)\cos(\omega - \varphi),$$
$$\theta_\tau = -(\sin\theta + \alpha)\cos(\omega + \varphi). \qquad (2')$$

Нетрудно убедиться, что (1′)–(2′) вполне интегрируема, если выполняется (3′). Будем рассматривать уравнения (2′),(3′). Зададим начальные условия $\varphi(\xi, 0)$, $\varphi(0, \tau)$, $\theta(0, 0)$. Тогда, если на плоскости параметров ввести полярные координаты (ρ, γ) и интегрировать по полярному радиусу ρ, получим, что

$$\theta(\xi, \tau) - \theta(0, 0) = \int \theta_\xi\, d\xi + \theta_\tau\, d\tau.$$

Следовательно, $|\theta(\xi,\tau) - \theta(0,0)| \le \left|\int_0^\rho \theta_\xi\, d\xi\right| + \left|\int_0^\rho \theta_\tau\, d\tau\right| \le 2(1 + |\alpha|)\rho.$

Отсюда получаем, что

$$\theta(0,0) - 2(1 + |\alpha|)\rho \le \theta(\xi,\tau) \le \theta(0,0) + 2(1 + |\alpha|)\rho.$$

Для того, чтобы метрика ds^2 была регулярной, должно выполняться неравенство $-\frac{\pi}{2} < \theta(\xi,\tau) < \frac{\pi}{2}$. Зададим малое $\varepsilon > 0$ и потребуем, чтобы $\theta(0,0) - 2(1 + |\alpha|)\rho > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ и $\theta(0,0) + 2(1 + |\alpha|)\rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, отсюда будем иметь

$$\rho < \frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon - |\theta(0,0)|}{2(1 + |\alpha|)} = R_1\,. \qquad (5)$$

Оценим функции φ_ξ и φ_τ. Для этого проинтегрируем уравнение (3), например по ξ:

$$\varphi_\tau(\xi,\tau) - \varphi_\tau(0,\tau) = \int_0^\xi (\alpha^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi\, d\xi.$$

Следовательно,

$$|\varphi_\tau(\xi,\tau) - \varphi_\tau(0,\tau)| \le |\alpha^2 - 1|\rho$$

или

$$\varphi_\tau(0,\tau) - |\alpha^2 - 1|\rho \le \varphi_\tau(\xi,\tau) \le \varphi_\tau(0,\tau) + |\alpha^2 - 1|\rho. \qquad (6)$$

Аналогично

$$\varphi_\xi(\xi,0) - |\alpha^2 - 1|\rho \le \varphi_\xi(\xi,\tau) \le \varphi_\xi(\xi,0) + |\alpha^2 - 1|\rho.$$

Буквой ρ обозначаем полярный радиус на плоскости параметров (ξ, τ). Будем рассматривать функции $\varphi_\xi(\xi, 0)$ и $\varphi_\tau(0, \tau)$ в круге $\rho \le R_1$, тогда будут справедливы неравенства

$$-a_1 - |\alpha^2 - 1|R_1 < \varphi_\tau(\xi,\tau) < a_1 + |\alpha^2 - 1|R_1\,,$$
$$-a_1 - |\alpha^2 - 1|R_1 < \varphi_\xi(\xi,\tau) < a_1 + |\alpha^2 - 1|R_1\,,$$

где $a_1 = \max \{ | \varphi_\tau (0, \tau) |, | \varphi_\xi (\xi, 0) | \}$.

Оценим функцию $\omega (\xi, \tau)$. Из уравнений (1′) получим

$$\omega (\xi, \tau) - \omega (0, 0) = \int \omega_\xi \, d\xi + \omega_\tau \, d\tau = \int - \varphi_\xi \, d\xi + \varphi_\tau \, d\tau +$$

$$+ \int \frac{\alpha \sin \theta + 1}{\cos \theta} \sin (\omega - \varphi) \, d\xi - \frac{\alpha \sin \theta + 1}{\cos \theta} \sin (\omega + \varphi) \, d\tau.$$

Здесь интегрирование ведется вдоль полярного радиуса ρ. Следовательно,

$$| \omega (\xi, \tau) - \omega (0, 0) | \le 2(a_1 + | \alpha^2 - 1 | R_1) \rho + 2 \left(\frac{1 + | \alpha |}{\sin \varepsilon} \right) \rho =$$

$$= 2 \left(a_1 + | \alpha^2 - 1 | R_1 + \frac{1 + | \alpha |}{\sin \varepsilon} \right) \rho,$$

то есть,

$$\omega (0, 0) - 2 \left(a_1 + | \alpha^2 - 1 | R_1 + \frac{1 + | \alpha |}{\sin \varepsilon} \right) \rho < \omega (\xi, \tau) <$$

$$< \omega (0, 0) + 2 \left(a_1 + | \alpha^2 - 1 | R_1 + \frac{1 + | \alpha |}{\sin \varepsilon} \right) \rho.$$

Обозначим $\omega (0, 0)$ через ω_0, а $2 \left(a_1 + | \alpha^2 - 1 | R_1 + \frac{1 + | \alpha |}{\sin \varepsilon} \right)$ через c. Для того, чтобы метрика ds^2 была регулярной, потребуем выполнение неравенств

$$\omega_0 - c\rho > \varepsilon \text{ и } \omega_0 + c\rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ и $c > 0$, то $\omega_0 - c\rho > \varepsilon$ лишь тогда, когда $\omega_0 > 0$. При таком выборе ω_0 неравенства (7) будут справедливы при условии, что $\rho < c_1$, где

$$c_1 = \min \left\{ \frac{\omega_0 - \varepsilon}{c}, \frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \omega_0}{c} \right\}.$$

Неравенство (8) будет иметь смысл лишь тогда, когда $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$.

Пусть $R_2 = \min \{ R_1, c_1 \}$, тогда в круге $\rho \le R_2 - \varepsilon$ метрика ds^2 будет регулярной при условии $| \alpha | \ne 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\sin \theta + \alpha \equiv 0$. Уравнения (2′) выполняются тождественно, а (1′) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= - \varphi_\xi + \sqrt{1 - \alpha^2} \sin (\omega - \varphi), \\ \omega_\tau &= \varphi_\tau - \sqrt{1 - \alpha^2} \sin (\omega + \varphi), \end{aligned} \qquad (1''')$$

Нетрудно убедиться, что $\omega_{\xi\tau} = (\alpha^2 - 1) \sin \omega \cos \omega$, т.е. функции $\varphi (\xi, \tau)$ и $\omega (\xi, \tau)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, поэтому в (1‴) их можно поменять местами. Зададим начальные условия $\omega(\xi, 0)$, $\omega(0, \tau)$, $\varphi(0, 0)$ и оценим радиус круга, в котором (1''') будет иметь решение относительно функции $\varphi(\xi, \tau)$. Оценим производные $\omega_\xi(\xi, \tau)$ и $\omega_\tau(\xi, \tau)$:

$$\omega_\xi(\xi, \tau) - \omega_\xi(\xi, 0) = (\alpha^2 - 1) \int_0^\tau \sin\omega \cos\omega \, d\tau,$$

$$\omega_\tau(\xi, \tau) - \omega_\tau(0, \tau) = (\alpha^2 - 1) \int_0^\xi \sin\omega \cos\omega \, d\xi.$$

Следовательно,

$$| \omega_\xi(\xi, \tau) - \omega_\xi(\xi, 0) | \le | \alpha^2 - 1 | \tau \le | \alpha^2 - 1 | \rho$$

или

$$\omega_\xi(\xi, 0) - | \alpha^2 - 1 | \rho \le \omega_\xi(\xi, \tau) \le \omega_\xi(\xi, 0) + | \alpha^2 - 1 | \rho.$$

Аналогично

$$\omega_\tau(0, \tau) - | \alpha^2 - 1 | \rho \le \omega_\tau(\xi, \tau) \le \omega_\tau(0, \tau) + | \alpha^2 - 1 | \rho.$$

Буквой ρ здесь обозначен полярный радиус на плоскости параметров. Пусть $a_2 = \max \{ | \omega_\xi(\xi, 0) |, | \omega_\tau(0, \tau) | \}$, тогда

$$- a_2 - | \alpha^2 - 1 | \rho < \omega_\xi(\xi, \tau) < a_2 + | \alpha^2 - 1 | \rho, \tag{9}$$

$$- a_2 - | \alpha^2 - 1 | \rho < \omega_\tau(\xi, \tau) < a_2 + | \alpha^2 - 1 | \rho. \tag{10}$$

С учетом (9) и (10) получим такую оценку для модуля $| \varphi(\xi, \tau) - \varphi(0, 0) |$:

$$| \varphi(\xi, \tau) - \varphi(0, 0) | \le 2 \int_0^\rho (a_2 + | \alpha^2 - 1 | \rho) \, d\rho \le 2 | \alpha^2 - 1 | \rho^2 + 2a_2\rho.$$

Полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(0, 0) - 2a_2\rho - 2 | \alpha^2 - 1 | \rho^2 \le \varphi(\xi, \tau) \le$$

$$\le \varphi(0, 0) + 2a_2\rho + 2 | \alpha^2 - 1 | \rho^2.$$

Наложим для определенности на полярный радиус ρ такие ограничения:

$$\varphi_0 - 2a_2\rho - 2| \alpha^2 - 1 | \rho^2 > \varepsilon,$$

$$\varphi_0 + 2a_2\rho + 2| \alpha^2 - 1 | \rho^2 < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

или, что то же самое

$$2(1 - \alpha^2)\rho^2 + 2a_2\rho + \varepsilon - \varphi_0 < 0, \tag{*}$$

$$2(1 - \alpha^2)\rho^2 + 2a_2\rho + \varphi_0 + \varepsilon - \frac{\pi}{2} < 0. \tag{**}$$

Пусть D_1 — дискриминант уравнения, соответствующего (*), D_2 — дискриминант уравнения, соответствующего (**). Число $\varphi_0 = \varphi(0, 0)$ выбираем так, чтобы $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. В этом случае, при достаточно малом ε, D_1 будет положительным. Можно проверить, что разность $\frac{D_2}{4} - \frac{D_1}{4}$ равна $\pi(1 - \alpha^2) - 4\varphi_0(1 - \alpha^2)$; при $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{4}$ эта разность будет неотрицательной, а значит, $D_2 \geq D_1$. Это означает, что решение неравенства (*) является решением (**). Следовательно, если $\rho = R_3$ удовлетворяет (*), то в круге $\rho \leq R_3 - \varepsilon$ функция $\varphi(\xi, \tau)$ будет подчиняться неравенству

$$\varepsilon < \varphi(\xi, \tau) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

2. Существование и гладкость решений систем (1′)–(2′) и (1‴)

Вернемся к системе (1′)–(2′). Как уже упоминалось, эта система вполне интегрируема. Следовательно, если ввести на плоскости параметров (ξ, τ) полярные координаты (ρ, γ), то ее можно интегрировать вдоль полярного радиуса ρ. Используя связь декартовых и полярных координат, получим, что

$$\frac{d\omega}{d\rho} = -\varphi_\xi \cos\gamma + \varphi_\tau \sin\gamma + \frac{\alpha \sin\theta + 1}{\cos\theta}(\sin(\omega - \varphi)\cos\gamma - \sin(\omega + \varphi)\sin\gamma), \tag{1''}$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} = (\sin\theta + \alpha)(\cos(\omega - \varphi)\cos\gamma - \cos(\omega + \varphi)\sin\gamma). \tag{2''}$$

В системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1″)–(2″) правые части определены и непрерывны в области G:

$$\begin{cases} -1 < \rho < R_2, \\ 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, по теореме Пеано в замкнутой области $\widetilde{G}$

$$\begin{cases} -\varepsilon \leq \rho \leq R_2 - \varepsilon, \\ \varepsilon \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \\ -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \end{cases}$$

существует непрерывное решение (ω, θ) при начальных данных $(\rho_0, \omega_0, \theta_0)$, лежащих внутри области $\widetilde{G}$, причем это решение может быть продолжено в обе стороны вплоть до границы $\partial\widetilde{G}$ [8]. Тем самым мы показали, что в круге $0 \leq \rho \leq R_2 - \varepsilon$ существуют функции $\theta(\xi, \tau)$ и $\omega(\xi, \tau)$, удовлетворяющие системе (1′)-(2′). Из формул (1″)-(2″) получаются такие выражения для $\theta(\xi, \tau)$ и $\omega(\xi, \tau)$:

$$\theta(\xi,\tau) = \theta(0,0) + \int\limits_0^\rho (\sin\theta + \alpha)(\cos(\omega-\varphi)\cos\gamma - \cos(\omega+\varphi)\sin\gamma)\, d\rho,$$

$$\omega(\xi,\tau) = \omega_0 + \int\limits_0^\rho (-\varphi_\xi \cos\gamma + \varphi_\tau \sin\gamma)\, d\rho +$$

$$+ \int\limits_0^\rho \frac{\alpha\sin\theta + 1}{\cos\theta} (\sin(\omega-\varphi)\cos\gamma - \sin(\omega+\varphi)\sin\gamma)\, d\rho.$$

Нетрудно заметить, что наши функции $\theta(\xi,\tau)$ и $\omega(\xi,\tau)$ обладают классом гладкости на единицу меньшим, чем функция $\varphi(\xi,\tau)$. Тем самым мы доказали такую лемму:

Лемма 1. *В круге $0 \le \rho \le R_2 - \varepsilon$ система уравнений* (1′)-(2′) *имеет непрерывное решение (ω, θ), заключенное в пределах $\varepsilon \le \omega \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \le \theta \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и имеющее класс гладкости на единицу меньший, чем функция $\varphi(\xi,\tau)$.*

Используя рассуждения, подобные приведенным, докажем теорему 2: Если $\sin\theta + \alpha \equiv 0$, то:

а) Функция $\omega(x,y)$ удовлетворяет уравнению "синус-Гордона"

$$\omega_{xx} - \omega_{yy} = (\alpha^2 - 1)\sin\omega\cos\omega. \tag{4}$$

б) Для любой функции $\omega(x,y)$, являющейся решением уравнения (4) в круге $0 \le \rho \le R_3 - \varepsilon$, существует единственная функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая (3), такая, что будет выполняться система уравнений (1)-(2).

Доказательство. Так как $\sin\theta + \alpha \equiv 0$, то система (1)−(2) эквивалентна системе уравнений (1‴). Аналогично тому, как делалось при доказательстве леммы 1, можно показать, что (1‴) сводится к уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\omega_\xi \cos\gamma + \omega_\tau \sin\gamma + \sqrt{1-\alpha^2}\,(\sin(\omega-\varphi)\cos\gamma - \sin(\omega+\varphi)\sin\gamma).$$

Здесь ρ — полярный радиус, а γ — полярный угол на плоскости (ξ,τ). В силу того, что правая часть полученного дифференциального уравнения непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по φ, то в круге $\rho \le R_3 - \varepsilon$ существует единственная функция $\varphi(\xi,\tau)$, удовлетворяющая системе (1‴). Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Теорема 1. *Для любой функции $\varphi(x,y)$, удовлетворяющей уравнению* (3), *существует решение системы* (1)-(2), *а значит, изометрическое погружение некоторой области плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с плоской нормальной связностью.*

При этом, если $\sin\theta + \alpha \not\equiv 0$, *то погружаются куски полос постоянной ширины, заключенных между двумя орициклами. Размеры указанных кусков зависят от начальных условий* $\varphi(\xi, 0)$, $\varphi(0, \tau)$, $\theta(0, 0)$, $\omega(0, 0)$, *где* $\xi = \dfrac{x+y}{2}$, $\tau = \dfrac{x-y}{2}$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что в круге $\rho \le R_2 - \varepsilon$ существует решение (ω, θ) системы (1)-(2) такое, что $\varepsilon < \omega < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Рассмотрим векторное поле $\vec{v} = (\theta_x, \theta_y)$. В силу уравнений (2) направляющим ортом для этого поля в метрике ds^2 будет векторное поле

$$\vec{v}_0 = \left(\frac{\theta_x \cos\theta}{\sin\theta + \alpha}, \frac{\theta_y \cos\theta}{\sin\theta + \alpha}\right).$$

Нетрудно убедиться, что $\operatorname{rot}\vec{v}_0 = 0$, т.е. $\vec{v}_0 = \operatorname{grad} F(\theta)$. В [9] такие векторные поля как $\vec{v}_0$ называют геодезическими, а функцию $F(\theta)$ — геодезическим потенциалом. Как геодезический потенциал функция $F(\theta)$ обладает двумя важными свойствами:

I) Линии уровня $F(\theta) = \mathrm{const}$ есть ортогональные траектории к некоторому семейству геодезических.

II) Ширина полосы на плоскости Лобачевского, заключенной между линиями $\theta_1 = \mathrm{const}$ и $\theta_2 = \mathrm{const}$ равна $F(\theta_2) - F(\theta_1)$ [9].

У нас $F(\theta) = \ln\left|\dfrac{1}{\sin\theta + \alpha}\right|$. Таким образом, линии уровня $\ln\left|\dfrac{1}{\sin\theta + \alpha}\right| = \mathrm{const}$ и , следовательно, $\theta = \mathrm{const}$ являются ортогональными траекториями к некоторому семейству геодезических. Подсчитав геодезические кривизны кривых $\theta = \mathrm{const}$, увидим, что эти кривые являются орициклами [10]. Следовательно, любые два орицикла $\theta_1 = \mathrm{const}$ и $\theta_2 = \mathrm{const}$, согласно условию 1), пересекаются в бесконечно удаленной точке, т.е. ограничивают некоторую полосу σ. В силу условия II), ширина полосы σ равна $\left|\ln\left|\dfrac{\sin\theta_1 + \alpha}{\sin\theta_2 + \alpha}\right|\right|$.

Но у нас погружается не вся полоса, а только ее часть. Оценим размеры погружаемой области на плоскости Лобачевского. В координатах (x, y) метрика $ds^2 = \cos^2\theta\,(\sin^2\omega\, dx^2 + \cos^2\omega\, dy^2)$. Т.к. $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и $\varepsilon < \omega < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, то

$$ds^2 \ge \sin^4\varepsilon\,(dx^2 + dy^2) \ge 2\sin^4\varepsilon\,(d\xi^2 + d\tau^2).$$

Следовательно, длина дуги любой кривой l на плоскости L^2 оценивается числом $s \ge \sqrt{2}\sin^2\varepsilon \displaystyle\int_l \sqrt{d\xi^2 + d\tau^2}$. Функции $\omega(\xi, \tau)$ и $\theta(\xi, \tau)$ заданы в круге $\rho \le R_2 - \varepsilon = R$, где ρ — полярный радиус. Пусть $\theta_1 = \theta(0, 0)$, т.е. образ орицикла θ_1 проходит через центр нашего круга. Пусть $\theta_2 = \mathrm{const}$ — та линия, чей образ на плоскости параметров (ξ, τ) проходит через точку M, отстоящую от центра круга на расстоянии $R/2$. Так как линии $\theta(\xi, \tau) = \mathrm{const}$ являются гладкими кривыми, и, в силу леммы 1, пересекают окружность $\rho = R$, то длины образов кривых $\theta(\xi, \tau) = c$ при $\theta_1 \leq c \leq \theta_2$ не превышают радиуса R.

Таким образом, мы показали, что можно изометрически погрузить "прямоугольник", две стороны которого — дуги орициклов $\theta(\xi, \tau) = \theta_1$ и $\theta(\xi, \tau) = \theta_2$, а длина этих дуг равна $\sqrt{2}\,\sin^2\varepsilon \cdot R$. Две другие стороны — дуги геодезических, имеющие длину, равную $\left| \ln \left| \dfrac{\sin\theta_1 + \alpha}{\sin\theta_2 + \alpha} \right| \right|$.

Автор выражает благодарность Ю. А. Аминову за помощь, оказанную им при работе над данной статьей.

Список литературы

1. *Э.Р. Розендорн*, Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f(u)dv^2$ в пятимерном пространстве.— Докл. АрмССР (1960), т. 30, № 4, с. 197–199.
2. *Ю.А. Аминов*, О погружениях n-мерного пространства Лобачевского в $2n$-мерное евклидово пространство с полями главных направлений.— Укр. геометр. сб. (1985), № 28, с. 3–8.
3. *Ю.А. Аминов*, Изометрические погружения n-мерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства с плоской нормальной связностью: Модель калибровочного поля.-- Мат. сб. (1988), т. 137, № 3, с. 275–298.
4. *Ю.А. Аминов*, О функциональных вырожденных погружениях плоскости Лобачевского L^2 в E^4.— Укр. геометр. сб. (1990), № 33, с. 8–18.
5. *Н.В. Грибков*, Построение некоторых регулярных решений уравнения "синус-Гордона" с помощью поверхностей постоянной отрицательной кривизны.— Вестн. МГУ. Сер. мат. и механика (1972), № 3, с. 78–83.
6. *Э.Г. Позняк*, Геометрические исследования, связанные с уравнением "синус-Гордона". Тез. докл. на семинаре по геометрии в целом, посвященном 75-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.— Вестн. МГУ. Сер. мат. и механика (1986), № 5, с. 92.
7. *О.В. Кузнецов*, Изометрические погружения некоторых областей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением.— В кн.: Лобачевский и современная геометрия.— Междунар. науч. конф., Казань, 18-22 авг. 1992 г.: Тез. докл. , ч. 1, с. 47.
8. *Э. Камке*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, Москва (1976), с. 20–21.
9. *А.П. Норден*, Теория поверхностей. ГИТТЛ, Москва (1956), с. 145–146.
10. *В. Бляшке*, Дифференциальная геометрия. ОНТИ, Москва–Ленинград (1938), 330 с.

On construction of isometric immersions of the domains of Lobachevsky plane L^2 into E^4 by using solutions of the "sine-Gordon" equation

O.V. Kuznetsov

Isometric immersions of the Lobachevsky plane L^2 into E^4, are considered. These immersions are surfaces in E^4, which have a vanishing Gaussian torsion. The immersions are constructed by using different solutions of the "sine-Gordon" equation. It is proved that the domains of L^2, which are immersed, are parts of the domains bounded by two horocycles or two equidistants. The sizes of the domains under consideration are estimated.

Про побудову ізометричних занурень областей площини Лобачевського L^2 в E^4 за допомогою розв'язків рівняння "синус-Гордона"

О.В. Кузнецов

Розглядаються ізометричні занурення областей площини Лобачевського L^2 в E^4 у вигляді поверхонь в E^4, які мають нульовий гауссовий скрут. Дані занурення будуються за допомогою розв'язків рівняння "синус-Гордона". Доводиться, що області площини Лобачевського, які занурюються в L^2, є частини смуг, обмежених двома орициклами, або двома еквідистантами геодезичній лінії, а також вказуються розміри розглянутих областей.