Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 356-369

Эйлерова характеристика многообразий с аксиомой гиперплоскостей

С. И. Окрут

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 2 июня 1995 года

Аксиома l-гиперплоскостей является обобщением аксиомы плоскостей Картана, и класс римановых многообразий, ей удовлетворяющих, является расширением класса пространственных форм. Для компактных многообразий с аксиомой l-гиперплоскостей при достаточно больших l решена задача знакоопределенности эйлерова класса по знаку кривизны многообразия, при этом эйлеровы классы явно вычислены. В предположении, что структура кривизны имеет общее положение, старшие классы Штифеля–Уитни многообразия с аксиомой гиперплоскостей нулевые. Если кривизна многообразия M^{2m} с аксиомой $(2m-2)$-гиперплоскостей знаконеопределенная в каждой точке, то M локально изометрично прямому произведению прямой на неплоскую пространственную форму.

Многообразия с аксиомой гиперплоскостей, введенные автором в [1], являются обобщениями вещественных пространственных форм. Известные результаты по аксиомам подмногообразий носят исключительно локальный характер [2]. В данной работе рассматривается связь между топологией компактных многообразий, удовлетворяющих аксиоме гиперплоскостей, и их кривизной. Так, проблема знакоопределенности класса Эйлера по знаку секционной кривизны, остающаяся в размерностях выше 4 для общих многообразий нерешенной, для многообразий с аксиомой l-гиперплоскостей допускает решение, вполне подобное случаю пространственной формы, если l достаточно велико. Будем называть вполне геодезическое подмногообразие коразмерности единица гиперплоскостью.

Определение 1 [1]. Риманово многообразие M^n удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей ($1 \le l$-фиксированное $\le n-1$), если для любой точки x из M и для любого l-мерного подпространства Q, принадлежащего $T_x M$, существует гиперплоскость W, проходящая через x, такая, что Q содержится в $T_x W$.

Теорема А. *Если риманово многообразие M удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей, то в каждой точке x из M имеется прямое ортогональное разложение*

$$T_x M = \Psi \overset{\perp}{\oplus} \Phi, \quad \Phi = \Phi_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \Phi_m, \tag{1}$$

$$k(\Psi \wedge \Psi) = k, \quad k(\Psi \wedge \Phi_\alpha) = \kappa_\alpha, \tag{2}$$

$$R(\Psi, \Psi)\, \Phi_\alpha = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Phi_\beta)\, \Psi = 0, \quad R(\Phi_\alpha, \Psi)\, \Psi \subset \Phi_\alpha, \tag{3}$$

$$(\nabla_{\Phi_\alpha} R)(\Psi, \Psi)\, \Phi_\beta = 0, \tag{4}$$

где $\dim \Psi > l$, $\dim \Phi_\alpha = 1$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$, *причем подпространство Φ является касательным пространством некоторого вполне геодезического подмногообразия F.*

Кривизна многообразия назывется *знаконеопределенной* в точке x из M, если в $T_x M$ имеются площадки, по которым секционная кривизна положительная (отрицательная), и площадки, по которым это требование не выполняется; в противном случае кривизна называется *знакоопределенной* в точке. Кривизна многообразия называется знакоопределенной, если она знакоопределенная в каждой точке.

Теорема Б. *Пусть M^{2m} компактное ориентированное многообразие, удовлетворяющее аксиоме l-гиперплоскостей с $l \geq 2m - 5$, имеет знакоопределенную кривизну. Тогда характеристика Эйлера $\chi_M < 0$ лишь тогда, когда $k_M < 0$, m — нечетное и $\chi_M > 0$ в остальных случаях.*

Так как всякая вещественная пространственная форма удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей с любым l, и, вообще, при $l < p$ аксиома l-гиперплоскостей слабее аксиомы p-гиперплоскостей, то имеет смысл для выделения классов римановых многообразий, удовлетворяющих одной из аксиом гиперплоскостей, ввести следующее понятие. Будем говорить, что многообразие удовлетворяет существенной аксиоме l-гиперплоскостей, если оно удовлетворяет указанной аксиоме, но не удовлетворяет аксиоме $(l + 1)$-гиперплоскостей. Эллипсоид из примера 1 (см. ниже) с точно $l + 2$ равновеликими полуосями является примером компактного ориентируемого многообразия,удовлетворяющего существенной аксиоме l-гиперплоскостей, и иллюстрирует теорему Б.

Определение 2. Риманово многообразие M, удовлетворяющее аксиоме l-гиперплоскостей, имеет (строго) общую структуру кривизны, если в каждой точке $x \in M$ для имеющегося по теореме А разложения (1)–(3) $\dim \Psi = l + 1$ и $k \neq \kappa_\alpha$ $\forall \alpha$ (сверх того, все κ_α различны между собой, соответственно).

Очевидно, прямое произведение компактных вещественных пространственных форм F_a^k и M_c^m с ненулевыми постоянными кривизны a и c является примером компактного риманова многообразия, удовлетворяющего существенной аксиоме l-гиперплоскостей с $l = \max(k, m) - 1$ и имеющего общую структуру кривизны. Эллипсоид из примера 1 и не обладает общей структурой кривизны, однако в примере 2 будет построено топологически приводимое компактное многообразие $S^1 \times M_c^{n-1}$, которое метрически локально неприводимое и имеет строго общую структуру кривизны.

Теорема В. *Для любого ориентированного многообразия M^n ($n \geq 4$), удовлетворяющего аксиоме l-гиперплоскостей, $l \geq n/2$, и имеющего строго общую структуру кривизны, старшие классы Штифеля–Уитни нулевые* :

$$w_{l+2}(M) = w_{l+3}(M) = \ldots = w_n(M) = 0.$$

Следствие 1. *В предположениях теоремы В для четномерного многообразия M целочисленный эйлеров класс $e_M(\mathbf{Z}) = 0$.*

Следствие 2. *Если ориентированное компактное четномерное многообразие M^{2m} удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей, $l \geq 2m - 5$, и имеет строго общую структуру кривизны, то кривизна многообразия не является знакоопределенной.*

Теорема Г. *Пусть M^{2m} — компактное ориентированное многообразие, удовлетворяющее аксиоме $(2m - 2)$- гиперплоскостей. Если кривизна является знаконеопределенной в каждой точке, то $\chi_M = 0$ и M локально изометрично прямому произведению прямой и неплоской пространственной формы.*

Доказательства утверждений

Доказательство теоремы А. Существование разложения (1), удовлетворяющего равенствам (2),(4) и условию на величину размерности p-подпространства Ψ, обеспечивается теоремой 1 из [1]. Причем при доказательстве этой теоремы было получено, что каждый вектор X из Ψ является R-замкнутым, т.е., каковы бы ни были векторы U, V, ортогональные X, имеет место равенство $R(U, V)X = 0$. Отсюда сразу следует справедливость второго равенства из (3). Первое равенство из (3) может быть получено из I-го тождества Бьянки и R-замкнутости ортогональных векторов X, Y из Ψ. Действительно,

$$\forall\, U \in \Phi \quad R(X, Y)U = R(U, Y)X + R(X, U)Y = 0.$$

Последнее равенство в (3) следует из того, что для любых единичных векторов X, Y из Ψ

$$R(U, X)Y = R(U, X)(Y - \langle Y, X\rangle X) + \langle Y, X\rangle R(U, X)X.$$

Воспользовавшись снова R-замкнутостью векторов из Ψ и последним равенством, получаем следующее: $R(U, X)Y = \langle X, Y\rangle R(U, X)X$. А так как, по построению в теореме 1 из [1], подпространства Φ_a являются собственными подпространствами одновременно для всех операторов вида $R(\cdot, X)X$, где X — любой орт из Ψ, то этим доказывается и последнее равенство из (3).

Докажем существование подмногообразия F. В доказательстве теоремы 1 [1] подпространство Ψ строилось так, что оно содержало набор не менее чем из $l+1$ ортонормальных векторов $X_1, \dots, X_{l+1}$, служащих ортогональными к гиперплоскостям $W_1, \dots, W_{l+1}$. Если теперь сузить пространство Ψ до линейной оболочки векторов X_i, т.е. положить $\Psi = L(X_1, \dots, X_{l+1})$, то получим разложение, по-прежнему удовлетворяющее формулам (1)–(4); при этом в подпространство Φ лишь добавятся новые прямые $L(X_q)$ $q = l+2, \dots, p$, если изначально имело место неравенство $p > l+1$. Положив $F = W_1 \cap \dots \cap W_{l+1}$, получаем требуемое. □

Замечание. Следует отметить, что $\kappa_q = k$, т. е. при таком сужении пространства Ψ кривизна многообразия M, удовлетворяющего аксиоме l-гиперплоскостей, не имеет общую структуру.

Переходя к подготовке доказательства теоремы Б, введем следующие обозначения. Пусть k некоторый фиксированный скаляр, p, q — фиксированные константы такие, что $p \le q$. Пфаффианом относительно набора 1-форм $S = (\theta^1, \dots, \theta^q, \psi^{p+1}, \dots, \psi^{2m})$ будет называться пфаффиан кососимметрической матрицы размеров $2m \times 2m$, элементами которой служат 2-формы из внешней алгебры, порожденной указанным набором 1-форм, точнее

$$P_m(\Omega;\kappa_1,\dots,\kappa_p;S)=\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}\Omega & B\\ -B^t & C\end{pmatrix},$$

где $\Omega=(\Omega_{\alpha\beta})$, $B=(-\kappa_\alpha\theta^\alpha\wedge\psi^i)$ (суммирования по α здесь нет), $C=(c_{ij})$ — матрицы размеров $p\times p$, $p\times(2m-p)$ и $(2m-p)\times(2m-p)$, причем элементы $\Omega_{\alpha\beta}$ принадлежат внешней алгебре, порожденной первыми q штуками 1-форм из набора S, а $c_{ij}=-k\psi^i\wedge\psi^j$, если $i<j$. Первый индекс — это номер строки, а второй — столбца. При $p=1$ матрица Ω нулевая, а при $p=0$ к тому же еще нулевая и матрица B. Если из контекста понятно, о каком наборе S и матрице Ω идет речь, то они не будут присутствовать в обозначении пфаффиана P_m. Пусть в векторном пространстве, порожденном набором 1-форм, задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, которое продолжено на всю внешнюю алгебру. Обозначим

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\langle\Omega_{\alpha\beta},\theta^\alpha\wedge\theta^\beta\rangle, \tag{5}$$

$$\theta=\theta^1\wedge\dots\wedge\theta^p,\ \psi=\psi^{p+1}\wedge\dots\psi^{2m},\ \omega=\theta\wedge\psi. \tag{6}$$

Лемма 1. *Тогда для пфаффианов относительно набора S и матрицы Ω, введеных выше, у которых $p=q$, справедливы следующие равенства:*

а) *При* $p=1$ $P_m(\kappa_1)=(-1)^m(2m-1)!!k^{m-1}\kappa_1\omega.$

б) *При* $p=2$ $P_m(\kappa_1,\kappa_2)=(-1)^m(2m-3)!!k^{m-2}(k\sigma_{12}+(2m-2)\kappa_1\kappa_2)\omega.$

в) *При* $p=3$ $P_m(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)=(-1)^m(2m-3)!!k^{m-3}\times$
$\times(k(\sigma_{12}\kappa_3+\sigma_{13}\kappa_2+\sigma_{23}\kappa_1)+(2m-4)\kappa_1\kappa_2\kappa_3)\omega.$

г) *При* $p=4$ $P_m(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)=(-1)^m(2m-5)!!k^{m-4}\times$
$\times((2m-4)(k(\sigma_{12}\kappa_3\kappa_4+\sigma_{13}\kappa_2\kappa_4+\sigma_{14}\kappa_2\kappa_3+\sigma_{23}\kappa_1\kappa_4+$
$+\sigma_{24}\kappa_1\kappa_3+\sigma_{34}\kappa_1\kappa_2)+(2m-6)\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4)\theta+$
$+k^2(\Omega_{12}\wedge\Omega_{34}-\Omega_{13}\wedge\Omega_{24}+\Omega_{14}\wedge\Omega_{23}))\wedge\psi.$

Доказательство. Если $A=(a_{ij})$ — матрица с компонентами из коммутативного кольца размеров $2m\times 2m$, а A_{1j} — подматрица, полученная из исходной вычеркиванием пары строк и пары столбцов с номерами $1, j$, то хорошо известная рекуррентная формула для вычисления пфаффиана принимает следующий вид:

$$\mathrm{Pf}\,(A) = \sum_{j=2}^{2m} (-1)^j a_{1j}\, \mathrm{Pf}\,(A_{1j}). \tag{7}$$

а) Используя приведенную формулу и формулу на с. 259 из [3], которая при вышеуказанных обозначениях эквивалентна следующему: $P_m = (-1)^m (2m-1)!!k^m \psi$ — пфаффиан матрицы C при $p = 0$, а также антикоммутативность внешнего умножения, получаем требуемое равенство.

б) Не предполагая, что $1 = q$, снова применим разложение (7):

$$P_m(\kappa_1, \kappa_2) = \Omega_{12} \wedge P_{m-1} + \sum_{j=3}^{2m} (-1)^j (-\kappa_1 \theta^1 \wedge \psi^j) \wedge P_{m-1}(\kappa_2) =$$
$$= (-1)^m (2m-3)!!k^{m-2}(-k\Omega_{12} + (2m-2)\kappa_1\kappa_2 \theta^1 \wedge \theta^2) \wedge \psi. \tag{8}$$

Здесь в последнем переходе формулы (8) были использованы равенство из пункта (а) для пфаффиана $P_{m-1}(\kappa_2)$, выражение для P_{m-1} и антикоммутативность внешнего произведения. Если же $q = p = 1$, то требуемое в пункте равенство следует из того, что $\Omega_{12} = -\sigma_{12}\theta^1 \wedge \theta^2$.

в) Не предполагая, что $2 = q$, применим разложение (7), равенство из пункта а) и формулу (8) для пфаффиана $P_{m-1}(\kappa_2, \kappa_3; S_j)$, определенного относительно набора, который получен из S исключением форм θ^1, ψ^j:

$$P_{m-1}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \Omega_{12} \wedge P_{m-1}(\kappa_3) - \Omega_{13} \wedge P_{m-1}(\kappa_2) +$$
$$+ \sum_{j=4}^{2m} (-1)^j (-\kappa_1 \theta^1 \wedge \psi^j) \wedge P_{m-1}(\kappa_2, \kappa_3; S_j) = (-1)^{m-1}(2m-3)!!k^{m-3} \times$$
$$\times (k(\kappa_3\, \Omega_{12} \wedge \theta^3 - \kappa_2\, \Omega_{13} \wedge \theta^2 + \kappa_1\, \Omega_{23} \wedge \theta^1) - (2m-4)\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \theta)\psi. \tag{9}$$

Если $3 = q$, то в полученной формуле за счет свойств внешнего умножения результат зависит от значения

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv -\sigma_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \pmod{\theta^\gamma} \tag{10}$$

по модулю прямой, натянутой на форму под номером $\gamma \neq \alpha, \beta$; после подстановки приведенных выражений и перестановок 1-форм приходим к требуемому равенству.

г) Подобно предыдущему, однако для случая $4 = p = q$, разложим искомый пфаффиан по формуле (7):

$$P_m(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) = \Omega_{12}\wedge P_{m-1}(\kappa_3,\kappa_4) - \Omega_{13}\wedge P_{m-1}(\kappa_2,\kappa_4) +$$
$$+\Omega_{14}\wedge P_{m-1}(\kappa_2,\kappa_3) + \sum_{j=5}^{2m}(-1)^j(-\kappa_1\theta^1\wedge\psi^j)\wedge P_{m-1}(\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4;S_j).$$

Подставляя вместо пфаффианов из первых трех слагаемых их выражения по формуле (8), а вместо пфаффиана из последней суммы — его выражение по формуле (9), получаем следующее:

$$P_m(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) =$$
$$= (-1)^{m-2}(2m-5)!!k^{m-3}(\Omega_{12}\wedge(k\,\Omega_{34} - (2m-4)\kappa_3\kappa_4\theta^3\wedge\theta^4) -$$
$$-\Omega_{13}\wedge(k\,\Omega_{24} - (2m-4)\kappa_2\,\kappa_4\theta^2\wedge\theta^4) +$$
$$+\Omega_{14}\wedge(k\,\Omega_{23} - (2m-4)\kappa_2\,\kappa_3\theta^2\wedge\theta^3))\wedge\psi +$$
$$+(-1)^{m-1}(2m-4)(2m-5)!!k^{m-4}\kappa_1\theta^1\wedge(\kappa_4 k\,\Omega_{23}\wedge\theta^4 - \kappa_3 k\,\Omega_{24}\wedge\theta^3 +$$
$$+\kappa_2 k\,\Omega_{34}\wedge\theta^2 - (2m-6)\kappa_2\kappa_3\kappa_4\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4)\wedge\psi.$$

Теперь, заменив по формуле (10) $\Omega_{\alpha\beta}$ во всех слагаемых, где помимо этой 2-формы присутствуют в виде сомножителей все 1-формы, кроме θ^α и θ^β, и проведя перестановки форм, получаем требуемое равенство. □

Доказательство теоремы Б. Если многообразие удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей, то по теореме А в каждой точке x имеет место разложение (1)–(3). Положим $p = 2m - l - 1$. Выберем в касательном пространстве T_xM ортонормальный базис b и двойственный ему базис S из 1-форм

$$b = (U_1,\dots,U_p;X_{p+1},\dots,X_{2m}),\quad U_\alpha\in\Phi_\alpha\ X_i\in\Psi,$$
$$S = (\theta^1,\dots,\theta^p;\psi^{p+1},\dots,\psi^{2m}).$$

Конечно же, базис b всегда можно выбрать положительно ориентированным, например изменяя знак X_{2m} на противоположный. На основании формул (2), (3) для оператора преобразования кривизны имеются следующие выражения:

$$R(U_\alpha,X_j) = -\kappa_\alpha\theta^\alpha\wedge\psi^j,\quad R(X_i,X_j) = -k\,\psi^i\wedge\psi^j. \tag{11}$$

И пусть $p\times p$ матрица $\Omega = (\Omega_{\alpha\beta})$ состоит из 2-форм $\Omega_{\alpha\beta} = R(U_\alpha,U_\beta)$. Тогда характеристика Эйлера и вещественный эйлеров класс многообразия M в точке x

выражаются через пфаффиан относительно набора форм S и матрицы Ω следующим образом:

$$\chi_M = \int\limits_M e_M, \quad e_M = (-1)^m (2\pi)^{-m} P_m(\kappa_1, \dots, \kappa_p).$$

Первая формула есть не что иное, как формула Гаусса–Бонне, и именно благодаря ей доказываемая теорема сводится к определению знака коэффициента пропорциональности между классом Эйлера и формой объема. Необходимо отметить, что из ориентируемости многообразия следует существование формы объема ω, которая в точке x может быть вычислена по формулам (6). Величины $\sigma_{\alpha\beta}$, определенные в (5), являются секционными кривизнами для плоскостей, натянутых на пару векторов U_α, U_β. Теперь заключение теоремы для случая $l \geq 2m - 4$ следует из пунктов а)–в) леммы 1.

Случай $l = 2m - 5$ нуждается в отдельном рассмотрении. Прежде всего отметим, что вполне геодезическое подмногообразие F из теоремы А, являющееся в рассматриваемом случае четырехмерным, имеет, как и объемлющее многообразие M, знакоопределенную кривизну. Как следует из доказательства теоремы Чжэня–Милнора (см. [4, с. 167]), в точке x имеет место неравенство $\lambda \geq 0$, где λ — коэффициент пропорциональности эйлерова класса форме объема многообразия в точке x, в нашем случае — это F,

$$(2\pi)^{-2}(\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} - \Omega_{13} \wedge \Omega_{24} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23}) = e_F = \lambda\theta.$$

Теперь заключение теоремы следует из леммы 1, г). □

Пример 1. Метрика, которая индуцирована из $\mathbb{R}^{n+1}$ на эллипсоиде с точно $l + 2$ равновеликим осями, задаваемым уравнением

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^p)^2}{a_p^2} + \frac{(x^{p+1})^2}{c^2} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{c^2} = 1, \quad c \neq a_\beta,$$

где $p = n - l - 1$, $\beta = 1, \dots, p$, удовлетворяет аксиоме l-гиперплоскостей как частный случай скрещенного произведения [5, с. 104]. Однако, если $l \geq l/2$, то эллипсоид не может, согласно теореме А, удовлетворять аксиоме $(l + 1)$-гиперплоскостей, так как, по крайней мере, в точках сферического экватора $x^1 = \dots = x^p = 0$ все $\kappa_\beta = a_\beta^{-2}$ отличны от $k = c^{-2}$. Кривизна эллипсоида положительная, и при четном n его характеристика Эйлера равна 2.

Пример 2. Компактные римановы многообразия M^n, удовлетворяющие аксиоме $(n-2)$-гиперплоскостей и имеющие в каждой точке непостоянную кривизну, могут быть получены в результате скрещенного умножения окружности S^1 с кривизной, равной λ, на компактную неплоскую вещественную пространственную форму M_c^{n-1}. Если t — натуральный параметр на окружности, а $d\theta_c^2$ — риманова метрика на M, то в качестве скрещивающей функции можно выбрать следующую:

$$ds^2 = dt^2 + \varphi^2 \theta_c^2, \quad \varphi = \cos \lambda t + 2. \tag{12}$$

Отметим, что по формулам (1)–(3) из [5] секционные кривизны по смешанным двумерным и по вертикальным двумерным площадкам в нашем случае выражаются следующим образом:

$$\kappa = k(U^h \wedge Y^v) = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}, \quad k = k(X^v \wedge Y^v) = \frac{1}{\varphi^2}(c - \dot{\varphi}^2). \tag{13}$$

Если $0 < c$, выберем $\lambda = \sqrt{c}/2$, тогда в каждой точке $\kappa < k$; если же $c < 0$, выберем $\lambda = \sqrt{-c/2}$, и тогда всюду $k < \kappa$. Полученное в результате скрещенного умножения риманово многообразие $S^1 \times_\varphi M_c^{n-1}$ удовлетворяет существенной аксиоме $(n-2)$-гиперплоскостей и, более того, имеет общую структуру кривизны.

Лемма 2. *Пусть многообразие M^n $(n \geq 4)$, удовлетворяющее аксиоме l-гиперплоскостей с $l \geq n/2$, имеет общую структуру кривизны, тогда подпространства Ψ образуют гладкое распределение на M.*

Доказательство. Для общей структуры кривизны и при принятом условии на величину l в каждой точке многообразия может быть лишь единственное подпространство Ψ, удовлетворяющее условиям (1)–(3). Если бы таких различных подпространств было два, Ψ_1 и Ψ_2, то $\dim \Psi_1 \cap \Psi_2 \geq 2$, а тогда равенства (2),(3) приводят к противоречию с тем, что многообразие имеет общую структуру кривизны, так как условия (1)–(3) означают, что числа k, κ_α являются собственными значениями оператора кривизны ρ (задаваемого следующим образом: $\langle \rho(X \wedge Y), W \wedge Z \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$). Причем подпространства $\Psi \wedge \Psi$, $\Psi \wedge \Phi_\alpha$ суть собственные подпространства, отвечающие указанным собственным значениям, соответственно. Поэтому достаточно воспользоваться тем фактом, что собственный вектор не может представляться суммой собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Более того, если Ψ' — некоторое подпространство, состоящее из R-замкнутых векторов и имеющее ненулевое пересечение с Ψ_1, то из леммы 1 в [5] следует, что подпространство $E = \Psi_1 + \Psi'$ также состоит из R-замкнутых векторов и для него выполняются равенства (2),(3). (Заметим, что в доказательстве свойств (1)–(3) в теореме А используется лишь R-замкнутость подпространства Ψ.) Тогда из определения общей структуры кривизны следует, что $\Psi_1 = E$, ибо в противном случае собственный вектор для ρ из $E \wedge E$ разлагался бы в сумму собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Следовательно, $\Psi' \subset \Psi_1$, т.е. всякое подпространство R-замкнутых векторов, имеющее ненулевое пересечение с единственным подпространством Ψ из разложения (1), содержится в подпространстве Ψ.

Докажем теперь гладкость распределения Ψ. Пусть O нормальная окрестность произвольной точки p_0. Для любой точки $p_1 \in O$ соединим ее геодезической p_t $(0 \le t \le 1)$ с точкой p_0. Из условия действия на многообразии аксиомы l-гиперплоскостей следует, что существует не менее l штук взаимно ортогональных гиперплоскостей W_i $(i = 1, \dots, s \ge l)$, проходящих через точку p_0 и имеющих вектор $P = \dot{p}_0$ своим касательным. Пусть X_i — ортогональные к W_i векторы в точке p_0. Обозначим $s - l + 1 = k$. Существует ненулевое подпространство Q, натянутое на векторы $V_1, \dots, V_k$ из линейной оболочки $L = L(X_1, \dots, X_s)$, такого положения, что для всевозможных наборов $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ выполняется условие

$$\langle V_1 \wedge \dots \wedge V_k, X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k} \rangle \neq 0,$$

т.е. в Q не существует векторов, ортогональных одновременно хотя бы одному набору из k векторов X_i, в частности, Q не содержит ни одного вектора X_i. Определим

$$E := Q + L^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} L(P),$$

тогда $\dim E = n - l$. Из аксиомы l-гиперплоскостей следует существование такой гиперплоскости W, что ортогональный ей вектор $Z = V + a^i X_i$ лежит в подпространстве E. Подпространство Q строилось так, что среди коэффициентов a^j существуют не менее l, отличных от нуля. Можно считать, что этим коэффициентам отвечают индексы $j = 1, \dots, l$. Из леммы 1 [5] следует, что подпространство $\Psi_0 = L(X_1, \dots, X_l, Z)$ состоит из R-замкнутых векторов.

Пусть Ψ' — результат параллельного перенесения подпространства Ψ_0 вдоль геодезической p_t в точку p_1. Так как геодезическая p_t лежит в пересечении всех гиперплоскостей $W_1 \cap \ldots \cap W_l \cap W$, то при параллельном перенесении векторов X_j и Z вдоль p_t они останутся ортогональными соответствующим гиперплоскостям W_j и W. А поскольку углы между этими векторами не изменятся, то подпространство Ψ' по-прежнему будет состоять из R-замкнутых векторов. Из единственности разложения (1) следует, что $\Psi' \subset \Psi_1$, где Ψ_1 — это подпространство из разложения (1) в точке p_1 . Размерность подпространства Ψ' может быть лишь на единицу меньше, чем $-\Psi_1$.

Из неравенств условия леммы следует, что в поле подпространств Ψ_t вдоль p_t можно выбрать параллельно переносимую двумерную плоскость $X_t \wedge Y_t$. Ее секционная кривизна $k_t = k(X_t \wedge Y_t)$ оказывается гладкой функцией вдоль p_t и совпадает с k из первой формулы (2). Пусть X_t — единичное параллельно переносимое вдоль p_t векторное поле из Ψ_t. Уравнение относительно A

$$R(A, X_1)X_1 - k_1 A = 0$$

с гладко зависящими от точки p_1 коэффициентами определяет распределение Ψ, совпадающее с фигурирующим в формуле разложения (1), так как по условию структура кривизны M является общей и, следовательно, размерность пространства решений постоянная и равна $l + 1$. Поскольку пространство решений образует поле, гладко зависящее от точки p_1 , то этим доказана гладкость распределения Ψ. Единственность подпространств Ψ обеспечивает глобальность этого распределения. □

Лемма 3. *Пусть многообразие M^n $(n \geq 4)$, удовлетворяющее аксиоме l-гиперплоскостей с $l \geq n/2$, имеет строго общую структуру кривизны, тогда прямые Φ_α из разложения* (1) *образуют гладкие распределения на M.*

Доказательство. Выбрав локально определенное единичное гладкое, на основании леммы 2, векторное поле X из распределения Ψ, составим уравнение относительно U

$$R(U, X)X - \kappa_\alpha U = 0,$$

где κ_α — собственные значения оператора $R(\,\cdot\,, X)X$, отличные от k. Ввиду того, что структура кривизны M является строго общей, полученные в результате решения гладкие одномерные распределения Φ_α являются ортогональными к распределению Ψ и совпадают с подпространствами Φ_α, присутствующими в разложении (1). Кроме того, так как кривизна M имеет строго общую структуру, то из формул (2),(3) следует, что в каждой точке M имеется лишь единственный упорядоченный по величине чисел κ_α набор соответствующих им прямых Φ_α и что эти прямые образуют глобальное гладкое распределение на M. □

Доказательство теоремы В. Согласно лемме 3, на многообразии M имеется $n-l-1$ взаимно ортогональных линейных распределений. А поскольку M ориентированное, то отсюда следует, что на M существует $n-l-1$ ортонормальных гладких векторных полей $U_\alpha \in \Phi_\alpha$, и заключение теоремы следует из предложения 4, с. 37 из [1]. □

Так как старший целочисленный класс Штифеля–Уитни ориентированного четномерного многообразия совпадает с эйлеровым классом, то следствие 1 очевидно, а следствие 2 является комбинацией теорем Б и В.

Доказательство теоремы Г. Обозначим через $\kappa = \kappa_1$, где κ_1 совпадает с фигурирующим в теореме А. Из знаконеопределенности кривизны следует, что $k \neq \kappa$ в каждой точке. Поэтому многообразие имеет строго общую структуру кривизны, и, по леммам 2, 3, Ψ и Φ_1 — гладкие распределения размерностей $2m-1$ и 1, а k и κ — гладкие функции на многообразии, в частности (см. также следствие 1) эйлерова характеристика многообразия нулевая. Из знаконеопределенности кривизны в каждой точке следует, что если в некоторой точке многообразия $k-\kappa<0$ (или >0), тогда всюду на многообразии выполняется это неравенство. Ибо в противном случае из связности многообразия и гладкости функций k и κ (пункт 3) леммы 3 из [5]) нашлась бы точка многообразия, где выполняется равенство $k=\kappa$, а это противоречит знаконеопределенности кривизны. Так как k и κ не могут быть одного знака ни в одной точке, то полученные неравенства показывают, что если хотя бы в одной точке k неположительно (неотрицательно), то оно всюду является таковым. Формула для эйлерова класса по лемме 1, а) имеет следующий вид:

$$e_M = (2\pi)^{-m}(2m-1)!!\,k^{m-1}\kappa\omega.$$

Поэтому коэффициент пропорциональности класса Эйлера и формы объема во всех точках, где k и κ одновременно ненулевые, имеет один и тот же знак, равный знаку k^m. Таким образом, если имеется хотя бы одна точка, где k и κ одновременно не равны нулю, то характеристика Эйлера, вычисленная по формуле Гаусса–Бонне, также не равна нулю, а это противоречит следствию 1, по которому характеристика Эйлера $\chi_M = 0$. Так как многообразие связное и имеет знаконеопределенную кривизну, т. е. одновременно в точке не может выполняться $k = \kappa = 0$, то всюду либо $k = 0$, либо $\kappa = 0$.

По теореме 1 из [5] M локально является скрещенным произведением кривой на вещественную пространственную форму вида, как в первой формуле из (12). Пусть U — единичное векторное поле, в каждой точке принадлежащее прямой Φ_1 из той же теоремы. Объединяя равенства (14), (16) из [5], для кривизны k получаем следующее дифференциальное уравнение, глобально определенное на M:

$$Uk + 2f(k - \kappa) = 0,\ f = \langle \nabla_U X, X \rangle / \|X\|^2, \tag{14}$$

где X — любое векторное поле из распределения Ψ, а f — не зависящая от X, т. е. корректно определенная на M, гладкая функция. Необходимо отметить, что для градиента скрещивающей функции, определенной локально, выполняется равенство $\|\mathrm{gr}\,\varphi\| / \varphi = f$. Равенства (1)–(3) из [5] приводят к выражению для кривизны в смешанных двумерных направлениях $\kappa = -U\|\mathrm{gr}\,\varphi\| / \varphi$. Сравнивая два последних равенства, заключаем, что для функции f имеется дифференциальное уравнение на многообразии M

$$Uf + f^2 + \kappa = 0. \tag{15}$$

Покажем, что $f \equiv 0$. Для этого рассмотрим по отдельности два случая. Первый случай, если $k = 0$ и $\kappa \neq 0$; тогда из уравнения (14) следует, что $f \equiv 0$. Второй случай, $\kappa = 0$, а $k \neq 0$ всюду. Тогда дифференциальное уравнение (15) принимает такой вид: $Uf + f^2 = 0$. А так как на компакте, ввиду полноты каждого векторного поля и ограниченности гладких функций, такое уравнение допускает лишь нулевое решение, то и во втором случае $f \equiv 0$. Это, благодаря приведенному выше локальному равенству для скрещивающей функции, означает, что градиент скрещивающей функции есть нуль, а сама она — постоянная. □

Автор с благодарностью отмечает полезные замечания, высказанные профессором А. А. Борисенко, по уточнению формулировки леммы 2.

Список литературы

1. *С. И. Окрут*, Структура кривизны риманова многообразия с аксиомой гиперплоскостей. — Мат. физика, анализ, геометрия (1994), т. 1, № 2, с. 227–231.
2. *D. Van Lindt and L. Verstraelen*, A survey on axioms of submanifolds in Riemannian and Kaehlerian geometry.— Colloq. math. (1987), v. 54, No 2, p. 193–213.
3. *Дж. Милнор, Дж. Сташеф*, Характеристические классы. Мир, Москва (1979), 371 с.
4. *Четырехмерная риманова геометрия*. Мир, Москва (1985), 334 с.
5. *С. И. Окрут*, Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей.— Укр. геом. сб. (1992), вып. 35, с. 103–110.

The Euler characteristic of manifolds with axiom of hyperplanes

S. I. Okrut

Axiom of l-hyperplanes is the generalization of the Cartan axiom of planes and class of Riemannian manifolds satisfying one is the prolongation of space form. The problem on defining whether the Euler characteristic is of fixed sign (positive or negative) is solved for compact manifolds with axiom of l-hyperplanes at enough great l. These Euler classes are computed explicity. Under assumption general situation for a structure curvature then great Stiefel–Whitney's class are zero. If a sign of curvature manifold M^{2m} with axiom of $(2m-2)$ hyperplanes is not definite, then M is locally isometric to a direct product of a straight line and a nonflat space form.

Ейлерова характеристика многовидів з аксіомою гіперплощин

С. І. Окрут

Аксіома l-гіперплощин є узагальненням аксіоми площин Картана, і клас ріманових многовидів, їй задовольняючих, є поширенням класу просторових форм. Для компактних многовидів з аксіомою l-гіперплощин при достатньо великих l розв'язана задача знаковизначення ейлерова класу по знаку кривини многовиду. При цьому ейлерові класи обчислені явно. В припущенні , що структура кривини має загальне положення, старші класи Штіфеля–Уітні нульові. Якщо кривина многовиду M^{2m} з аксіомою $(2m-2)$-гіперплощин знаконевизначена у кожній точці , то M локально ізометрично прямому здобутку прямої на неплоску просторову форму.