Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 102–117

# О полных выпуклых решениях уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$

В.Н. Кокарев

*Самарский государственный университет, Россия, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1*

Статья поступила в редакцию 25 января 1995 года

Через $\mathrm{spur}_m(z_{ij})$ обозначим сумму всех главных миноров $m$-го порядка матрицы $(z_{ij})$, составленной из вторых производных функции $z(x^1, \dots, x^n)$. Всякое полное выпуклое класса $C^{2,\alpha}$ решение уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$, $(2 \le m < n)$, является квадратичным полиномом, если собственные значения матрицы $(z_{ij})$ достаточно близки друг к другу.

В работах [1-3] доказано, что графиком всякого полного выпуклого решения уравнения $\det(z_{ij}) = 1$, где $\det(z_{ij})$ — гессиан функции $z(x^1, \dots, x^n)$, является эллиптический параболоид. Естественно возникает вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях уравнения

$$\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

где в левой части стоит сумма всех главных миноров $m$-го порядка матрицы из вторых производных функции $z(x^1, \dots, x^n)$? Настоящая статья посвящена исследованию этой проблемы. Достигнутый результат сформулирован в теореме 3 и следствии из нее. Предварительно будут доказаны две вспомогательные теоремы.

Пусть $z^0 = \frac{1}{2} c_{ij} x^i x^j$ — функция, график которой — эллиптический параболоид. Будем обозначать дифференцирование функций $z$ и $z^0$ соответствующим индексом внизу:

$$z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}, \quad z_{ijk} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \quad \text{и т.д.}$$

Вместо уравнения (1) будем рассматривать на первый взгляд несколько более общее уравнение

$$D(\underbrace{z_{ij}, \dots, z_{ij}}_{m}, z^0_{ij}, \dots, z^0_{ij}) = \det(z^0_{ij}), \tag{2}$$

по-прежнему считая решение $z(x^1, \dots, x^n)$ строго выпуклой регулярной функцией. Здесь $D$ — символ смешанного дискриминанта матриц $(z_{ij})$ и $(z^0_{ij})$. Всюду считаем, что $2 \le m < n$. Уравнение (2) инвариантно при аффинных преобразованиях координат и при подходящем выборе их системы превращается в уравнение (1). Таким образом, уравнение (2) является уравнением (1), записанным в другой, более общей системе координат. Чтобы подчеркнуть, что система координат не фиксирована, обозначим пространство, где заданы функции $z$ и $z^0$, через $A^n$ и будем считать его $n$-мерным аффинным пространством.

Всюду в дальнейшем будем допускать только аффинные преобразования координат, поэтому частные производные любой функции в $A^n$ являются координатами ковариантного тензора соответствующего ранга.

Обозначим левую часть в (2) через $D$. Легко проверяется, что формальные производные $\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{D}{\det(z^0_{ij})}\right)$ являются координатами тензора типа $\binom{2}{0}$. Введем метрику в $A^n$, взяв $g^{ij} = C_n^m \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{D}{\det(z^0_{ij})}\right)$ за координаты контравариантного метрического тензора. В силу выпуклости функций $z$ и $z^0$ эта метрика положительно определенная. Будем опускать и поднимать индексы у тензоров с помощью введенной метрики, в частности

$$z^i_{jk} = g^{ia} z_{ajk}\,,\quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}\,.$$

Рассмотрим тензоры

$$P_{ijkl} = z^a_{il} z_{ajk} - z^a_{ik} z_{ajl}\,,\quad P_{ik} = z^j_{hi} z^h_{jk}$$

и инвариант $P = z_{ijk} z^{ijk}$. Очевидно, $P \ge 0$. Причем, если $P(x) = 0$, то все третьи производные $z_{ijk}(x)$ обращаются в нуль.

Пусть $\Delta$ — оператор Лапласа–Бельтрами относительно введенной метрики, ковариантные производные будем обозначать с помощью запятой. Через $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ обозначим экстремумы формы $z_{ij}\xi^i\xi^j$ относительно формы $z^0_{ij}\xi^i\xi^j$ в точке $x$. Пусть существует положительная константа $\varepsilon_1$ такая, что

$$\frac{\lambda_i(x)}{\lambda_j(x)} \le 1 + \varepsilon_1 \tag{3}$$

для всех точек $x \in A^n$ и всех $i, j$. Сначала получим некоторую инвариантную оценку для $\Delta(\sqrt{P})$ в произвольной точке $x_0 \in A^n$, где $P(x_0) \ne 0$. При этом будем считать, что $\varepsilon_1$ достаточно мало $\left(\varepsilon_1 < \frac{1}{mn^2}\right)$.

Имеем (см. [2])

$$\Delta(\sqrt{P}) = \frac{\Delta P}{2\sqrt{P}} - \frac{g^{ij} P_{,i} P_{,j}}{4P^{3/2}}\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\Delta P = z^{ijk}\Delta z_{ijk} + z^{ijk,l} z_{ijk,l}\,. \tag{5}$$

Обозначив $B_{abcijkl} = \frac{1}{2}(z_{abc,i}\, z_{jkl} - z_{abc}\, z_{jkl,i})$, получим

$$\frac{2B_{abcijkl}B^{abcijkl}}{P^{3/2}} = \frac{z_{abc,\,i}\,z^{abc,\,i}}{\sqrt{P}} - \frac{g^{ij}P,_i P,_j}{4P^{3/2}} \geq 0.$$

Из соотношений (4), (5) и последнего неравенства следует

$$\Delta(\sqrt{P}) \geq \frac{z^{ijk}\,\Delta z_{ijk}}{\sqrt{P}}. \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение

$$\frac{1}{\det(z^0_{ij})}\,D(\underbrace{z_{ij}, \dots, z_{ij}}_{m}, z^0_{ij}, \dots, z^0_{ij}) = 1$$

по $x^k$, получим

$$z_{ijk}\,g^{ij} = 0, \tag{7}$$

следовательно, $g^{lq}z_{iql,\,jk} = 0$. Тогда

$$\Delta z_{ijk} = g^{lq}z_{ijk,\,lq} = g^{lq}(z_{ijl,\,kq} - z_{ijl,\,qk}) +$$

$$+ g^{lq}(z_{ijl,\,q} - z_{iql,\,j}),_k + g^{lq}(z_{ijk,\,l} - z_{ijl,\,k}),_q =$$

$$= g^{lq}(z_{hjl}R^h_{ikq} + z_{ihl}R^h_{jkq} + z_{ijh}R^h_{lkq}) + g^{lq}(z_{ijl,\,q} - z_{iql,\,j}),_k + g^{lq}(z_{ijk,\,l} - z_{ijl,\,k}),_q\,.$$

Здесь $R^h_{ikq}$ — координаты тензора кривизны относительно введенной метрики. Вычисляя, имеем

$$z^{ijk}\Delta z_{ijk} = z^{ijk}g^{lq}(-5z_{ijh}\Gamma_{qp}{}^h\Gamma^p_{kl} + 6z_{ihl}\Gamma_{kp}{}^h\Gamma^p_{qj} - z_{ijh}\Gamma_{kp}{}^h\Gamma^p_{ql} -$$

$$- 2z_{hjl}\Gamma^h_{qp}\Gamma^p_{ki} + 4z_{hqp}\Gamma^h_{ij}\Gamma^p_{lk} - 4z_{phk}\Gamma^h_{jl}\Gamma^p_{iq} - 2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} - z_{ijhk}\Gamma^h_{lq} +$$

$$+ 3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - 3z^p_{jk}(\tfrac{1}{2}\partial_{lq}g_{ip} - \Gamma^a_{il}\partial_q g_{ap}) + 2z^p_{jl}(\tfrac{1}{2}\partial_{ik}g_{qp} - \Gamma^a_{qi}\partial_k g_{ap}))\,. \tag{8}$$

Здесь $\Gamma^k_{ij}$ — коэффициенты связности относительно введенной метрики.

Возьмем такую аффинную систему координат в $A^n$, чтобы в точке $x_0$ матрица $(z_{ij})$ имела диагональный вид, а матрица $(z^0_{ij}) = (c_{ij})$ стала единичной. Тогда в этой точке получим

$$g^{ij} = g_{ij} = 0 \;\; (i \neq j), \;\; g^{ii} = S^i_{m-1}, \tag{9}$$

где $S^i_{m-1}$ — $(m-1)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \dots, z_{nn}$, кроме $z_{ii}$. При нашем выборе системы координат равенство $g^{il}g_{ij} = \delta^l_j$ примет вид $C^m_n g_{ij}\dfrac{\partial D}{\partial z_{il}} = \delta^l_j$. Дифференцируя правые и левые части этого равенства по $x^k$, находим выражение для производных от координат ковариантного метрического тензора

$$\partial_k g_{ij} = -C^m_n g_{sj}g_{li}\frac{\partial^2 D}{\partial z_{sl}\,\partial z_{pq}}\,z_{pqk}\,. \tag{10}$$

Здесь, как и всюду далее, суммирование в правой части ведется только по тем повторяющимся индексам, которых нет в левой части, т.е. по $s$, $l$, $p$, $q$. С учетом (9) получим в точке $x_0$

$$\partial_k g_{ij} = \begin{cases} \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^{i}_{m-1}\,S^{j}_{m-1}}\, z_{ijk}, & (i \neq j); \\ -\dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^{j}_{m-1})^2}\, z_{ppk}, & (i = j), \end{cases} \tag{11}$$

где $S^{jp}_{m-2}$ — $(m-2)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \dots, z_{nn}$, кроме $z_{jj}$, $z_{pp}$. Полагаем по определению $S^{jp}_{m-2} = 0$ при $j = p$, а при $m = 2$ $S^{jp}_{m-2} = 1$, если $j \neq p$.

Дифференцируя (10) по $x^r$ и учитывая (9), получаем в точке $x_0$ для вторых производных от ковариантных координат метрического тензора выражение

$$\begin{aligned} \partial_{kr} g_{ij} = {} & (\partial_r g_{lj})\, \frac{S^{li}_{m-2}}{S^{i}_{m-1}\,S^{l}_{m-1}}\, z^{l}_{ik} + (\partial_r g_{li})\, \frac{S^{lj}_{m-2}}{S^{j}_{m-1}\,S^{l}_{m-1}}\, z^{l}_{jk} - \\ & - (\partial_r g_{ij})\, \frac{S^{li}_{m-2}}{S^{i}_{m-1}\,S^{l}_{m-1}}\, z^{l}_{lk} + (\partial_r g_{ij})\, \frac{S^{lj}_{m-2}}{S^{j}_{m-1}\,S^{l}_{m-1}}\, z^{l}_{lk} + \\ & + \begin{cases} \dfrac{S^{ijl}_{m-3}\,(z_{ijk} z^{l}_{lr} + z_{ijr} z^{l}_{lk} - z^{l}_{ik} z_{ljr} - z^{l}_{jk} z_{ilr})}{S^{i}_{m-1}\,S^{j}_{m-1}\,S^{l}_{m-1}} + \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^{i}_{m-1}\,S^{j}_{m-1}}\, z_{ijkr}, & (i \neq j); \\ \dfrac{S^{jpq}_{m-3}\,(z^{pq}_{k} z_{pqr} - z^{p}_{pk} z^{q}_{qr})}{(S^{j}_{m-1})^2\, S^{p}_{m-1}\, S^{q}_{m-1}} - \dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^{j}_{m-1})^2}\, z_{ppkr}, & (i = j); \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $S^{ijk}_{m-3}$ — $(m-3)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \dots, z_{nn}$, кроме $z_{ii}$, $z_{jj}$, $z_{kk}$. Полагаем $S^{ijk}_{m-3} = 0$, если среди индексов $i$, $j$, $k$ есть равные или $m = 2$, а при $m = 3$ $S^{ijk}_{m-3} = 1$, если $i$, $j$, $k$ различны. Обозначим $\dfrac{C^{m-2}_{n-2}}{(C^{m-1}_{n-1})^2} = c.$

Из условия (3) с учетом выбора системы координат получим для всех $i$, $j$ в точке $x_0$

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} \le \frac{z_{ii}}{z_{jj}} \le 1 + \varepsilon_1,$$

отсюда и из (2)

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} \le z_{ii} \le 1+\varepsilon_1 ,$$

тогда

$$\left| \frac{S^{ij}_{m-2}}{S^{i}_{m-1} S^{j}_{m-1}} - c \right| \le c((1+\varepsilon_1)^m - 1), \ (i \ne j); \tag{13}$$

$$\left| c\frac{S^{p}_{m-1}}{S^{j}_{m-1}} - \frac{S^{jp}_{m-2}}{(S^{j}_{m-1})^2} \right| \le c((1+\varepsilon_1)^m - 1), \ (p \ne j). \tag{14}$$

При $i \ne j \ne k$, $m \ge 3$

$$\left| \frac{S^{ijk}_{m-3}}{S^{i}_{m-1} S^{j}_{m-1} S^{k}_{m-1}} - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3} \right| \le (1+\varepsilon_1)^{2m} - 1. \tag{15}$$

Для всех $i, j, k$

$$| z_{ijk} | \le P^{1/2} (1+\varepsilon_1)^{3(m-1)/2} (C^{m-1}_{n-1})^{-3/2}.$$

Равенство (7) в точке $x_0$ принимает вид

$$z_{ppk} S^{p}_{m-1} = 0.$$

Тогда (по-прежнему здесь и далее все величины вычисляются в точке $x_0$)

$$\partial_k g_{ij} = \begin{cases} cz_{ijk} + \left( \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^{i}_{m-1} S^{j}_{m-1}} - c \right) z_{ijk}, & (i \ne j); \\ \left( c\dfrac{S^{p}_{m-1}}{S^{i}_{m-1}} - \dfrac{S^{ip}_{m-2}}{(S^{i}_{m-1})^2} \right) z_{ppk}, & (i = j). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\partial_k g_{ij} = cz_{ijk} + \varepsilon_{ijk}, \tag{16}$$

где

$$| \varepsilon_{ijk} | \le \begin{cases} \dfrac{c((1+\varepsilon_1)^m - 1)(1+\varepsilon_1)^{3(m-1)/2} P^{1/2}}{(C^{m-1}_{n-1})^{3/2}}, & (i \ne j); \\ \dfrac{(n-1)c((1+\varepsilon_1)^m - 1)(1+\varepsilon_1)^{3(m-1)/2} P^{1/2}}{(C^{m-1}_{n-1})^{3/2}}, & (i = j). \end{cases} \tag{17}$$

Продифференцируем (7) по $x^r$. Учитывая соотношение (9) и диагональность метрики в точке $x_0$, имеем

$$g^{ii} z_{iikr} = - S^{pq}_{m-2} z_{ppk} z_{qqr} + S^{pq}_{m-2} z_{pqk} z_{pqr},$$

отсюда

$$g^{ii} z_{iikr} = cz^{pq}_{k} z_{pqr} + \varepsilon_{kr}, \tag{18}$$

где

$$|\varepsilon_{kr}| \le 2c((1+\varepsilon_1)^m - 1)(1+\varepsilon_1)^{5(m-1)}(C^{m-1}_{n-1})^{-1}P.$$

С учетом (13) и (15) получаем из (12)

$$\partial_{kr} g_{ij} = \left(c^2 - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3}\right)(z_{ljr} z^l_{ik} + z_{lir} z^l_{jk}) + \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3} z^{pq}_k z_{pqr} g_{ij} + \varepsilon_{ijkr} +$$

$$+ \begin{cases} \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1} S^j_{m-1}} z_{ijkr}, & (i \ne j), \\ -\dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^j_{m-1})^2} z_{ppkr}, & (i = j), \end{cases} \tag{19}$$

где

$$|\varepsilon_{ijkr}| \le 8c^2(n-1)(1+\varepsilon_1)^{4(m-1)}((1+\varepsilon_1)^m - 1)(C^{m-1}_{n-1})^{-2}P +$$

$$+ 2C^{m-3}_{n-3}(n-1)^2(1+\varepsilon_1)^{5(m-1)}((1+\varepsilon_1)^{3m-1} - 1)(C^{m-1}_{n-1})^{-5}P.$$

При $m = 2$ здесь и далее нужно считать, что $C^{m-3}_{n-3} = 0$.

Слагаемые в правой части (8), содержащие четвертые производные функции $z$:

$$z^{ijk} g^{lq}\left(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} - z_{ijhk}\Gamma^h_{lq} + 3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^p_{jk}\partial_{lq} g_{ip} + z^p_{jl}\partial_{ik} g_{qp}\right) =$$

$$= z^{ijk} g^{qq} g^{ss}\left(-z_{sjqk}\partial_i g_{qs} - \frac{1}{2} z_{ijks}(2\partial_q g_{qs} - \partial_s g_{qq}) +\right.$$

$$\left.+ \frac{3}{2} z_{qqsk}(2\partial_i g_{js} - \partial_s g_{ij}) - \frac{3}{2} z_{sjk}\partial_{qq} g_{is} + z_{sjq}\partial_{ik} g_{qs}\right) =$$

$$= z^{ijk} g^{qq} g^{ss}\left(-z_{sjqk}\partial_i g_{qs} - \frac{1}{2} z_{ijks}(cz_{qqs} + 2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) +\right.$$

$$\left.+ \frac{3}{2} z_{qqsk}(cz_{ijs} + 2\varepsilon_{jsi} - \varepsilon_{ijs}) - \frac{3}{2} z_{sij}\partial_{qq} g_{ks} + z_{siq}\partial_{jk} g_{qs}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись сначала соотношениями (19), (11), (7), а затем (18) и учитывая малость $\varepsilon_1$, получим

$$z^{ijk} g^{lq}\left(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} - z_{ijhk}\Gamma^h_{lq} + 3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^p_{jk}\partial_{lq} g_{ip} + z^p_{jl}\partial_{ik} g_{qp}\right) \ge$$

$$\geq \frac{3}{2} P^2 \left(c^2 - \frac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3}\right) -$$

$$- \left(c^2 - \frac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3}\right)(3z^{ijk} z_{ij}^{s} z_{lsq} z_{k}^{lq} - 2z^{ijk} z_{i}^{sq} z_{lsk} z_{qj}^{l}) -$$

$$- \frac{1}{2} z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{ijks} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) -$$

$$- 5C_{n-3}^{m-3} (C_{n-1}^{m-1})^{-3} (n-1)^2 n^5 (1+\varepsilon_1)^{8m-3} ((1+\varepsilon_1)^{3m-1} - 1)P^2 -$$

$$- 20c^2 (n-1) n^5 (1+\varepsilon_1)^{7m-2} ((1+\varepsilon_1)^m - 1)P^2 -$$

$$- 9n^7 c^2 (1+\varepsilon_1)^{6m} ((1+\varepsilon_1)^m - 1)P^2. \tag{20}$$

Далее, так как $P,_s = 2z^{ijk} z_{ijk,s}$, то

$$\frac{1}{2} P,_s = z^{ijk} (z_{ijks} - z_{hjk} \Gamma_{is}^{h})$$

и

$$z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{ijks} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{qq} g^{ss} P,_s (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) + 3z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{hjk} \Gamma_{is}^{h} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}). \tag{21}$$

Используя неравенство Юнга с $\varepsilon$, получаем

$$\left| P,_s g^{ss} g^{qq} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) \right| \leq \frac{P_{,s}^2 g^{ss}}{2P\varepsilon^2} + \varepsilon^2 P \left(g^{qq} \sqrt{g^{ss}} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs})\right)^2.$$

В силу диагональности метрики $|\operatorname{grad} \sqrt{P}|^2 = \dfrac{g^{ss} P_{,s}^2}{4P}$. Далее из последнего неравенства и соотношений (17) и (21) следует оценка

$$\left| z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{ijks} (2\varepsilon_{qsq} - \varepsilon_{qqs}) \right| \leq \frac{|\operatorname{grad} \sqrt{P}|^2}{\varepsilon^2} +$$

$$+ \frac{9}{4} \varepsilon^2 n^4 (n-1)^2 c^2 (1+\varepsilon_1)^{6(m-1)} ((1+\varepsilon_1)^m - 1)^2 P^2 +$$

$$+ \frac{9}{2} (n-1) c^2 n^6 (1+\varepsilon_1)^{12(m-1)} ((1+\varepsilon_1)^m - 1)P^2. \tag{22}$$

Подставив вместо коэффициентов Кристоффеля их выражение через метрику и заменяя производные от координат метрического тензора по формулам (16) с использованием неравенств (17) и малости $\varepsilon_1$, получаем следующую оценку:

$$z^{ijk} g^{lq} ( - 5z_{ijh} \Gamma_{qp}{}^{h} \Gamma_{kl}^{p} + 6z_{ihl} \Gamma_{kp}{}^{h} \Gamma_{qj}^{p} - z_{ijh} \Gamma_{kp}{}^{h} \Gamma_{ql}^{p} - 2z_{hjl} \Gamma_{qp}^{h} \Gamma_{ki}^{p} +$$

$$+ 4z_{hqp} \Gamma_{ij}^{h} \Gamma_{lk}^{p} - 4z_{phk} \Gamma_{jl}^{h} \Gamma_{iq}^{p} + 3z_{jk}^{p} \Gamma_{il}^{a} \partial_q g_{ap} - 2z_{jl}^{p} \Gamma_{qi}^{a} \partial_k g_{ap}) \geq$$

$$\geq \frac{c^2}{4}\left(3z^{ijk} z^{s}_{ij} z_{lsq} z^{lq}_{k} - 2z^{ijk} z^{sq}_{i} z_{lsk} z^{l}_{qj}\right) -$$

$$- 48n^6 (n-1)\, c^2 (1+\varepsilon_1)^{12(m-1)} \left((1+\varepsilon_1)^m - 1\right) P^2. \tag{23}$$

Оценим теперь инвариант

$$I = 3z^{ijk} z^{s}_{ij} z_{lsq} z^{lq}_{k} - 2z^{ijk} z^{sq}_{i} z_{lsk} z^{l}_{qj}.$$

Оценка снизу получается так же, как в работе [2]. А именно, сначала замечаем, что

$$I = P_{ijkl} P^{ijkl} + P_{ik} P^{ik}.$$

Хотя тензоры $P_{ijkl}$ и $P_{ik}$ у нас не имеют непосредственного геометрического смысла, для них верны неравенства

$$P_{ijkl} P^{ijkl} \geq \frac{4}{n-2} P_{ik} P^{ik} - \frac{2}{(n-1)(n-2)} P^2, \quad P_{ik} P^{ik} \geq \frac{1}{n} P^2,$$

которые доказываются дословным повторением соответствующих рассуждений для $R_{ijkl}$ и $R_{ik}$ в [2]. Значит,

$$I \geq \frac{n+1}{n(n-1)} P^2.$$

Ввиду того, что коэффициент при инварианте $I$ в (20) отрицателен, нам потребуется еще его оценка сверху. Оценим сверху выражение

$$\frac{I}{P^2} = \frac{P_{ik} P^{ik} + P_{ijkl} P^{ijkl}}{(g^{ik} P_{ik})^2}.$$

При получении этой оценки безразлично конкретное происхождение тензора $z_{ijk}$. Оценка будет верна для любого ненулевого симметрического трехвалентного тензора $z_{ijk}$. Сначала оценим выражение $\dfrac{P_{ik} P^{ik}}{(g^{ik} P_{ik})^2}$. Тензор $P_{ik}$ симметричен. Тогда можно одновременно привести матрицу $(P_{ik})$ к диагональному виду, а матрицу метрической формы $(g_{ij})$ к единичной. Наше выражение в новых координатах примет вид $\dfrac{\widetilde{P}^2_{11} + \ldots + \widetilde{P}^2_{nn}}{(\widetilde{P}_{11} + \ldots + \widetilde{P}_{nn})^2}$. При этом, так как разницы между ковариантными и контравариантными индексами индексами теперь нет, то $\widetilde{P}_{ii} = \widetilde{z}^{j}_{hi} \widetilde{z}^{h}_{ji} = \sum\limits_{j,h} \widetilde{z}^{\,2}_{jhi} \geq 0$. Значит, надо найти максимум при неотрицательных $\widetilde{P}_{ii}$, а поскольку $\widetilde{P}_{11} + \ldots + \widetilde{P}_{nn} = P > 0$, то все $\widetilde{P}_{ii}$ не могут обращаться в нуль. При этих условиях легко находим

$$\frac{\widetilde{P}^2_{11} + \ldots + \widetilde{P}^2_{nn}}{(\widetilde{P}_{11} + \ldots + \widetilde{P}_{nn})^2} \leq 1.$$

Теперь найдем максимум выражения

$$\frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{P^2} = \frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{(g^{ik}g^{jl}P_{ijkl})^2}.$$

Объединим индексы $i, j$ и $k, l$ и будем рассматривать величины $P_{(ij)(kl)}$ как координаты тензора типа $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Имеет место симметрия $P_{(ij)(kl)} = P_{(kl)(ij)}$. Если координатные векторы преобразуются с помощью матрицы $(\alpha_i^{i'})$, то $P_{(ij)(kl)}$ преобразуются с помощью матрицы $\left(A_{(ij)}^{(ij)'}\right) = (\alpha_i^{i'}\alpha_j^{j'})$. Введем метрический тензор $G_{(ij)(kl)} = g_{ik}g_{jl}$. Этот тензор определяет положительно определенную метрику. Легко проверить, что его ковариантные координаты $G^{(ij)(kl)} = g^{ik}g^{jl}$. Тогда можно формально записать

$$\frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{(g^{ik}g^{jl}P_{ijkl})^2} = \frac{P_{(ij)(kl)}P^{(ij)(kl)}}{(G^{(ij)(kl)}P_{(ij)(kl)})^2},$$

или, приведя матрицу $\left(G_{(ij)(kl)}\right)$ к единичной, а матрицу $\left(P_{(ij)(kl)}\right)$ — к диагональной, придадим последнему выражению вид $\dfrac{\sum_{i,j}\widetilde{P}^2_{(ij)(ij)}}{\left(\sum_{i,j}\widetilde{P}_{(ij)(ij)}\right)^2}$. При этом $\widetilde{P}_{(ii)(ii)} = 0$, так как $P_{ijkl}$ антисимметричен по первому и второму индексам. Кроме того, $\sum_j \widetilde{P}_{(ij)(ij)} = \widetilde{P}_{ii} \geq 0$, $\sum_i \widetilde{P}_{ii} > 0$. Значит, нам нужно найти максимум выражения

$$\frac{\sum_{i,j}\widetilde{P}^2_{(ij)(ij)}}{\left(\sum_{i,j}\widetilde{P}_{(ij)(ij)}\right)^2} \quad \text{при условии} \quad \begin{cases} \sum_j \widetilde{P}_{(ij)(ij)} \geq 0, \\ \widetilde{P}_{(ii)(ii)} = 0, \\ \sum_{i,j}\widetilde{P}_{(ij)(ij)} > 0. \end{cases}$$

Этот максимум равен $\frac{1}{2}$, следовательно, $\dfrac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{P^2} \leq \frac{1}{2}$, поэтому $I \leq \frac{3}{2}P^2$.

Тогда, учитывая еще (24), получаем

$$\left(\frac{3}{2}P^2 - I\right)\left(c^2 - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3}\right) + \frac{c^2}{4}I \geq$$

$$\geq \begin{cases} \left( \left( \dfrac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3} - \dfrac{3}{4} c^2 \right)(n-2)(3n+1) + \dfrac{(n+1)c^2}{2} \right) \dfrac{P^2}{2n(n-1)} & \text{при } \dfrac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3} - \dfrac{3}{4} c^2 > 0, \\ \dfrac{3}{8} c^2 P^2 & \text{при } \dfrac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3} - \dfrac{3}{4} c^2 \leq 0. \end{cases} \tag{25}$$

С учетом того, что

$$\frac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3} = \frac{c^2(n-1)(m-2)}{(m-1)(n-2)},$$

обозначим

$$A(n, m) = \begin{cases} \dfrac{c^2}{2n(n-1)} \left( \dfrac{(mn - 5n + 2m + 2)(3n+1)}{4(m-1)} + \dfrac{n+1}{2} \right) & \text{при } mn - 5n + 2m + 2 > 0, \\ \dfrac{3c^2}{8} & \text{при } mn - 5n + 2m + 2 \leq 0; \end{cases} \tag{26}$$

$$C(n, m, \varepsilon_1, \varepsilon) = c^2 ((1+\varepsilon_1)^m - 1) \Big( 9n^7 (1+\varepsilon_1)^{6m} +$$
$$+ 20(n-1)n^5 (1+\varepsilon_1)^{7m-2} + \frac{9}{8} \varepsilon^2 n^4 (n-1)^2 (1+\varepsilon_1)^{6(m-1)} ((1+\varepsilon_1)^m - 1) +$$
$$+ \frac{201}{4} n^6 (n-1)(1+\varepsilon_1)^{12(m-1)} \Big) +$$
$$+ \frac{5c^2 (n-1)^3 (m-2) n^5 (1+\varepsilon_1)^{8m-3} ((1+\varepsilon_1)^{3m-1} - 1)}{(m-1)(n-2)}. \tag{27}$$

Тогда из (6) и (8) с помощью (20), (22), (23), (25)-(27) получаем оценку для $\Delta(\sqrt{P})$. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Если $z(x)$ выпуклое регулярное решение уравнения* (2), *удовлетворяющее условию* (3) *с* $\varepsilon_1 < \dfrac{1}{mn^2}$, *то для инварианта $P$ в области, где $P \neq 0$, выполняется неравенство*

$$\Delta(\sqrt{P}) \geq (A - C)P^{3/2} - \frac{|\operatorname{grad} \sqrt{P}|^2}{2\varepsilon^2 \sqrt{P}}. \tag{28}$$

Здесь $A$, $C$ определены формулами (26), (27), $\varepsilon > 0$ можно взять произвольным.

Теперь рассмотрим на положительной полуоси $t$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{B}{t} y' + \varepsilon_0 \frac{y'^2}{y} = c_0 y^3 \tag{29}$$

с начальными условиями

$$y(0) = a, \; y'(0) = 0, \tag{30'}$$

где $B > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $c_0 > 0$, $a > 0$ — некоторые константы. В этом случае имеет место

Теорема 2. *Пусть $y(t)$ — решение уравнения* (29) *с начальными условиями* (30′) *при $t \geq 0$. Тогда существует такое число $d > 0$, зависящее от $a$, $B$, $\varepsilon_0$, $c_0$, что $\lim\limits_{t \to d} y(t) = +\infty$. Кроме того, $y'(t) > 0$ при $t \in (0, d)$.*

Доказательство. Обозначим через $E = [0, b)$ максимальный полуинтервал, на который можно продолжить решение уравнения (29) с начальными условиями (30). Из (29) получается, что $y''(0) = \dfrac{c_0 a^3}{1 + B} > 0$. Поэтому $y(t)$ возрастает в достаточно малой полуокрестности нуля. Тогда всюду на интервале $(0, b)$ будем иметь $y'(t) > 0$. Действительно, если предположим, что это не так, и обозначим $t_0 = \min\limits_{t \in (0, b)} \{ t \mid y'(t) = 0 \}$, то в достаточно малой левой полуокрестности точки $t_0$ из (29) получим $y''(t) > 0$. Тогда невозможно равенство $y'(t_0) = 0$, значит $y'(t) > 0$ при всех $t \in (0, b)$.

Возможны два случая:

I. Решение $y(t)$ нельзя продолжить до точки $t = 1$. Тогда, так как функция $y(t)$ возрастающая, график ее имеет вертикальную асимптоту $t = \alpha$ $(\alpha \leq 1)$, и утверждение теоремы выполняется.

II. Решение $y(t)$ можно продолжить до точки $t = 1$. Тогда существует такая положительная, зависящая от $a$, $B$, $\varepsilon_0$, $c_0$ константа $M$, что при любом $t \in [1, b)$ выполняется хотя бы одно из соотношений

1) $y' \geq M(y - y_1)^2$,

2) $y'' > 4M^2 (y - y_1)^3$.

Здесь $y_1 = y(1)$.

Действительно, возьмем в качестве $M$ такое положительное число, что $(4 + \varepsilon_0)M^2 + \dfrac{B}{a} M - c_0 = 0$. Предположим, что в некоторой точке $t \in [1, b)$ имеем $y' < M(y - y_1)^2$, $y'' \leq 4M^2 (y - y_1)^3$. Так как в этой точке $\dfrac{B}{t} \leq B \leq \dfrac{By}{a}$, то

$$y'' + \frac{B}{t} y' + \varepsilon_0 \frac{y'^2}{y} < 4M^2 (y - y_1)^3 + \frac{BMy(y - y_1)^2}{a} +$$

$$+ \varepsilon_0 \frac{M^2 (y - y_1)^4}{y} \leq y^3 \left(4M^2 + \frac{BM}{a} + \varepsilon_0 M^2\right) = c_0 y^3.$$

Следовательно, на множестве $[1, b)$ не могут одновременно не выполняться соотношения 1) и 2).

Обозначим через $E'$ то подмножество множества $[1, b)$, на котором выполняется соотношение 1). Докажем, что на самом деле $E' = [1, b)$.

Множество $E'$ замкнуто в $[1, b)$. Так как $y'(1) > 0$, то множество $E'$ не пусто. Предположим, что $E' \neq [1, b)$. Тогда максимальное связное подмножество множества $E'$, содержащее точку $t = 1$, будет отрезком $[1, t_2]$, где $1 < t_2 < b$. В достаточно малом интервале $(t_2, t_2 + \gamma)$ не выполняется соотношение 1), значит выполняется соотношение 2). Обозначим $y' = p$. Так как функция $y(t)$ строго возрастающая, то существует обратная функция $t(y)$, следовательно, $p$ можно считать функцией от $y$. Тогда 2) примет вид $\frac{dp}{dy}p > 4M^2(y - y_1)^3$. Интегрируя это неравенство от $y_2 = y(t_2)$ до $y_3 = y(t_3)$, где $t_3 \in (t_2, t_2 + \gamma)$ и, следовательно, $y_3 > y_2$, получим

$$(p(y_3))^2 > 2M^2((y_3 - y_1)^4 - (y_2 - y_1)^4) + (p(y_2))^2.$$

Отсюда

$$(p(y_3))^2 > M^2((y_3 - y_1)^4 - (y_2 - y_1)^4) + (p(y_2))^2.$$

А так как в точке $t_2$ еще выполняется условие 1), то $(p(y_2))^2 - M^2(y_2 - y_1)^4 \geq 0$ и, следовательно, $(p(y_3))^2 > M^2(y_3 - y_1)^4$. Тогда $y'(t_3) > M(y_3 - y_1)^2$ для всех $t_3 \in (t_2, t_2 + \gamma)$. Это противоречит максимальности множества $[1, t_2]$. Полученное противоречие доказывает, что $E' = [1, b)$, т.е. всюду на множестве $[1, b)$ решение уравнения (29) с начальными условиями (30) удовлетворяет неравенству 1).

Если решение нельзя продолжить до точки $t = 2$, то график функции $y(t)$ имеет вертикальную асимптоту $t = d$ $(d \leq 2)$, и утверждение теоремы 2 выполняется. В противном случае, проинтегрировав неравенство 1) от $t = 2$ до $t \in (2, b)$, получим

$$\frac{1}{y(t) - y(1)} \leq \frac{1}{y(2) - y(1)} + 2M - Mt.$$

Отсюда, обозначив $d_1 = 2 + \dfrac{1}{M\big(y(2) - y(1)\big)}$, имеем $y(t) \geq \dfrac{1}{M(d_1 - t)} + y(1)$. Здесь $d_1 > 2$. Поэтому существует $d \leq d_1$, что $\lim\limits_{t \to d} y(t) = +\infty$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Всякое полное выпуклое решение уравнения (2) класса* $C^{2,\alpha}$, *удовлетворяющее условию (3) с таким* $\varepsilon_1$, *что*

$$A(n, m) - C(n, m, \varepsilon_1, 0) > 0,$$

*является квадратичным полиномом.*

Здесь $A(n, m)$, $C(n, m, \varepsilon_1, \varepsilon)$ определены формулами (26), (27). Напомним, что у нас $2 \leq m < n$.

В теореме 3 предъявляются более сильные требования к $\varepsilon_1$, чем в теореме 1. Грубая оценка для $\varepsilon_1$, которая обеспечивает выполнимость условия теоремы 3, такова: $\varepsilon_1 < \dfrac{1}{377mn^8}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $z(x)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям теоремы 3. Докажем, что все третьи производные функции $z(x)$ тождественно равны нулю. Для этого достаточно доказать, что тождественно равен нулю инвариант $P$.

Отметим, что из условия (3) следует существование оценки сверху для $z_{\eta\eta}(x)$ — второй производной функции $z(x)$ в любой точке $x$ по любому направлению $\eta$. Из существования такой оценки и полноты $z(x)$ получается, что функция $z(x)$ задана при всех $x \in A^n$.

Предположим, что в некоторой точке $O \in A^n$ значение инварианта $P$ не равно нулю. Чтобы не вводить новых обозначений, положим $\sqrt{P(0)} = 2a$. Предположим, что нам удалось найти положительную функцию $v(x)$ со свойствами:

1) $v(x)$ определена в области $\Sigma \subset A^n$ такой, что $\Sigma$ содержит точку $O$ и множество $\overline{\Sigma}$ компактно,

2) $v(0) = a$,

3) $\Delta v \le (A - C - F)v^3 + FP^{3/2} - \dfrac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 v} + \dfrac{|\operatorname{grad} v|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}$,

где $A = A(n, m)$, $C = C(n, m, \varepsilon_1, \varepsilon)$ и положительные числа $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $F$ таковы, что $A - C - F > 0$. Если $P(x) = 0$, то считаем, что правая часть последнего дифференциального неравенства принимает значение $+\infty$.

4) $v(x) \to +\infty$ при $x \to \partial\Sigma$.

Тогда функция $\sqrt{P} - v$ достигает максимума в точке $x' \in \Sigma$, где $\operatorname{grad}(\sqrt{P} - v) = 0$; это означает, что $\operatorname{grad}\sqrt{P(x')} = \operatorname{grad} v(x')$. Кроме того, в точке $x'$ имеем $\sqrt{P} - v \ge a$, следовательно, $\sqrt{P(x')} > v(x') > 0$. Отсюда в точке $x'$ будем иметь

$$\Delta v \le (A - C - F)v^3 + FP^{3/2} - \frac{|\operatorname{grad}\sqrt{P}|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}. \qquad (30'')$$

Вычитая из неравенства (28) неравенство (30''), получим, что в точке $x'$

$$\Delta(\sqrt{P} - v) \ge (A - C - F)(P^{3/2} - v^3) > 0,$$

что противоречит тому, что в этой точке достигается максимум функции $\sqrt{P(x)} - v(x)$. Следовательно, $P(x) \equiv 0$ и все третьи производные функции $z(x)$ тоже тождественно равны нулю. Значит, $z(x)$ — квадратичный полином.

Приступим теперь к построению функции $v(x)$со свойствами 1)-4).

Возьмем точку $O$ за начало аффинной системы координат в $A^n$. Введем "аффинное расстояние" $s(x) = \sqrt{c_{ij}x^i x^j}$ от точки $O$ до точки $x = (x^1, \dots, x^n)$. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (29) с начальными условиями (30'). Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами 1), 2), 4). Докажем, что можно так подобрать постоянные $B$, $\varepsilon_0$, $c_0$, чтобы выполнялось свойство 3). Заметим, что функция $v(x)$ принадлежит только классу $C^1$, поэтому дифференциальные неравенства с участием $v(x)$ мы понимаем в расширенном смысле, как это делается в работе [4]. При этом (см. там же) принцип максимума имеет место в обычной формулировке.

Имеем

$$\Delta v = g^{ij} v_{,ij} = g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} y'' + y'\Delta s. \qquad (31)$$

Так как функция $s(x)$ инварианта при замене базисных векторов аффинной системы координат, то можно вычислять $\Delta s$ и $g^{ij}\dfrac{\partial s}{\partial x^i}\dfrac{\partial s}{\partial x^j}$ в такой аффинной системе координат, где матрица $(c_{ij})$ единичная, а матрица $(z_{ij}(x))$ диагональная в точке $x$. Тогда получаем

$$\Delta s = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^j}\right)\right) = \frac{(\partial_i g) g^{ii} x^i}{2sg} + \frac{(\partial_i g^{ij})\, x^j}{s} + \sum_i g^{ii}\frac{s^2 - x^{i^2}}{s^3}.$$

Здесь $g = \det\,(g_{ij})$.

Далее следует

$$(\partial_i g^{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(C_n^m\frac{\partial D}{\partial z_{ij}}\right) = C_n^m\frac{\partial^2 D}{\partial z_{ij}\,\partial z_{kl}} z_{kli} = -S_{m-2}^{ij} z_{iij} + S_{m-2}^{jp} z_{ppj} = 0.$$

А так как с учетом (16)

$$\frac{(\partial_i g) g^{ii} x^i}{2sg} = \frac{1}{2s}(\partial_i g_{pp}) g_{pp}\, g^{ii} x^i = \frac{1}{2s}\varepsilon_{ppi}\, g^{pp} g^{ii} x^i,$$

то с помощью (17) и того, что $\left|\dfrac{x^i}{s}\right| \le 1$, получаем

$$\left|\frac{(\partial_i g) g^{ii} x^i}{2sg}\right| \le \frac{1}{2} n^2 (n-1) c((1+\varepsilon_1)^m - 1)(1+\varepsilon_1)^{7(m-1)/2}\left(C_{n-1}^{m-1}\right)^{1/2} P^{1/2}.$$

В силу выбора системы координат $g^{ij}\dfrac{\partial s}{\partial x^i}\dfrac{\partial s}{\partial x^j} = \dfrac{g^{ii} x^{i^2}}{s^2}$, поэтому из тех же соображений

$$\frac{C_{n-1}^{m-1}}{(1+\varepsilon_1)^{m-1}} \le g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \le m C_n^m (1+\varepsilon_1)^{m-1}, \tag{32}$$

$$\sum_i g^{ii}\frac{s^2 - x^{i^2}}{s^3} \le \frac{C_{n-1}^{m-1}(n-1)(1+\varepsilon_1)^{m-1}}{s}. \tag{33}$$

Обозначив

$$\delta = \frac{1}{2} n^2 (n-1) c((1+\varepsilon_1)^m - 1)(1+\varepsilon_1)^{7(m-1)/2}\left(C_{n-1}^{m-1}\right)^{1/2}, \tag{34}$$

получим

$$\Delta s \le \delta P^{1/2} + \frac{C_{n-1}^{m-1}(n-1)(1+\varepsilon_1)^{m-1}}{s}. \tag{35}$$

Заметим, что

$$|\,\mathrm{grad}\, v\,|^2 = y'^2 g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j}. \tag{36}$$

Теперь подставим в (31) выражение для $y''$ из (29), воспользуемся оценками (32), (33), (35), равенством (36), учтем, что $y' \geq 0$, и возьмем

$$B = (n-1)(1+\varepsilon_1)^{2(m-1)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad c_0 = \frac{A - C - F}{mC_n^m (1+\varepsilon_1)^{m-1}},$$

где $F > 0$ выберем чуть позже, чтобы выполнялось условие $A - C - F > 0$. Тогда получим в точке $x$

$$\Delta v \leq (A - C - F)v^3 - \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 v} + y' \delta P^{1/2}. \tag{37}$$

Далее, использовав неравенство Юнга с $\varepsilon$, получим

$$y' \delta P^{1/2} \leq \frac{(1+\varepsilon_1)^{m-1} \varepsilon^2 \delta^2 P^{3/2}}{2C_{n-1}^{m-1}} + \frac{y'^2 C_{n-1}^{m-1}}{2\varepsilon^2 \sqrt{P}\,(1+\varepsilon_1)^{m-1}}.$$

Из (32) имеем $\dfrac{y'^2 C_{n-1}^{m-1}}{\varepsilon^2 \sqrt{P}\,(1+\varepsilon_1)^{m-1}} \leq \dfrac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 \sqrt{P}}$.

Обозначив

$$\frac{\varepsilon^2 (1+\varepsilon_1)^{m-1} \delta^2}{2C_{n-1}^{m-1}} = F, \tag{38}$$

получим

$$y' \delta P^{1/2} \leq FP^{3/2} + \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{2\varepsilon^2 \sqrt{P}}.$$

Отсюда и из (37) следует

$$\Delta v \leq (A - C - F)\,v^3 + FP^{3/2} - \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 v} + \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 \sqrt{P}}.$$

При этом из (27), (34) и (38) видно, что если $A(n, m) - C(n, m, \varepsilon_1, 0) > 0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $A(n, m) - C(n, m, \varepsilon_1, \varepsilon) - F > 0$. Функция $v(x)$ построена.

Приведенные рассуждения требуют пятикратной дифференцируемости функции $z(x)$. Однако по теореме Хопфа [5] необходимую регулярность функции $z(x)$ можно получить, потребовав ее принадлежности классу $C^{2,\alpha}$. Теорема 3 доказана.

Как уже отмечалось, если матрица $(c_{ij})$ единичная, то уравнение (2) превращается в уравнение (1). В этом случае (3) будет условием на собственные значения матрицы $(z_{ij}(x))$, и из теоремы 3 мы получаем

Следствие. *При $2 \leq m < n$ всякое полное выпуклое класса $C^{2,\alpha}$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3) с таким $\varepsilon_1$, что*

$$A(n, m) - C(n, m, \varepsilon_1, 0) > 0,$$

*является квадратичным полиномом.*

## Список литературы

1. *К. Jörgens*, Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$.— Math. Ann. (1954 ), v. 127, pp. 130–134.
2. *E. Calabi*, Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Jörgens.— Michigan Math. J. (1958), v. 5, No 2, pp. 105–126.
3. *А.В. Погорелов*, Многомерная проблема Минковского. Наука, Москва (1975), 96 с.
4. *E. Calabi*, An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry.— Duke Math. J. (1958), v. 25, pp. 45–56.
5. *К. Миранда*, Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит., Москва (1957), 256 с.

## On complete convex solutions of the equation $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij}) = 1$

V.N. Kokarev

Let designation $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij})$ stand for the sum of all principal $m$-order minors of matrix $(z_{ij})$, consisting of second derivatives of the function $z(x^1, \dots, x^n)$. Any complete convex class $C^{2,\alpha}$ solution of the equation $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij}) = 1$, $(2 \le m < n)$, will be a quadratic polynomial if the matrix $(z_{ij})$ eigenvalues are sufficiently close to each other.

## Про повні опуклі розв'язання рівняння $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij}) = 1$

В. М. Кокарєв

За допомогою $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij})$ позначимо суму усіх головних мінорів $m$-го порядку матриці $(z_{ij})$, яка утворена з похідних функції $z(x^1, \dots, x^n)$ другого порядку. Кожне повне опукле класу $C^{2,\alpha}$ розв'язання рівняння $\mathrm{spur}_m\,(z_{ij}) = 1$, $(2 \le m < n)$, є квадратичним поліномом, якщо власні значення матриці $(z_{ij})$ достатньо близькі одні до одних.