Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 1/2, с. 59–64

Обобщения теоремы Линделефа

В.И. Дискант

*Черкасский инженерно-технологический институт,
Украина, 257022, г. Черкассы, ул. Шевченко, 46*

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

В теореме Линделефа утверждается, что среди всех выпуклых многогранников равного объема, имеющих одинаковые направления граней, наименьшую площадь поверхности имеет многогранник, описанный около шара. В статье приведены обобщения теоремы Линделефа, принадлежащие А.Д. Александрову, Г. Хадвигеру и автору статьи. Доказана эквивалентность обобщений теоремы Линделефа, принадлежащих А.Д. Александрову и Г. Хадвигеру. Сформулировано и доказано обобщение теоремы Линделефа в n-мерном пространстве Минковского M^n $(n \geq 2)$.

В теореме Линделефа [1] утверждается, что среди выпуклых многогранников евклидова пространства R^n $(n \geq 2)$, имеющих равный объем и одни и те же направления граней, наименьшую площадь поверхности имеет многогранник, описанный около шара.

Теорема Линделефа получила обобщение в работах [2–4]. Для формулировки этих обобщений и результатов настоящей статьи приведем определения выпуклого тела с данной областью задания опорной функции, относительного форм-тела выпуклого тела в R^n и относительной площади поверхности выпуклого тела. Под выпуклым телом в R^n и в пространстве Минковского M^n $(n \geq 2)$ будем понимать замкнутое ограниченное выпуклое множество с внутренними точками. Будем считать, что начало координат $\bar{o}$ является внутренней точкой каждого выпуклого тела, рассматриваемого в работе.

Пусть на замкнутом, не лежащем ни в одной замкнутой полусфере множестве Ω' единичной сферы Ω пространства R^n задана непрерывная положительная функция $H^*(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega'$. Рассмотрим для каждого $\bar{u} \in \Omega'$ плоскость, ортогональную к $\bar{u}$ и отстоящую от начала координат на расстоянии $H^*(\bar{u})$ в направлении $\bar{u}$. Пересечение всех полупространств, ограниченных такими плоскостями и содержащими начало $\bar{o}$, определяет выпуклое тело H, которое А.Д. Александров [2] назвал выпуклым телом с данной областью Ω' задания опорной функции. Для тела H введем обозначение $H = (\Omega', H^*(\bar{u}))$.

Для любого выпуклого тела A в R^n существует, как показано в [4], минимальная область Ω_A такая, что $A = (\Omega_A, H_A^*(\bar{u}))$, где $H_A^*(\bar{u})$ – сужение опорной функции $H_A(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega$, тела A на Ω_A. При этом $\Omega_A = \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ – замыкание множества Φ, которое состоит из единичных нормалей к опорным плоскостям, проходящим через регулярные точки поверхности тела A (точка поверхности тела A называется регулярной, если через нее проходит ровно одна опорная плоскость тела A). Форм-телом выпуклого тела A относительно выпуклого тела B назовем тело $B_A = (\Omega_A, H_B^*(\bar{u}))$.

Площадью поверхности выпуклого тела A относительно выпуклого тела B назовем, согласно Минковскому, величину

$$F(A, B) = \lim_{\rho \to +0} \frac{V(A + \rho B) - V(A)}{\rho} .$$

А.Д. Александров в [2] доказал следующее обобщение теоремы Линделефа: среди выпуклых тел в R^n с одной и той же областью задания Ω' опорной функции наименьшую площадь поверхности при заданном положительном объеме имеет тело, описанное около шара, и только такое тело обладает этим минимальным свойством. Теореме Линделефа в этой теореме соответствует случай, когда областью задания Ω' служит конечное число точек, задающих направления граней многогранников.

Г. Хадвигер в [3] доказал неравенство

$$F^n(A) \geq n^n V(E_A) V^{n-1}(A) , \tag{1}$$

в котором $F(A)$ – площадь поверхности, $V(A)$ – объем, E_A – форм-тело выпуклого тела A относительно единичного шара E в R^n, причем равенство в (1) имеет место тогда и только тогда, когда A гомотетично E_A, т.е. само является описанным около некоторого шара. Для многогранников с одним и тем же положительным объемом, имеющих одни и те же направления граней, правая часть в (1) постоянна, а левая достигает минимума тогда и только тогда, когда такой многогранник описан около некоторого шара. Таким образом, теорема Линделефа является следствием неравенства Хадвигера (1).

Автор настоящей статьи получил в [4] следующее обобщение теоремы Александрова: среди выпуклых тел в R^n с одним и тем же положительным объемом, имеющих одну и ту же область задания опорной функции, наименьшую площадь поверхности относительно выпуклого тела B имеет тело, гомотетичное телу, описанному около тела B, и только оно обладает этим минимальным свойством.

Целью настоящей работы являются:

а) доказательство равносильности теорем Александрова и неравенства (1) Хадвигера с условием равенства в нем;

б) вывод неравенства

$$F^n(A,B) \geq n^n V(B_A) V^{n-1}(A) \tag{2}$$

с условием равенства в нем;

в) вывод в M^n неравенства, аналогичного (2) и обобщающего теорему Линделефа на геометрию Минковского.

Перейдем к доказательству и выводу пунктов а) – в).

а) Пусть верна теорема Александрова. Покажем, что из нее следует (1). Обозначим через A произвольное выпуклое тело вR^n, $V(A) = V_0$ – его объем, Φ и $\bar{\Phi}$ – множества на Ω, определенные выше. Так как Φ не лежит ни в одной замкнутой полусфере на Ω [3] и $H_A(\bar{u})$ – положительна и непрерывна на Ω, то пара $(\bar{\Phi}, H_A^*(\bar{u}))$ определяет выпуклое тело в R^n. Покажем, что $A = (\bar{\Phi}, H_A^*(\bar{u}))$. Так как $\bar{\Phi} \subset \Omega$, то $A = (\Omega, H_A(\bar{u})) \subset (\bar{\Phi}, H_A^*(\bar{u})) = A_1$. Предположим, что $A \neq A_1$. Тогда из $A \subset A_1$ следует существование на поверхности тела A точки, которая является внутренней точкой для A_1. Известно [3], что регулярные точки лежат на поверхности выпуклого тела всюду плотно. Поэтому на поверхности тела A найдется регулярная точка, которая является внутренней для A_1. Последнее невозможно, так как через регулярную точку поверхности тела A проходит опорная плоскость тела A_1.

Рассмотрим теперь множество $\{(\bar{\Phi}, H^*(\bar{u}))\}$ выпуклых тел с данной областью задания $\bar{\Phi}$ опорной функции, имеющих одинаковый объем $V_0 = V(A) > 0$. Тогда $A \subset \{(\bar{\Phi}, H^*(\bar{u}))\}$. Согласно теореме Александрова, наименьшую площадь поверхности среди тел этого множества имеет тело A_0, описанное около некоторого шара радиуса R, и только оно обладает этим минимальным свойством, т.е.

$$F(A) \geq F(A_0)\,, \tag{3}$$

и равенство в (3) имеет место только в случае, когда $A = A_0$.

Тело $A_0 = (\bar{\Phi}, H^*(\bar{u}))$, где $H^*(\bar{u}) = R$ при $\bar{u} \in \bar{\Phi}$. Далее, A_0 гомотетично $E_A = (\bar{\Phi}, H_E^*(\bar{u}))$, где $H_E^*(\bar{u}) = 1$ при $\bar{u} \in \bar{\Phi}$. При этом $A_0 = RE_A$. Так как $F(E_A) = nV(E_A)$, то

$$V(A_0) = R^n V(E_A), \quad F(A_0) = R^{n-1} n V(E_A)\,.$$

Исключая из двух последних равенств величину R, придем к равенству

$$F^n(A_0) = n^n V(E_A) V^{n-1}(A_0) = n^n V(E_A) V^{n-1}(A)\,. \tag{4}$$

Последнее вместе с неравенством (3) приводят к неравенству Хадвигера (1) с условием равенства в нем только в случае, когда $A = A_0 = RE_A$. (Хадвигер в [3] называл форм-телом тела A тело E_A, получающееся пересечением полупространств, которые ограничены опорными плоскостями к E, ортогональными к векторам из Φ (а не из $\bar{\Phi}$). Легко убедиться, что замена Φ на $\bar{\Phi}$ приводит к тому же телу E_A.) Покажем теперь, что из неравенства Хадвигера (1) с условием равенства в нем следует теорема Александрова.

Пусть $A = (\Omega', H^*(\bar{u}))$ – одно из выпуклых тел с данной областью задания Ω' опорной функции, которые имеют один и тот же объем $V_0 > 0$. Убедимся, что Φ, а вместе с ним и $\bar{\Phi}$ содержится в Ω'. Действительно, если единичная нормаль $\bar{u}_0$ к опорной плоскости, проходящей через регулярную точку $\bar{x}_0$ поверхности тела A, не принадлежит Ω', то $H_A(\bar{u}) >< \bar{x}_0\bar{u} >$ при $\bar{u} \in \Omega'$. Равенство $H_A(\bar{u})- < \bar{x}_0\bar{u} >= 0$ возможно лишь в случае, когда $\bar{u} = \bar{u}_0$. Следовательно, разность $H^*(\bar{u})- < \bar{x}_0\bar{u} >$ достигает на Ω' положительного минимума, и точка $\bar{x}_0$ является внутренней точкой тела $A = (\Omega', H^*(\bar{u}))$. Итак, $\bar{\Phi} \subset \Omega'$. Отсюда следует включение

$$E'_A = (\Omega', H^*_E(\bar{u})) \subset (\bar{\Phi}, H^*_E(\bar{u})) = E_A\,,$$

где E_A – форм-тело тела A относительно E, а E'_A – тело, описанное около E, с областью задания Ω' опорной функции. Тогда и

$$V(E'_A) \le V(E_A)\,.$$

Из неравенства Хадвигера (1) и последнего неравенства имеем

$$F^n(A) \ge n^n V(E_A) V^{n-1}(A) \ge n^n V(E'_A) V^{n-1}(A)\,. \tag{5}$$

Выясним условие равенства крайних частей в (5). Рассуждая как и при выводе равенства (4), можно показать, что при $A = qE'_A$ $(q > 0)$, т.е. в случае, когда A положительно гомотетично E'_A, имеет место равенство

$$F^n(A) = n^n V(E'_A) V^{n-1}(A)\,.$$

Покажем, что это единственный случай равенства крайних частей в (5). Действительно, равенство крайних частей в (5) приводит к равенству $V(E'_A)$ $= V(E_A)$. Так как $E'_A \subset E_A$ и E'_A – выпуклое тело, то $E'_A = E_A$. Таким образом, равенство крайних частей в (5) равносильно равенству в неравенстве (1). Следовательно, оно имеет место тогда и только тогда, когда A гомотетично E_A. Но в этом случае $E'_A = E_A$, и мы приходим к условию равенства в теореме Александрова.

б) Покажем теперь, что для любых выпуклых тел A и B в R^n справедливо неравенство (2), равенство в котором имеет место тогда и только тогда, когда A и B_A положительно гомотетичны.

В [4] было получено неравенство

$$V_1^n(A, B) \ge V(B'_A) V^{n-1}(A)\,., \tag{6}$$

в котором $A = (\Omega', H_A^*(\bar{u}))$, $B'_A = (\Omega', H_B^*(\bar{u}))$, $V_1(A, B) = \frac{1}{n}F(A, B)$ – первый смешанный объем тел A и B, и в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A = qB'_A$ $(q > 0)$. Полагая в (6) $\Omega' = \Omega_A$, придем к неравенству (2), в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $A = qB_A$ $(q > 0)$.

Можно показать, что, и наоборот, из (2) следует (6) с условием равенства в нем. Доказательство этого факта аналогично доказательству того, что теорема Александрова является следствием неравенства (1) Хадвигера.

Заметим, что при $B = E$ неравенство (6) с условием равенства в нем равносильно теореме Алексадрова, а (2) – неравенству Хадвигера. Поэтому достаточно было бы доказать равносильность неравенств (2) и (6), чтобы прийти к выводу о равносильности теоремы Александрова и неравенства Хадвигера. Непосредственное доказательство равносильности этих утверждений представляет интерес еще и потому, что в работе [3] при доказательстве неравенства (1) нет ссылки на теорему Александрова [2].

в) Обратимся к обобщению теоремы Линделефа на пространство Минковского M^n $(n \geq 2)$.

Пусть A^n – n-мерное аффинное пространство, B – центрально-симметричное выпуклое тело в A^n, имеющее начало $\bar{o}$ центром симметрии. Будем считать, что M^n получается из A^n введением метрики Минковского с помощью пары $(B, \bar{o})$. Рассмотрим присоединенное к M^n евклидово пространство R^n, которое получается из A^n введением в A^n скалярного произведения с помощью положительно определенной билинейной формы. При этом будем предполагать, что в R^n выполнено условие $V(B) = v_n$, где v_n – объем единичного шара E в R^n. Тогда при выполнении этого условия для любого выпуклого тела A в M^n объем $V(A)$ тела A в R^n совпадает с объемом $V_B(A)$ тела A в M^n, а площадь $F_B(A)$ тела A в M^n определяется равенством $F_B(A) = F(A, I)$, где I – изопериметрикс пространства M^n, а $F(A, I)$ – площадь тела A относительно тела I в R^n [5]. Покажем, что в M^n имеет место неравенство

$$F_B^n(A) \geq n^n V_B(I_A) V_B^{n-1}(A)\,, \tag{7}$$

в котором I_A – форм-тело тела A относительно тела I и в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда A и I_A положительно гомотетичны.

Действительно, полагая в (2) $B = I$ и учитывая, что $F(A, I) = F_B(A)$, $V(A) = V_B(A)$, $V(I_A) = V_B(I_A)$ и что I_A не зависит от выбора присоединенного пространства R^n, придем к (7) с условием равенства в нем.

Неравенство (7) аналогично неравенству (1) Хадвигера и тем самым является обобщением теоремы Линделефа на M^n.

Список литературы

[1] *L. Lindelöf*, Propriétés générales des polyèrdted qui, sous une ètendue superficielle donnée, remferment le plus grant volume. — Bull. Acad. Sci. St. Petèrsbourg (1869), v. 7, No. 14, p. 257–269.

[2] *А.Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела. — Мат. сб. (1938), т. 3(45), № 1, с. 27–44.

[3] *З.Г. Хадвигер*, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. Москва, Наука (1966), 416 с.

[4] *В.И. Дискант*, Уточнение изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел. — Тр. ин-та мат. СО АН СССР (1989), т. 14, с. 98–132.

[5] *К. Лейхвейс*, Выпуклые множества, Москва, Наука (1985), 336 с.

Generalizations of the Lyndelyoff theorem

V.I. Diskant

The Lyndelyoff theorem states: a polihedrom described near the ball has the least volume among all convex polyhedra of equal volume and of the same face direction. Generalizations of the Lyndelyoff theorem made by A.D. Alexandrov, G. Hadviger and the author of this paper are presented. The Lyndelyoff theorem generalizations made by A.D. Alexandrov and G. Hadviger are proved be equivalent. A generalization of the Lyndelyoff theorem in the n-dimentional Minkovsky's M^n $(n \geq 2)$ surface is formulated and proved.

Узагальнення теореми Ліндельофа

В.І. Діскант

Теорема Ліндельофа затверджує, що серед усіх опуклих многогранників рівного об'єму, які мають однакові напряму граней, найменшу площу поверхні має многогранник, описаний коло кулі. Приведені узагальнення теореми Ліндельофа, що належать А.Д. Александрову, Г. Хадвігеру та автору статті. Доказано еквівалентність узагальнень теореми Ліндельофа, які належать А.Д. Александрову та Г. Хадвігеру. Сформульовано та доведено узагальнення теореми Ліндельофа в n-вимірному просторі Мінковського M^n $(n \geq 2)$.