Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 423-445

О степенных рядах с удовлетворяющими специальному условию производными Гельфонда–Леонтьева

М.Н. Шеремета

Львовский государственный университет, Украина, 290602, г. Львов, ул. Университетская, 1

Статья поступила в редакцию 13 июня 1994 года

Найдены необходимые и достаточные условия на функцию l и возрастающую последовательность (n_p) неотрицательных чисел для того, чтобы функция f была целой, как только для любого $p \in \mathbf{Z}_+$ производная Гельфонда–Леонтьева $D_l^{n_p} f$ принадлежит классу $A_\lambda(0)$, где $A_\lambda(0)$ — класс функций $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (z^k)$ таких, что $|g_k| \le \lambda_k |g_1|$ $(k \ge 1)$, а $\lambda = (\lambda_k)$ — последовательность положительных чисел.

1. Введение и формулировки основных результатов

Для последовательности $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ комплексных чисел положим $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ и для $0 < R \le +\infty$ через $A(R)$ обозначим класс таких функций f, аналитических в круге $\{z : |z| < R\}$. Запись $f \in A(0)$ в дальнейшем означает, что либо $f \in A(R)$ при некотором $R > 0$, либо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ сходится лишь в точке $z = 0$. Другими словами, $A(0)$ — класс формальных степенных рядов. Ясно, что $A(R_2) \subset A(R_1)$ для всех $0 \le R_1 \le R_2 \le +\infty$. Скажем, что $f \in A^+(R)$, $0 \le R \le +\infty$, если $f \in A(R)$ и $f_k > 0$ для всех $k \in \mathbf{Z}_+$. Для функций $f \in A(0)$ и $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальный степенной ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{1.1}$$

будем называть n-й производной Гельфонда–Леонтьева (см. [1]). Если $l(z) = \exp(z)$, т.е. $l_k = 1/k!$, $k \in \mathbf{Z}_+$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ — обычная n-я производная функции f. Будем считать $l_0 = 1$.

Известно [2], что если функция $f \in A(1)$ и все ее производные $f^{(n)}$ однолистны в круге $\mathbb{U} = \{ z : | z | < 1 \}$, то $f \in A(\infty)$, т.е. f допускает аналитическое продолжение до целой функции, причем такая целая функция f имеет экспоненциальный тип [2]. В [3] доказано, что если (n_p) — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел ($n_0 = 0$) такая, что $n_{p+1} - n_p = o(\ln n_p)$, $p \to \infty$, и все $f^{(n_p)}$ однолистны в $\mathbb{U}$, то $f \in A(\infty)$.

Исследования С. Шаха и С. Тримбла продолжены в [4]. Чтобы сформулировать результаты из [4], через Λ обозначим класс положительных числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_k)$ и будем говорить, что $f \in A_\lambda(1)$, если $f \in A(1)$ и $| f_k | \le \lambda_k | f_1 |$ для всех $k \in \mathbf{N}$ (считаем $\lambda_1 \ge 1$). В частности, если $\lambda_k = k$ для всех $k \in \mathbf{N}$, то классу $A_\lambda(1)$ по доказанной в [5] гипотезе Бибербаха принадлежат все однолистные в $\mathbb{U}$ функции. В [4] показано, для того чтобы для любых последовательности $\lambda \in \Lambda$ и функции $f \in A(1)$ из выполнения для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы $\overline{\lim\limits_{p \to \infty}}(n_{p+1} - n_p) < \infty$, и необходимо, чтобы $\underline{\lim\limits_{p \to \infty}}(n_{p+1} - n_p) < \infty$.

Заметим, что если $f \in A(R)$ при некотором $R > 0$, то и $f^{(n)} \in A(R)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Для производных Гельфонда–Леонтьева такое утверждение, вообще говоря, не верно. Более того, для любой функции $f \in A^+(\infty)$ существует функция $l \in A^+(\infty)$ такая, что $D_l^n f \notin A(r)$ при любых $r > 0$ и $n \in \mathbf{N}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно выбрать возрастающую последовательность (α_k) такую, что $\alpha_k \ge \max\{ k \ln k, 2\ln(1/f_k)\}$, $k \in \mathbf{N}$, и положить $l_k = \exp\{-k\alpha_k\}$. Тогда

$$\sqrt[k]{\frac{l_k f_{k+n}}{l_{k+n}}} = \exp\left\{\alpha_{k+n} - \alpha_k + \frac{1}{k}\left(n\alpha_{k+n} - \ln\frac{1}{f_{k+n}}\right)\right\} \ge$$

$$\ge \exp\left\{\frac{1}{k}\left(\alpha_{k+n} - \ln\frac{1}{f_{k+n}}\right)\right\} \ge \exp\left\{\frac{1}{2k}\alpha_{k+n}\right\} \to +\infty \ (k \to \infty),$$

т.е. $D_l^n f \notin A(r)$ для любых $r > 0$ и $n \in \mathbf{N}$.

Это замечание показывает, что вместо $A_\lambda(1)$ нам удобнее рассматривать класс $A_\lambda(0)$ функций $f \in A(0)$ таких, что $|f_k| \le \lambda_k |f_1|$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Ясно, что $A_\lambda(1) \subset A_\lambda(0)$. Следующая теорема является усилением приведенного выше результата из [2].

Теорема 1. *Пусть $l \in A^+(0)$. Для того чтобы для любых последовательности $\lambda \in \Lambda$ и функции $f \in A(0)$ из выполнения для всех $n \in \mathbf{Z}_+$ условия $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $l \in A^+(\infty)$, т.е.*

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{l_k} = 0. \tag{1.2}$$

Всюду далее N — класс возрастающих последовательностей (n_p) целых неотрицательных чисел $(n_0 = 0)$. Следующая теорема является более сильным результатом для производных Гельфонда–Леонтьева, чем соответствующее утверждение из [4] для обычных производных.

Теорема 2. *Пусть $(n_p) \in N$. Для того чтобы для любых последовательности $\lambda \in \Lambda$ и функций $f \in A(0)$ и $l \in A^+(\infty)$ из выполнения для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ условия $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{p \to \infty} (n_{p+1} - n_p) < \infty. \tag{1.3}$$

Пусть Λ^* — класс последовательностей $\lambda \in \Lambda$ таких, что $\ln \lambda_k \le ak$ для всех $k \in \mathbf{N}$ и некоторого $a \in [0, +\infty)$. В [4] доказано, что если $\lambda \in \Lambda^*$, $(n_p) \in N$,

$$\lim_{p \to \infty} \left\{ \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}) \right\} = +\infty \tag{1.4}$$

и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, то $f \in A(\infty)$. Здесь докажем более сильную теорему, имеющую критериальный характер.

Теорема 3. *Пусть $(n_p) \in N$, а функция $l \in A^+(\infty)$ такая, что последовательность $(l_k^2 / l_{k-1} l_{k+1})$ невозрастающая. Для того чтобы для любых последова-*

тельности $\lambda \in \Lambda^*$ ***и функции*** $f \in A(0)$ ***из выполнения для всех*** $p \in \mathbf{Z}_+$ ***условия*** $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ ***вытекало, что*** $f \in A(\infty)$***, необходимо и достаточно, чтобы***

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{n_p + 1} \left\{ \ln \frac{1}{l_{n_p + 1}} - \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{l_{n_j - n_{j-1} + 1}} \right\} = +\infty. \tag{1.5}$$

Условие невозрастания последовательности $(l_k^2/l_{k-1}\, l_{k+1})$ в теореме 3, вообще говоря, опустить нельзя. Фактически, существуют последовательности $(n_p) \in N$, $\lambda \in \Lambda^*$ и функции $l \in A^+(\infty)$, $f \notin A(\infty)$ такие, что последовательность $(l_k^2/l_{k-1}\, l_{k+1})$ не является невозрастающей, условие (1.5) выполняется и $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$.

Естественным является вопрос, какой должна быть функция $l \in A^+(\infty)$, для того чтобы для любых последовательностей $\lambda \in \Lambda^*$ и $(n_p) \in N$ из выполнения для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ условия $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$. Мы будем предполагать невозрастание последовательности $(l_k^2/l_{k-1}\, l_{k+1})$, а отсюда, как будет показано в разд. 3, следует, что последовательность $\omega_k = \frac{1}{k+1} \ln \frac{1}{l_{k+1}} - \frac{1}{k} \ln \frac{1}{l_k}$ положительная и невозрастающая, т.е. существует предел $\lim_{k \to \infty} \omega_k = \omega$.

Теорема 4. *Пусть функция $l \in A^+(\infty)$ такая, что последовательность $(l_k^2/l_{k-1}\, l_{k+1})$ невозрастающая. Для того чтобы для любых последовательностей $(n_p) \in N$, $\lambda \in \Lambda^*$ и функции $f \in A(0)$ из выполнения для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ условия $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega > 0$.*

Следующая теорема показывает, что при определенных условиях на функцию $l \in A^+(\infty)$ достаточно одного значения $n \in \mathrm{N}$, для того чтобы из соотношения $D_l^n f \in A(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$.

Теорема 5. *Пусть $l \in A^+(\infty)$. Для того чтобы для любых числа $n^0 \in \mathrm{N}$, последовательности $\lambda \in \Lambda^*$ и функции $f \in A(0)$ из условия $D_l^{n^0} f \in A_\lambda(0)$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{l_k / l_{k+1}} = \infty. \tag{1.6}$$

Отметим, что условие (1.6) выполняется, если $\omega_k \to +\infty \quad (k \to +\infty)$, где, как выше, $\omega_k = \frac{1}{k+1} \ln \frac{1}{l_{k+1}} - \frac{1}{k} \ln \frac{1}{l_k}$. Простейшим примером последовательности (l_k), для которой $\omega_k \searrow \omega > 0 \ (k \to \infty)$, является последовательность $l_k = \exp\{-\omega k^2\}$, а условию (1.6) удовлетворяет, например, последовательность $l_k = \exp\{-\beta(k)k^2\}$, где $0 < \beta(x) \nearrow +\infty \ (x \to +\infty)$.

В заключение заметим, что целые функции, речь о которых идет в теоремах, приведенных выше, обладают определенной скоростью роста. Некоторые результаты такого типа в терминах порядка роста будут получены в разд. 4.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Начнем с теоремы 1. Предположим, что $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$, выполнено условие (1.2) и $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всех $n \in \mathbf{Z}_+$, т.е.

$$\frac{l_k \,|\, f_{k+n} \,|}{l_{k+n}} \le \lambda_k \frac{l_1 \,|\, f_{1+n} \,|}{l_{1+n}} \tag{2.1}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$ и $n \in \mathbf{Z}_+$. При $k = 2$ из (2.1) следует, что

$$|\, f_{n+2} \,| \le \lambda_2 \frac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}} |\, f_{n+1} \,| \le \left(\lambda_2 \frac{l_1}{l_2}\right)^2 \frac{l_{n+2}}{l_n} |\, f_n \,| \le$$

$$\le \ldots \le \left(\lambda_2 \frac{l_1}{l_2}\right)^{n+2} \frac{l_{n+2}}{l_1} |\, f_1 \,|, \tag{2.2}$$

т.е.

$$\sqrt[n]{|\, f_n \,|} \le \big(1 + o(1)\big)\lambda_2 \frac{l_1}{l_2} \sqrt[n]{l_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

и, значит, $f \in A(\infty)$.

Наоборот, если условие (1.2) не выполняется, т.е.

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{l_k} = 1/r_* > 0, \quad r \le r_* < +\infty,$$

то положим $f_k = l_k r_*^k$ и $\lambda_k = (l_k/l_1)\, r_*^{k-1}$. Для функции f с такими коэффициентами f_k имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{f_k} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{l_k f_{k+n}}{l_{k+n}}} = 1$$

и

$$\frac{l_k f_{k+n}}{l_{k+n}} = \lambda_k \frac{l_1 f_{1+n}}{l_{1+n}},$$

так что $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(1)$, $D_l^n f \in A_\lambda(1) \subset A_\lambda(0)$ для всех $n \in \mathbf{Z}_+$, но $f \notin A(\infty)$. Теорема 1 доказана.

Прежде чем доказывать теорему 2, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если* $\lambda \in \Lambda$, $(n_p) \in N$ *и* $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ *для всех* $p \in \mathbf{Z}_+$, *то*

$$|f_{k+n_p}| \le |f_1|\, l_1^p\, l_{k+n_p} \frac{\lambda_k}{l_k} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j - n_{j-1}+1}}{l_{n_j - n_{j-1}+1}} \tag{2.3}$$

для всех $p \in \mathrm{N}$ *и* $k = 1, 2, \ldots, n_{p+1} - n_p + 1$.

Действительно, так как $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$, то имеет место неравенство (2.1) с $n = n_p$, т.е.

$$|f_{k+n_p}| \le \lambda_k \frac{l_{k+n_p}}{l_{1+n_p}} \frac{l_1}{l_k} |f_{1+n_p}| \tag{2.4}$$

для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и $k \in \mathrm{N}$. Выберем здесь $k = n_{p+1} - n_p + 1$. Тогда

$$|f_{n_{p+1}+1}| \le \lambda_{n_{p+1} - n_p + 1} \frac{l_{n_{p+1}+1}}{l_{n_{p+1}}} \frac{l_1}{l_{n_{p+1}-n_p+1}} |f_{n_p+1}|,$$

откуда легко следует, что

$$|f_{n_{p+1}+1}| \le |f_1|\, l_1^{p-1}\, l_{n_p+1} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j - n_{j-1}+1}}{l_{n_j - n_{j-1}+1}}. \tag{2.5}$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) вытекает неравенство (2.3).

Перейдем к доказательству теоремы 2. Если условие (1.3) выполняется, т.е. $n_{p+1} - n_p \le m < \infty$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, то для всех k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1 \le m + 1$, имеем

$$\frac{\lambda_k}{l_k} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}}{l_{n_j - n_{j-1} + 1}} \le \left(\max \left\{ \frac{\lambda_s}{l_s} : 1 \le s \le m + 1 \right\} \right)^{p+1} = K^{p+1}.$$

Поэтому из неравенства (2.3) следует, что

$$\frac{1}{k + n_p} \ln \frac{1}{|f_{k+n_p}|} \ge \frac{1}{k + n_p} \ln \frac{1}{l_{k+n_p}} - \frac{p \ln l_1 + \ln |f_1| + (p+1) \ln K}{k + n_p} =$$

$$= \frac{1}{k + n_p} \ln \frac{1}{l_{k+n_p}} + O(1),\ p \to \infty.$$

Так как $l \in A^+(\infty)$, то отсюда следует, что $f \in A^+(\infty)$, и, значит, достаточность условия (1.3) доказана.

Докажем его необходимость, т.е. покажем, что если условие (1.3) не выполняется, то существуют последовательность $\lambda \in \Lambda$ и функции $l \in A^+(\infty)$ и $f \in A(1) \setminus A(\infty)$ такие, что $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$. Невыполнение условия (1.3) означает, что существует последовательность (p_j) такая, что $n_{p_j+1} - n_{p_j} \to +\infty$ при $j \to \infty$. Выберем из последовательности $(n_{p_j+1} - n_{p_j})$ возрастающую подпоследовательность и обозначим ее тем же символом $(n_{p_j+1} - n_{p_j})$. Можем считать также, что $n_{p_1} \ge 1$. Обозначим $k_j = n_{p_j}$ и $m_j = n_{p_j+1}$ для $j \in \mathbf{N}$ и $m_0 = 0$. Тогда $m_j - k_j \uparrow +\infty$ $(j \to \infty)$.

Положим $f_n = 1$ при $m_j + 1 \le n \le k_{j+1} + 1$ $(j \in \mathbf{Z}_+)$ и $f_n = 0$ при $k_j + 1 < n < m_j + 1$ $(j \in \mathbf{N})$. Рассмотрим функцию f с такими коэффициентами f_n. Очевидно, что $f \in A(1)$, но $f \notin A(\infty)$. Таким образом, нужно показать, что существуют последовательность $\lambda \in \Lambda$ и функция $l \in A^+(\infty)$ такие, что $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всех n, $m_j \le n \le k_{j+1}$ $(j \in \mathbf{Z}_+)$, и этим самым покажем, что для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ выполняется $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$. Условие $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всех n, $m_j \le n \le k_{j+1}$ $(j \in \mathbf{Z}_+)$ означает, что

$$\frac{l_k f_{k+n}}{l_{k+n}} \le \lambda_k \frac{l_1}{l_{1+n}}$$

для всех n, $m_j \le n \le k_{j+1}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$) и всех $k \in \mathbf{N}$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$f_{k+n} \frac{l_{n+1}}{l_{n+k}} \le \lambda_k \frac{l_1}{l_k}. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\beta_k = \sup \left\{ \frac{l_{n+1}}{l_{n+k}} : m_j \le n \le k_{j+1} \ (j \in \mathbf{Z}_+) \right\}.$$

Если $\beta_k < \infty$ для любого $k \in \mathbf{N}$, то, полагая $\lambda_k = \beta_k l_k / l_1$ и учитывая неравенство $f_{k+n} \le 1$, приходим к неравенству (2.6).

Таким образом, осталось построить функцию $l \in A^+(\infty)$ такую, что $\beta_k < \infty$ для любого $k \in \mathbf{N}$. С этой целью положим $\alpha(x) \equiv 1$ при $m_0 \le x \le m_1 - 1$,

$$\alpha(m_j) = \frac{1}{m_j} \left\{ (m_{j+1} - 1)(\alpha(m_j - 1) + 1) - (m_{j+1} - m_j + 1) \right\}$$

для всех $j \in \mathbf{N}$ и

$$\alpha(x) = \frac{1}{x} \left\{ m_j \alpha(m_j) + x - m_j \right\}$$

при $m_j \le x \le m_{j+1} - 1$, так что числа $\alpha(n)$ определены для всех $n \in \mathbf{N}$ и

$$\alpha(m_j - 1) = \frac{1}{m_j - 1} \left\{ m_{j-1} \alpha(m_{j-1}) + m_j - m_{j-1} + 1 \right\}, j \in \mathbf{N}.$$

Предположим, что $\alpha(m_{j-1}) \ge 1$. Тогда $\alpha(m_j - 1) \ge 1$ и $\alpha(m_j) \ge \dfrac{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j} \ge 1$. Так как $\alpha(m_0) = 1$, то отсюда вытекает, что $\alpha(m_j) \ge 1$ для всех $j \in \mathbf{Z}_+$. Но $\alpha'(x) = = -\dfrac{1}{x^2} m_j (\alpha(m_j) - 1)$ на $(m_j, m_{j+1} - 1)$. Поэтому для всех n, $m_j \le n \le m_{j+1} - 1$, имеем $\alpha(n) \ge \alpha(m_{j+1} - 1)$, и так как $\alpha(m_{j+1} - 1) = \alpha(m_j - 1) + 1$, то $\alpha_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Положим теперь $l_n = \exp\{ -n \alpha(n) \}$. Тогда $l \in A^+(\infty)$, и осталось показать, что $\beta_k < \infty$ для любого $k \in \mathbf{N}$.

Для любого $k \in \mathbf{N}$ пусть $j_0 = j_0(k)$ такое, что $k_{j+1} + k \le m_{j+1} - 1$ для всех $j \ge j_0$ (поскольку $m_j - k_j \uparrow +\infty$ $(j \to \infty)$, то такое j_0 существует). Если теперь $m_j \le n \le k_{j+1}$ и $j \ge j_0$, то $m_j \le n + k \le m_{j+1} - 1$. Поэтому при $m_j \le n \le k_{j+1}$ и $j \ge j_0(k)$ имеем

$$\frac{l_{1+n}}{l_{k+n}} = \exp\left\{(k+n)\,\alpha(k+n) - (n+1)\,\alpha(n+1)\right\} = \exp\left\{(k-1)\,\frac{d}{dx}\,(x\alpha(x))\,|_{x=\xi}\right\},$$

где $\xi \in (n+1, n+k) \subset [m_j m_{j+1} - 1]$. Но $(x\alpha(x))' \equiv 1$ на $(m_j, m_{j+1} - 1)$. Поэтому $l_{n+1}/l_{n+k} \le \exp\{k-1\}$ при $m_j \le n \le k_{j+1}$ и $j \ge j_0$ и, значит,

$$\beta_k \le \max\left\{\exp(k-1), \max\left\{\frac{l_{n+1}}{l_{n+k}} : 0 \le n \le k_{j_0(k)}\right\}\right\} < +\infty.$$

Теорема 2 полностью доказана.

3. Доказательства теорем 3 и 4

Нам будут необходимы следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\kappa_k = l_k^2 / l_{k-1}\, l_{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$,

$$A_p = (p-1)\ln l_1 - \sum_{j=1}^{p} \ln l_{n_j - n_{j-1} + 1}, \; p \in \mathbf{N},$$

и

$$\gamma_k = \gamma_{k,p} = \frac{1}{n_p + k}\left\{\ln l_{n_p + k} - \ln l_k + \ln l_1 + A_p\right\}.$$

Тогда, если последовательность (κ_k) *невозрастающая, то*

$$\max\{\gamma_k : 1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1\} = \max\{\gamma_1, \gamma_{n_{p+1} - n_p + 1}\}. \qquad (3.1)$$

Действительно, нетрудно видеть, что для всех k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$, имеет место равенство

$$\gamma_k - \gamma_{k-1} = \delta_k / (n_p + k)(n_p + k - 1), \qquad (3.2)$$

где

$$\delta_k = (k+n_p-1)(\ln l_{k+n_p} - \ln l_k) -$$
$$-(k+n_p)(\ln l_{k+n_p-1} - \ln l_{k-1}) - \ln l_1 - A_p .$$

Так как последовательность (κ_k) невозрастающая, то для всех k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$, имеем

$$\delta_{k+1} - \delta_k = (k+n_p)(\ln \kappa_k - \ln \kappa_{k+n_p}) \ge 0,$$

т.е. последовательность (δ_k) неубывающая. Если все $\delta_k \ge 0$, то, в силу (3.2), $\gamma_k \ge \gamma_{k-1}$ для всех k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$, и, значит, $\max \{ \gamma_k : 1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1 \} = \gamma_{n_{p+1} - n_p + 1}$. Если все $\delta_k \le 0$, то аналогично имеем $\max \{ \gamma_k : 1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1 \} = \gamma_1$. Наконец, если среди δ_k имеются отрицательные и положительные члены, то существует k_0, $1 < k_0 \le n_{p+1} - n_p + 1$, такое, что $\delta_1 \le \ldots \le \delta_{k_0 - 1} < 0 \le \delta_{k_0} \le \ldots \le \delta_{n_{p+1} - n_p + 1}$. Поэтому при $1 \le k \le k_0 - 1$ имеем $\gamma_{k_0 - 1} < \gamma_{k_0 - 2} < \ldots < \gamma_1$, а при $k_0 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$ выполняются неравенства $\gamma_{n_{p+1} - n_p + 1} \ge \gamma_{n_{p+1} - n_p} \ge \ldots \ge \gamma_{k_0} \ge \gamma_{k_0 - 1}$. Отсюда вытекает неравенство (3.1). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $l \in A^+(\infty)$, $\kappa_k = l_k^2 / l_{k-1} l_{k+1}$, $\eta_k = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{l_k}$ *и* $\omega_k = \eta_{k+1} - \eta_k$. *Тогда, если последовательность* (κ_k) *невозрастающая, то* $\eta_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$, *последовательность* (ω_k) *невозрастающая и* $\eta_k \le bk$ $(k \in \mathbb{N})$ *при некотором* $b \in (0, +\infty)$.

Действительно, обозначим $\kappa = \lim\limits_{k \to \infty} \kappa_k$ и предположим, что $\kappa < 1$. Тогда для q, $\kappa < q < 1$, и всех $k \ge k_0(q)$ имеем $l_k^2 / l_{k-1} l_{k+1} \le q$, т.е.

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} \le q \frac{l_{k-1}}{l_k} \le q^2 \frac{l_{k-2}}{l_{k-1}} \le \ldots \le C_1 q^k,$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от q. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{l_{k+1}} \le C_1 q^k \frac{1}{l_k} \le C_1^2 q^k q^{k-1} \frac{1}{l_{k-1}} \le \ldots \le C_2^k q^{k(k+1)/2},$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от q. Поэтому $\sqrt[k]{l_k} \to +\infty$ $(k \to \infty)$, т.е. $l \notin A^+(\infty)$, что невозможно.

Таким образом, $\kappa \ge 1$ и $\kappa_k \ge 1$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Покажем, что $\kappa_k > 1$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Действительно, если бы $\kappa_k = 1$ при $k \ge k_1$, то, поскольку $l_k / l_{k+1} = \prod_{j=1}^{k} \kappa_j$, имели бы $l_{k+1} = l_k / \prod_{j=1}^{k_1} \kappa_j = C l_k$ для всех $k \ge k_1$, т.е. $l \notin A^+(\infty)$, что невозможно.

Из равенства $l_k / l_{k+1} = \prod_{j=1}^{k} \kappa_j$ также следует, что

$$\ln \frac{1}{l_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} \ln \kappa_j + \ln \frac{1}{l_k} = \ldots =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \ln \kappa_j + \sum_{j=1}^{k-1} \ln \kappa_j + \ldots + \sum_{j=1}^{2} \ln \kappa_j + \ln \kappa_1 = \sum_{j=1}^{k} (k+1-j) \ln \kappa_j .$$

Так как $\ln \kappa_j > 0$ $(j \in \mathbf{N})$, то отсюда следует, что

$$\eta_{k+1} - \eta_k = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{k+1}\right) \ln \kappa_j - \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) \ln \kappa_j =$$

$$= \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) \ln \kappa_k + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) j \ln \kappa_j = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} j \ln \kappa_j > 0, \qquad (3.3)$$

т.е. последовательность (η_k) возрастающая, а поскольку $l \in A^+(\infty)$, то она возрастает к $+\infty$.

Далее, из (3.3) имеем

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=1}^{k+1} j \ln \kappa_j - \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} j \ln \kappa_j =$$

$$= \frac{k(k+1) \ln \kappa_{k+1} - 2 \sum_{j=1}^{k} j \ln \kappa_j}{k(k+1)(k+2)} \le \frac{\left\{k(k+1) - 2 \sum_{j=1}^{k} j\right\} \ln \kappa_{k+1}}{k(k+1)(k+2)} = 0,$$

т.е. последовательность (ω_k) невозрастающая и ограниченная. Отсюда следует, что $\eta_{k+1} - \eta_k \le b < +\infty$ для всех $k \in \mathbf{N}$, т.е. $\eta \le bk$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Лемма 3 полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Так как $\lambda \in \Lambda^*$, то для всех k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$, имеем

$$\ln\left\{\lambda_k \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}\right\} \le a\left(k + \sum_{j=1}^{p}(n_j - n_{j-1} + 1)\right) \le$$
$$\le a(k + n_p + p) \le 2a(k + n_p).$$

Поэтому из неравенства (2.3) следует, что

$$\frac{1}{k+n_p}\ln|f_{k+n_p}| \le \frac{1}{k+n_p}\Bigg\{\ln l_1 + \ln|f_1| + (p-1)\ln l_1 + \ln l_{k+n_p} -$$
$$- \ln l_k - \sum_{j=1}^{p} \ln l_{n_j - n_{j-1} + 1} + 2a(k+n_p)\Bigg\} \le$$
$$\le \frac{1}{k+n_p}\left\{\ln l_{k+n_p} - \ln l_k + \ln l_1 + A_p\right\} + a_1 = \gamma_{k,p} + a_1,$$

где a_1 — некоторая положительная постоянная. Отсюда, по лемме 2, имеем

$$\frac{1}{k+n_p}\ln|f_{k+n_p}| \le \max\{\gamma_1, \gamma_{n_{p+1} - n_p + 1}\} + a_1. \tag{3.4}$$

Но легко видеть, что

$$\gamma_1 = \frac{1}{n_p + 1}\left\{\ln l_{n_p+1} + (p-1)\ln l_1 - \sum_{j=1}^{p}\ln l_{n_j - n_{j-1} + 1}\right\}$$

и

$$\gamma_{n_{p+1} + n_p - 1} = \frac{1}{n_{p+1} + 1}\left\{\ln l_{n_{p+1}+1} + p\ln l_1 - \sum_{j=1}^{p+1}\ln l_{n_j - n_{j-1} + 1}\right\}.$$

Поэтому, в силу (1.5), из (3.4) следует, что

$$\frac{1}{n_p + k}\ln\frac{1}{|f_{n_p+k}|} \to +\infty \ (p \to \infty),$$

т.е. $f \in A(\infty)$, и достаточность условия (1.5) доказана.

Покажем теперь, что если условие (1.5) не выполняется, т.е.

$$\varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{n_p+1}\left\{\ln\frac{1}{l_{n_p+1}} - \sum_{j=1}^{p}\ln\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\right\} = K < \infty, \tag{3.5}$$

то существует последовательность $\lambda\in\Lambda^*$ и функция $f\notin A(\infty)$ такие, что $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всех $p\in\mathbf{Z}_+$. С этой целью рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(l_{n_p+1}\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\right) z^{n_p+1}. \tag{3.6}$$

Из условия (3.5) вытекает, что для этой функции

$$\varliminf_{p\to\infty}\frac{1}{n_p+1}\ln\frac{1}{|f_{n_p+1}|} = K < \infty,$$

т.е. $f\notin A(\infty)$. Покажем, что для функции (3.6) $D_l^{n_p} f\in A_\lambda(0)$ для всех $p\in\mathbf{Z}_+$ и некоторой последовательности $\lambda\in\Lambda^*$. Так как, в силу леммы 3, $bk \ge \eta_k = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{l_k}\uparrow +\infty$ $(k\to\infty)$, то для всех $p\in\mathbf{Z}_+$ и $s>p$ имеем

$$\sum_{j=p+1}^{s}\ln\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} = \sum_{j=p+1}^{s}(n_j-n_{j-1}+1)\frac{1}{n_j-n_{j-1}+1}\ln\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} \le$$

$$\le \sum_{j=p+1}^{s}(n_j-n_{j-1})\max\left\{\frac{1}{n_j-n_{j-1}+1}\ln\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} : p+1\le j\le s\right\} +$$

$$+\sum_{j=p+1}^{s}\frac{1}{n_j-n_{j-1}+1}\ln\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} \le (n_s-n_p)\frac{1}{\nu(s,p)}\ln\frac{1}{l_{\nu(s,p)}} +$$

$$+ b\sum_{j=p+1}^{s}(n_j-n_{j-1}+1) = (n_s-n_p)\left\{\frac{1}{\nu(s,p)}\ln\frac{1}{l_{\nu(s,p)}} + 2b\right\},$$

где

$$\nu(s,p) = \max\{n_j-n_{j-1}+1 : p+1\le j\le s\} \le n_s-n_p+1.$$

Поэтому

$$\ln l_{n_s - n_p + 1} - \sum_{j=p+1}^{s} \ln l_{n_j - n_{j-1} + 1} \le \ln l_{n_s - n_p + 1} -$$

$$- \frac{n_s - n_p}{n_s - n_p + 1} \ln l_{n_s - n_p + 1} + 2b(n_s - n_p) < 2b(n_s - n_p + 1) \tag{3.7}$$

для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и $s > p$.

Так как в ряде (3.6) $f_k = 0$, если $k \ne n_p + 1$, т.е. $f_{k + n_p} = 0$, если $k \ne n_s - n_p + 1$, то неравенство (2.4) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{l_{n_s - n_p + 1}}{l_1} \frac{l_{n_p + 1}}{l_{n_s + 1}} \frac{f_{n_s + 1}}{f_{n_p + 1}} \le \lambda_{n_s - n_p + 1}$$

для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и $s > p$. Это неравенство, в силу (3.6) и (3.7), выполняется для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и $s > p$, если выберем последовательность λ так, чтобы $\ln \lambda_k = 2bk/l_1$, и, значит, $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$. Теорема 3 полностью доказана.

Покажем, наконец, что условие невозрастания последовательности $(l_k^2 / l_{k-1} l_{k+1})$, вообще говоря, опустить нельзя. Для этого положим $n_0 = 0$, $n_p = 2^p$ $(p \in \mathrm{N})$, $\lambda_k = \exp\{2k\}$ $(k \in \mathrm{N})$, $l_k = \exp\{-k^2\}$ при $k = 2m + 1$ $(m \in \mathbf{Z}_+)$ и $l_k = \exp\left\{-\frac{4}{9}k^2\right\}$ при $k = 2m$. Ясно, что $\lambda \in \Lambda^*$, $l \in A^+(\infty)$, $n_{j+1} - n_j + 1 = n_j + 1$ $(j \in \mathrm{N})$ и

$$\frac{1}{n_p + 1}\left\{\ln \frac{1}{l_{n_p + 1}} - \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{l_{n_j - n_{j-1} + 1}}\right\} = \frac{1}{n_p + 1}\left\{\ln \frac{1}{l_{n_p + 1}} - \sum_{j=0}^{p-1} \ln \frac{1}{l_{n_j + 1}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^p + 1}\left\{(2^p + 1)^2 - \sum_{j=0}^{p-1} (2^j + 1)^2\right\} = \frac{1 + o(1)}{3} 2^p \to \infty \quad (p \to \infty),$$

т.е. выполнено условие (1.5).

Положим $f_{n_0} = 0$, $f_{n_0 + 1} = 1$, $f_{n_1} = 1$,

$$f_{n_p + 1} = l_{n_p + 1} \prod_{j=0}^{p-1} \frac{1}{l_{n_j + 1}} \ (p \ge 1), \quad f_{n_p} = \frac{l_{n_p}}{l_{n_{p-1}}} \prod_{j=0}^{p-2} \frac{1}{l_{n_j + 1}} \ (p \ge 2)$$

и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(f_{n_p} z^{n_p} + f_{n_p+1} z^{n_p+1} \right). \tag{3.8}$$

Тогда для всех $p \in \mathbf{N}$ и $s > p$ имеем

$$\frac{l_{n_s - n_p + 1}}{l_{n_s+1}} \frac{l_{n_p+1}}{l_1} \frac{f_{n_s+1}}{f_{n_p+1}} = \frac{l_{n_s - n_p + 1}}{l_1} \prod_{j=p}^{s-1} \frac{1}{l_{n_j+1}} =$$

$$= \exp\left\{ -(n_s - n_p + 1)^2 + 1 + \sum_{j=p}^{s-1} (n_j + 1)^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -(2^s - 2^p + 1)^2 + 1 + \sum_{j=p}^{s-1} (2^j + 1)^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{2}{3} 4^s - \frac{4}{3} 4^p + 2^{s+p+1} \right\} \exp\left\{ 2^s - 2^p + s - p \right\} \le$$

$$\le \exp\left\{ -\frac{2}{3} 4^{p+1} - \frac{4}{3} 4^p + 2^{2p+2} \right\} \exp\left\{ 2(2^s - 2^p) \right\} \le$$

$$\le \exp\left\{ 2(2^s - 2^p + 1) \right\} \le \lambda_{n_s - n_p + 1}. \tag{3.9}$$

Если же $p = 0$ и $s > p$, то

$$\frac{l_{n_s - n_p + 1}}{l_{n_s+1}} \frac{l_{n_p+1}}{l_1} \frac{f_{n_s+1}}{f_{n_p+1}} = f_{n_s+1} = l_{n_s+1} \prod_{j=0}^{s-1} \frac{1}{l_{n_j+1}} =$$

$$= \exp\left\{ -(2^s + 1)^2 + \sum_{j=0}^{s-1} (2^j + 1)^2 \right\} = \exp\left\{ -\frac{2}{3} 4^s - \frac{10}{3} + s \right\} < 1 \le \lambda_{n_s - n_p + 1},$$

т.е. снова приходим к неравенству (3.9).

Далее, для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ и $s \ge p + 2$ выполняется

$$\frac{l_{n_s - n_p}}{l_{n_s}} \frac{l_{n_p+1}}{l_1} \frac{f_{n_s}}{f_{n_p+1}} = \frac{l_{n_s - n_p}}{l_1 l_{n_{s-1}}} \prod_{j=p}^{s-2} \frac{1}{l_{n_j+1}} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{4}{9} (n_s - n_p)^2 + \frac{4}{9} n_{s-1}^2 + 1 + \sum_{j=p}^{s-2} (n_j + 1)^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{4}{9} (2^s - 2^p)^2 + \frac{4}{9} 2^{2s-2} + 1 + \sum_{j=p}^{s-2} (2^j + 1)^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{4}4^s + \frac{4}{9}2^{s+p+1} - \frac{7}{9}4^p\right\}\exp\left\{2^{s-1} - 2^p + s - p\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{1}{4}4^{p+2} + \frac{4}{9}2^{2p+3} - \frac{7}{9}4^p\right\}\exp\left\{2(2^s - 2^p)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{2(2^s - 2^p)\right\} = \lambda_{n_s - n_p}. \tag{3.10}$$

Наконец, при $p \in \mathbf{N}$ и $s = p + 1$ имеем

$$\frac{l_{n_s - n_p}}{l_{n_s}} \frac{l_{n_p + 1}}{l_1} \frac{f_{n_s}}{f_{n_p + 1}} = \frac{l_{n_{p+1} - n_p}}{l_1 l_{n_p}} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{4}{9}(n_{p+1}^2 - 2n_p n_{p+1}) + 1\right\} = e \le \lambda_{n_s - n_p},$$

а если $p = 0$ и $s = 1$, то

$$\frac{l_{n_s - n_p}}{l_{n_s}} \frac{l_{n_p + 1}}{l_1} \frac{f_{n_s}}{f_{n_p + 1}} = 1 \le \lambda_{n_s - n_p},$$

т.е. снова выполняется неравенство (3.10).

Так как $f_k = 0$, если $k \ne n_q$ $(q \in \mathbf{N})$ и $k \ne n_q + 1$ $(q \in \mathbf{Z}_+)$, а для $k = n_s - n_p$ и $k = n_s - n_p + 1$ $(s > p)$, в силу (3.9) и (3.10), выполняется неравенство (2.4) с $\lambda_k = \exp\{2k\}$, то для ряда (3.8) $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, и осталось показать, что $f \notin A(\infty)$. А это легко следует из соотношений

$$\frac{1}{n_p}\ln\frac{1}{f_{n_p}} = \frac{1}{n_p}\left\{\ln\frac{1}{l_{n_p}} - \ln\frac{1}{l_{n_{p-1}}} - \sum_{j=0}^{p-2}\ln\frac{1}{l_{n_j + 1}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^p}\left\{-\frac{1}{4}4^p + 4 + 2^{p-1} + p\right\} \to -\infty \ (p \to \infty).$$

Докажем, наконец, теорему 4. В силу леммы 3, $\frac{1}{k+1}\ln\frac{1}{l_{k+1}} - \frac{1}{k}\ln\frac{1}{l_k} = \omega_k \searrow \omega \ge 0$ $(k \to \infty)$, т.е.

$$l_k = \exp\left\{-k\left(\sum_{m=1}^{k-1}\omega_m - \ln l_1\right)\right\},$$

и, таким образом, условие (1.5) можно переписать в виде

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{n_p+1}\left\{(n_p+1)\left(\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m-\ln l_1\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1}+1)\left(\sum_{m=1}^{n_j-n_{j-1}+1}\omega_m-\ln l_1\right)\right\}=+\infty.$$

Последнее же соотношение равносильно, как нетрудно показать, соотношению

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m-\frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1})\sum_{m=1}^{n_j-n_{j-1}}\omega_m\right)=+\infty. \tag{3.11}$$

Если $\omega_k\searrow\omega>0$ $(k\to\infty)$, то

$$\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m-\frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j-n_{j-1})\sum_{m=1}^{n_j-n_{j-1}}\omega_m\geq$$

$$\geq\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m-\max\left\{\sum_{m=1}^{n_j-n_{j-1}}\omega_m:1\leq j\leq p\right\}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m-\sum_{m=1}^{n_{j(p)}-n_{j(p)-1}}\omega_m=\sum_{m=n_{j(p)}-n_{j(p)-1}}^{n_p}\omega_m\geq(n_p-n_{j(p)}+n_{j(p)-1})\,\omega, \tag{3.12}$$

где $1\leq j(p)\leq p$. Легко проверить, что $n_p-n_{j(p)}+n_{j(p)-1}\to+\infty$ при $p\to\infty$ для любой последовательности $(j(p))$. Поэтому из (3.12) вытекает (3.11) и, значит, (1.5), т.е., в силу теоремы 3, достаточность условия $\omega>0$ в теореме 4 доказана.

Пусть теперь $\omega_k\searrow 0$ $(k\to\infty)$. Тогда $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\omega_m\to 0$ $(k\to\infty)$. Положим $n_0=0$, $n_1=1$ и

$$n_{p+1}=\min\left\{k\geq n_p+1:\omega_{k-n_p}+\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\omega_m\leq\frac{1}{n_p}\right\},\ p\in\mathbf{N}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{n_p} \omega_m - \frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j - n_{j-1}) \sum_{m=1}^{n_j - n_{j-1}} \omega_m \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{n_p} \omega_m - \frac{1}{n_p}(n_p - n_{p-1}) \sum_{m=1}^{n_p - n_{p-1}} \omega_m =$$

$$= \sum_{m=n_p-n_{p-1}+1}^{n_p} \omega_m + \frac{n_{p-1}}{n_p} \sum_{m=1}^{n_p - n_{p-1}} \omega_m \le$$

$$\le n_{p-1}\left(\omega_{n_p - n_{p-1}} + \frac{1}{n_p}\sum_{m=1}^{n_p}\omega_m\right) \le 1,$$

т.е. условие (3.11) и, значит, условие (1.5) не выполняются, и, в силу теоремы 3, необходимость условия $\omega > 0$ в теореме 4 также доказана.

4. Доказательство теоремы 5, замечания и дополнения

1°. Пусть выполнено условие (1.6) и $D_l^{n^0} f \in A_\lambda(0), \lambda \in \Lambda^*$. Тогда

$$\frac{l_k}{l_{k+n^0}} \,|f_{k+n^0}| \le \lambda_k \frac{l_1}{l_{1+n^0}} \,|f_{1+n^0}|, k \in \mathrm{N},$$

и, следовательно,

$$\sqrt[k]{|f_{k+n^0}|} \le \sqrt[k]{\lambda_k \frac{l_{k+n^0}}{l_k} \frac{l_1}{l_{1+n^0}} |f_{1+n^0}|} \le A \sqrt[k]{\frac{l_{k+n^0}}{l_k}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

т.е. $f \in A(\infty)$, так что достаточность условия (1.6) в теореме 5 доказана.

Если же условие (1.6) не выполняется, т.е. $l_{k_j}/l_{k_j+1} \le p^{k_j}$ для некоторых числа $p \in (0, +\infty)$ и последовательности $(k_j) \uparrow \infty$, $j \to \infty$, то выберем число q так, чтобы $0 < q \le \min\{1, 1/p\}$, и положим $f_{k_j+1} = q^{k_j}$ $(j \in \mathrm{N})$, $f_2 = 1$ и $f_m = 0$ для всех $m \ne k_j + 1$. Тогда, если

$$\lambda_{k_j} = l_{k_j} l_2 q^{k_j} / l_1 l_{k_j+1}$$

и $\lambda_m = 1$ при $m \ne k_j$, то для $n^0 = 1$ и функции f с указанными выше коэффициентами f_k имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\lambda_k}=\max\left\{1,\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_j]{\lambda_{k_j}}\right\}=$$
$$=\max\left\{1,q\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_j]{l_{k_j}/l_{k_j+1}}\right\}=\max\{1,pq\}=1,$$

$$\frac{l_k}{l_{k+n^0}}f_{k+n^0}=\frac{l_k}{l_{k+1}}f_{k+1}=\begin{cases}\lambda_{k_j}\frac{l_1}{l_2}f_2, & k=k_j\ (j\in\mathbf{N}),\\ 0<\lambda_k\frac{l_1}{l_2}f_2, & k\neq k_j\ (j\in\mathbf{N}),\end{cases}$$

и

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{f_k}=\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_{j+1}]{f_{k_j+1}}=q\le 1,$$

т.е. $\lambda\in\Lambda^*$, $D_l^{n^0}f\in A_\lambda(0)$, но $f\notin A(\infty)$. Теорема 5 полностью доказана.

2°. Как было замечено в разд. 1, из того, что $f\in A(R)$ при некотором $R>0$, не всегда следует, что $D_l^nf\in A(R)$, $n\in\mathbf{N}$. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $n\in\mathbf{N}$, $0<R<+\infty$ *и* $l\in A^+(r)$ *для некоторого* $r>0$. *Для того чтобы* $D_l^nf\in A(R)$ *для каждой функции* $f\in A(R)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+n}}=1. \tag{4.1}$$

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+n}}\ge 1. \tag{4.2}$$

Действительно, если $\sqrt[k]{l_k/l_{k+n}}\le q<1$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$ и всех $k\ge k_0$, то

$$l_{k+n}\ge l_kq^{-k}\ge l_{k-n}q^{-k}q^{-k+n}\ge\ldots\ge l_{k-jn}q^{-k}q^{-k+n}\ldots q^{-k+jn},$$

где

$$j=j(k)=[(k-k_0)/n]\to+\infty\ (k\to\infty).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k+n}\ln l_{k+n} \geq \frac{1}{k+n}\left\{k(j+1) - \frac{j(j+1)}{2}n\right\}\ln\frac{1}{q} + O(1) =$$

$$= \frac{j+1}{k+n}\left\{\frac{1}{2}k + O(1)\right\}\ln\frac{1}{q} + O(1) = (1+o(1))\frac{k}{2n}\ln\frac{1}{q} \to +\infty \ (k \to \infty),$$

т.е. $l \notin A(r)$ для любого $r > 0$, что невозможно.

Допустим теперь, что условие (4.1) не выполняется, т.е., в силу (4.2), существуют число $p > 1$ и последовательность $(k_j) \uparrow \infty$, $j \to \infty$ такие, что $l_{k_j}/l_{k_j+n} \geq p^{k_j}$ $(j \in \mathbf{N})$. Тогда для функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z/R)^k$ имеем $f \in A(R)$, но $D_l^n f \notin A(R)$, ибо

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}} \geq \frac{1}{R}\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_j]{l_{k_j}/l_{k_j+n}} \geq \frac{p}{R} > \frac{1}{R}.$$

Необходимость условия (4.1) доказана.

Докажем достаточность. Так как $f \in A(R)$, то, в силу (4.1),

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}} \leq \frac{1}{R},$$

т.е. $D_l^n f \in A(R)$, и теорема 6 полностью доказана.

Отметим, что условие $l \in A^+(r)$ при некотором $r > 0$ можно в теореме 6 заменить условием $l \in A^+(0)$, но при этом условие (4.1), как видно из доказательства, следует заменить условием $\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+n}} \leq 1$.

3°. Из доказательства теоремы 1 видно, что условие $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ можно заменить условием $D_l^n f \in A_\lambda(1)$. Условие $l \in A^+(r)$ при некотором $r > 0$ используется лишь при доказательстве необходимости. Неясно, можно ли его заменить условием $l \in A^+(0)$.

4°. Для случая обычных производных имеет место следующий критерий.

Теорема 7. *Пусть* $(n_p) \in \mathbf{N}$. *Для того чтобы для любых последовательности* $\lambda \in \Lambda^*$ *и функции* $f \in A(1)$ *из выполнения для всех* $p \in \mathbf{Z}_+$ *условия* $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ *вытекало, что* $f \in A(\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение* (1.4).

Действительно, как было замечено в разд. 1, доказательство достаточности условия (1.4) получено в [4]. Далее, нетрудно видеть, что условию теоремы 3 удовлетворяет функция $l(z) = e^z$ (т.е. $l_k = 1/k!$), а в этом случае, как показано в [4], условия (1.4) и (1.5) эквивалентны. Поэтому в случае невыполнения условия (1.4), как видно из доказательства теоремы 3, существует функция (3.6), не являющаяся целой, но удовлетворяющая условию $f^{(n_p)} \in A_\lambda(0)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$. С другой стороны, выражение, стоящее в левой части соотношения (1.4), неотрицательно. Поэтому функция (3.6) в данном случае принадлежит классу $A(1)$ и, значит, $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$. Теорема 7 доказана.

5°. Наконец, заметим, что для целых функций f, производные Гельфонда–Леонтьева которых удовлетворяют условиям $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$, можно в той или иной шкале роста устанавливать скорость роста. Здесь остановимся лишь на случае, когда рост функции f характеризуется порядком

$$\rho_f = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}, \quad M(r, f) = \max \{ |f(z)| : |z| = r \}.$$

Теорема 8. *Пусть $l \in A^+(\infty)$, $\lambda \in \Lambda$ и целая функция f такая, что $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всех $n \in \mathbf{Z}_+$. Тогда*

$$\rho_f \le \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{-\ln l_n}. \tag{4.3}$$

В силу формулы Адамара, неравенство (4.3) легко следует из неравенства (2.2). В общем случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть функция $l \in A^+(\infty)$ такая, что последовательность $(l_k^2 / l_{k-1} l_{k+1})$ невозрастающая, а последовательность $(n_p) \in \mathbf{N}$ удовлетворяет условию (1.5) и $\ln n_{p+1} \sim \ln n_p$ $(p \to \infty)$. Если целая функция f удовлетворяет для всех $p \in \mathbf{Z}_+$ условию $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$, $\lambda \in \Lambda^*$, то*

$$\rho_f \le \varlimsup_{p \to \infty} \frac{n_p \ln n_p}{-\ln l_{n_p+1} + \sum\limits_{j=1}^{p} \ln l_{n_j - n_{j-1} + 1}}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Так как $\ln n_{p+1} \sim \ln n_p$ $(p \to \infty)$, то $\ln (n_p + k) \sim \ln n_p$ $(p \to \infty)$ для любого k, $1 \le k \le n_{p+1} - n_p + 1$. Поэтому из (3.4) имеем

$$\frac{1}{(k+n_p)\ln(k+n_p)} \ln \frac{1}{|f_{k+n_p}|} \ge - \frac{\max\{\gamma_1, \gamma_{n_{p+1}-n_p+1}\} + a_1}{\ln(k+n_p)} =$$

$$= -(1+o(1)) \max \left\{ \frac{\gamma_1}{\ln n_p}, \frac{\gamma_{n_{p+1}-n_p+1}}{\ln n_{p+1}} \right\} =$$

$$= (1+o(1)) \min \left\{ \frac{1}{n_q \ln n_q} \left(-\ln l_{n_q+1} + \sum_{j=1}^{q} \ln l_{n_j - n_{j-1}+1} \right) : q = p, p+1 \right\}$$

при $p \to \infty$. Отсюда, используя формулу Адамара, легко получаем неравенство (4.4).

Заметим, что неравенство (4.4) неулучшаемое. Действительно, в случае выполнения условия (1.5) функция (3.6) целая, а для этой функции в (4.4) достигается равенство.

Список литературы

1. *А.О. Гельфонд, А.Ф. Леонтьев*, Об одном обобщении ряда Фурье.— Мат. сб.(1951), т. 29, № 3, с. 477–500.
2. *S.M. Shah and S.Y. Trimble*, Univalent functions with univalent derivatives.— Bull. Am. Math. Soc. (1969), v. 75, p. 153–157.
3. *S.M. Shah and S.Y. Trimble*, Univalent functions with univalent derivatives. III.— J. Math. Mech. (1969/1970), v. 19, p. 451–460.
4. *А.А. Гольдберг, М.Н. Шеремета*, Об аналитическом продолжении на всю плоскость аналитических в единичном круге функций. В сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. (1993), вып. 58, с. 21–30.
5. *Louis de Branges*, A proof of the Bieberbach conjecture.— Acta Math. (1985), v. 154, p. 137–152.

On power serves with Gelfond–Leontev derivatives satisfying a special condition

M.N. Sheremeta

Necessary and sufficient conditions on a function l and an increasing sequence (n_p) of non-negative integers are found in order that f be an entire function whenever for all $p \in \mathbb{Z}_+$ the Gelfond–Leontev derivative $D_l^{n_p} f$ belongs to the class $A_\lambda(0)$, where the class $A_\lambda(0)$ consists of all functions $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (z^k)$ such that $|g_k| \le \lambda_k |g_1|$ $(k \ge 1)$ and $\lambda = (\lambda_k)$ is a sequence of positive numbers.

Про степеневі ряди з похідними Гельфонда–Леонт'єва, що задовольняють спеціальній умові

М.М. Шеремета

Знайдено необхідні і достатні умови на функцію l і зростаючу послідовність (n_p) невід'ємних чисел для того, щоб функція f була цілою, якщо тільки для кожного $p \in \mathbf{Z}_+$ похідна Гельфонда–Леонт'єва $D_l^{n_p} f$ належить до класу $A_\lambda(0)$, де $A_\lambda(0)$ — клас функцій $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (z^k)$ таких, що $|g_k| \le \lambda_k |g_1|$ $(k \ge 1)$, а $\lambda = (\lambda_k)$ — послідовність додатних чисел.