Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 142–145

# Об одном классе многочленов Погорелова

О.И. Рудницкий

*Симферопольский государственный университет, Украина, 333036, г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4*

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Устанавливаются условия, при которых многочлены Погорелова произвольной степени $p$ являются ненулевыми инвариантами конечных унитарных групп $G$, порожденных отражениями. В случае $G = G(m, p, n)$ дана новая геометрическая интерпретация образующих нечетных степеней алгебры инвариантов указанной группы.

Пусть в $n$-мерном унитарном пространстве $U^n$ задана система координат с началом $O$ и ортонормированным базисом $e_i$ $(i = \overline{1, n})$; $S$ есть множество нормальных векторов $(n-1)$-мерных плоскостей с общей точкой $O$, таких что отражения $\sigma$ относительно этих плоскостей порождают конечную неприводимую группу $G$. Через $I^G$ обозначим алгебру всех многочленов, инвариантных относительно $G$, а через $m_i$ $(i = \overline{1, n})$ — степени образующих этой алгебры. Рассмотрим принадлежащие алгебре $I^G$ многочлены Погорелова

$$J_{2r}^G = \sum_{\sigma \in G} (x, \sigma s)^{2r}, \ r \geq 1, \tag{1}$$

где $s \in S$ и вектор $x = (x_i)$. В работе [1] для вещественных групп $G$ приведены все степени $m_i$, при которых образующие алгебры $I^G$ представимы в виде (1). Аналогичная задача для невещественных групп $G$ решена в [2].

В настоящей работе выделены условия, при которых многочлены $J_p^G$ произвольной (необязательно четной) степени $p$ являются ненулевыми инвариантами группы $G$, и дана новая геометрическая интерпретация образующих нечетной степени алгебры $I^{G(m, p, n)}$.

1°. Следуя Шепарду [3], конечное множество векторов $S$ будем называть $m$-множеством при выполнении следующего условия: если вектор $a \in S$, то и вектор $\theta^k a \in S$ $(k = \overline{1, m})$, где $\theta$ — первообразный корень степени $m$ из единицы.

Имеет место

Лемма. *Многочлены $J_p^G$ степеней $p = mt$ являются ненулевыми инвариантами группы $G$ тогда и только тогда, когда $G$-орбита множества $S$ есть $m$-множество.*

Доказательство леммы непосредственно вытекает из результатов работы [2] и справедливости следующих соотношений (при выполнении условий леммы):

$$\sum_{\sigma \in G} (x, \sigma s)^p = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \theta^{kp} (x, s_j)^p$$

и

$$\sum_{k=1}^{m} \theta^{kp} = \begin{cases} 0, \text{ если } p \neq mt, \\ m, \text{ если } p = mt. \end{cases}$$

Применим лемму к отдельным группам.

1. Пусть $G = T_8$ есть группа симметрий правильного комплексного многоугольника 3(3)3 [4]. Она содержит отражения третьего порядка относительно 4-х осей; множество $S = \left\{ e_2, \sqrt{\frac{2}{3}}\, e_1 + \varepsilon \frac{\omega^h}{\sqrt{3}} e_2 \right\}$, $h = \overline{1, 3}$, $\varepsilon = \sqrt{-1}$, $\omega$ есть первообразный корень третьей степени из единицы. Степени $m_i = 4, 6$ [5]. Поскольку $T_8$-орбита множества $S$ представима в виде $\pm\, \omega^t S$, $t = \overline{1, 3}$, форма $J_4^{T_8} \equiv 0$ $(4 \neq 6t)$, а форма $J_6^{T_8} = x_1^6 + x_2^6 - 5\sqrt{2}\, \varepsilon\, x_1^3 x_2^3$ [2].

2. Рассмотрим группу симметрий $W(L_3)$ правильного комплексного многогранника 3(3)3(3)3 [4]. В пространстве $U^3$ она порождается отражениями третьего порядка относительно 12-ти плоскостей. Степени $m_i = 6, 9, 12$ [5]; $W(L_3)$-орбита множества $S$ имеет вид

$$\left\{ \pm\omega^t e_i\,,\ \pm \frac{\omega^t \varepsilon}{\sqrt{3}} (e_1 + \omega^j e_2 + \omega^k e_3) \right\},$$

$i, j, k = \overline{1, 3}$, т.е. является 6-множеством. Таким образом, согласно лемме многочлен $J_9^{W(L_3)} \equiv 0$, а формы вида $J_{6k}^{W(L_3)}$ тождественно не равны 0 [2].

3. Группа $W(K_5)$ порождается отражениями второго порядка относительно плоскостей в пространстве $U^5$. Степени $m_i = 4, 6, 10, 12, 18$ [5]. Множество $S$ запишем так:

$$S = \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} (e_i - \omega^{k_0} e_j),\ \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \sum_{i=1}^{4} \omega^{k_i} e_i + \sqrt{2}\, \omega^{k_5} e_5 \right) \right\},$$

$$i, j = \overline{1, 4}\ \ (i < j\,),\quad k_0\,,\ k_i\,,\ k_5 = \overline{1, 3},\quad \sum_{i=1}^{4} k_i + 2k_5 \equiv 0 \pmod 3.$$

Его $W(K_5)$-орбита есть 6-множество [2]. Таким образом, если степень $m_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ образующей алгебры $I^{W(K_5)}$ не делится на 6, то $J_{m_i}^{W(K_5)} \equiv 0$ (формы степеней 4 и 10). Формы $J_{6k}^{W(K_5)}$ $(k = \overline{1, 3})$ тождественно не равны 0 и являются образующими алгебры $I^{W(K_5)}$ [2].

2°. Пусть $G(m, p, n)$ есть группа симметрий комплексного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$, $m,\ n > 1$, $m = pq$; в частности $B_n^m = G(m, 1, n)$ — группа симметрий обобщенного $n$-куба $\gamma_n^m$ и $G(m, m, n) = D_n^m \subset B_n^m$ [5].

Импримитивная группа $G(m, p, n)$ в пространстве $U^n$ порождена отражением порядка $q$ относительно плоскости $x_1 = 0$ и $n$ отражениями второго порядка относительно плоскостей с уравнениями

$$x_j - x_{j+1} = 0 \ \ (j = \overline{1, n-1}), \quad x_1 - \theta x_2 = 0, \ \theta^m = 1 \ \ [5].$$

Множество $S$ имеет вид

$$e_i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - \theta^k e_j), \ (i<j), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Его $G(m, p, n)$-орбита, состоящая из векторов

$$\theta^h e_i, \quad \pm\frac{\theta^h}{\sqrt{2}}(e_i - \theta^k e_j), \quad h = \overline{1, m},$$

есть $m$-множество. Таким образом, согласно лемме многочлены $J_{mt}^{G(m, p, n)}$ $(t = \overline{1, n-1})$ степеней $mt$ являются ненулевыми элементами алгебры $I^{G(m, p, n)}$.

Установим соотношения для чисел $m$, $n$, при которых эти многочлены — образующие алгебры $I^{G(m, p, n)}$.

Если $mt$ — нечетно, многочлены $J_{mt}^{G(m, p, n)}$ с точностью до постоянного множителя совпадают со степенными суммами $\sum_{i=1}^{n} x_i^{mt}$, которые являются образующими алгебры $I^{G(m, p, n)}$ при любых $m$, $n$ [5].

Формы $J_{mt}^{G(m, p, n)}$ ($mt$ четно) запишем следующим образом:

$$J_{mt}^{G(m, p, n)} = \left(\frac{2^{mt/2-\alpha}}{m} + n - 1\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^{mt} + R_{mt},$$

где

$$R_{mt} = \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (-1)^{mk} C_{mt}^{mk} x_i^{m(t-k)} x_j^{mk},$$

$t = \overline{1, n-1}$, если $m$ четно, и $t = 2, 4, \ldots, n-1-\rho$, если $m$ нечетно; $\rho = 0(1)$ при нечетном (четном) $n$, $\alpha = 0(1)$ при $m = 2(>2)$. Соотношения для чисел $m$, $n$, при которых образующие четных степеней $mt$ алгебры $I^{G(m, p, n)}$ имеют вид (1), установлены в [2,6]. Итак, получена следующая

**Теорема.** *Многочлены $J_{mt}^{G(m, p, n)}$ являются образующими степеней $mt$ алгебры $I^{G(m, p, n)}$ при любом $n$, если $m \neq 2^l$ $(l = 1, 2\ldots)$. В случае $m = 2^l$ число*

$$n \neq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{t} C_{mt}^{mk} - \frac{2^{mt/2-\alpha}}{m},$$

$\alpha = 0(1)$ *при* $l = 1(>1)$.

Инварианты $J_{mt}^{G(m,p,n)}$, если $mt$ нечетно, являются степенными суммами. Следовательно, получена новая геометрическая интерпретация указанных степенных сумм: *они представляют собой многочлены Погорелова группы* $G(m, p, n)$.

## Список литературы


1. *В.Ф. Игнатенко*, Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями.— В сб.: Итоги науки и техники. Пробл. геометрии. ВИНИТИ, т. 16 (1984), с. 195–229.
2. *О.И. Рудницкий*, Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, БГУ, Минск (1990), 11 с.
3. *G.C. Shephard*, Regular complex polytopes.— Proc. London Math. Soc. (1952), v. 3, pp. 82–97.
4. *H.S.M. Coxeter*, Regular complex polytopes. Cambridge Univ. Press., London (1974), 185 p.
5. *G.C. Shephard, J.A. Todd*, Finite unitary reflection groups.— Can. J. Math. (1954), v. 6, No 2, pp. 274–304.
6. *О.И. Рудницкий*, Базисные инварианты конечных унитарных импримитивных групп, порожденных отражениями. Симферопольский ун-т, Симферополь (1984), 7 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 8.08.84, № 1344 Ук-Д84.


## On a class of Pogorelov polynomials

O.I. Rudnitsky

The conditions, under which the Pogorelov polynomials of arbitrary power $p$ are nontrivial invariants of finite unitary groups $G$, generated by reflections, are stated. In the case of $G = G(m, p, n)$, a new geometric interpretation of generators of odd powers of invariant algebra of this group is proposed.

## Про один клас поліномів Погорєлова

О.І. Рудніцький

Встановлюються умови, за яких поліноми Погорєлова довільної степені $p$ є ненульовими інваріантами **скінчених** унітарних груп $G$, породжених віддзеркаленнями. У випадку $G = G(m, p, n)$ дана нова геометрична інтерпретація твірних непарних степенів алгебри інваріантів вказаної групи.