Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 4, № 1/2, с. 65–74

# О классификации лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – комплексная редуктивная алгебра Ли

Е.А. Каролинский

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47**

Статья поступила в редакцию 18 декабря 1996 года

Предложен индуктивный алгоритм, в некоторых случаях позволяющий классифицировать лагранжевы подалгебры в $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ с точностью до диагонального действия группы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. С помощью этого алгоритма классифицированы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$-орбиты на множестве лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}=sl(n)$, $n\leq 4$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная комплексная редуктивная алгебра Ли, $G=\operatorname{Int}\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$, положительно определенная на некоторой (и тогда на любой) компактной вещественной форме $k\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Зададим на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ скалярное произведение формулой

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle-\langle y_1,y_2\rangle\,, \tag{1}$$

где $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2\in\mathfrak{g}$. В настоящей работе рассматривается задача описания лагранжевых (т.е. являющихся максимальными изотропными подпространствами) подалгебр в $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ с точностью до диагонального действия группы $G$. Эта задача мотивирована теорией пуассоновых однородных пространств групп Пуассона–Ли. Именно, рассмотрим на $\mathfrak{g}$ стандартную $r$-матричную структуру биалгебры Ли (см. [1], пример 3.2). Тогда $D(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, где $D(\mathfrak{g})$ – дубль, соответствующий биалгебре Ли $\mathfrak{g}$, и естественное скалярное произведение в $D(\mathfrak{g})$ задается формулой (1). Согласно работе В.Г. Дринфельда [2], к рассматриваемой нами задаче по существу сводится задача описания с точностью до изоморфизма пуассоновых однородных пространств связной группы Пуассона–Ли, соответствующей биалгебре Ли $\mathfrak{g}$.

*Работа выполнена при поддержке INTAS (Грант 94-4720).

В данной работе предложен индуктивный алгоритм, позволяющий в некоторых случаях сводить описание $G$-орбит на множестве лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ к аналогичной задаче для полупростой алгебры Ли меньшего ранга. Этот алгоритм позволил полностью описать классы $G$-сопряженности лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ для $\mathfrak{g} = sl(n)$, $n \leq 4$ (см. разд. 4 настоящей работы).

Автор глубоко признателен В.Г. Дринфельду за постановку задачи и руководство работой.

**1.** Пусть $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ – лагранжева подалгебра. Пусть $\mathfrak{c} = \pi(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{c}' = \pi'(\mathfrak{l})$, где $\pi$, $\pi'$: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\pi(x, y) = x$, $\pi'(x, y) = y$. Так как $\mathfrak{c}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} | (x, 0) \in \mathfrak{l}\}$, то $\mathfrak{c}^{\perp} \subset \mathfrak{c}$; аналогично $(\mathfrak{c}')^{\perp} \subset \mathfrak{c}'$, т.е. $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}'$ – коизотропные относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ подалгебры в $\mathfrak{g}$.

Заметим, что $\mathfrak{c}^{\perp}$ – идеал в $\mathfrak{c}$, то же для $\mathfrak{c}'$. Определим отображение $\varphi$: $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}'/(\mathfrak{c}')^{\perp}$ формулой $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$, если $(x, y) \in \mathfrak{l}$ (здесь $\bar{x}$ – образ $x$ в $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$, $\bar{y}$ – образ $y$ в $\mathfrak{c}'/(\mathfrak{c}')^{\perp}$). Легко видеть, что $\varphi$ определено корректно и является изоморфизмом алгебр Ли, сохраняющим скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Рассмотрим теперь тройку $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \varphi)$, где $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}'$ – коизотропные подалгебры в $\mathfrak{g}$, а $\varphi$: $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}'/(\mathfrak{c}')^{\perp}$ – изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Положим $\mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \varphi) := \{(x, y) | x \in \mathfrak{c}, y \in \mathfrak{c}', \varphi(\bar{x}) = \bar{y}\}$. Легко проверить, что $\mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \varphi)$ – лагранжева подалгебра в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, и так получается $G$-эквивариантная биекция между множеством лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ и множеством таких троек $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \varphi)$.

З а м е ч а н и е. Пусть $E$ и $E'$ – конечномерные комплексные линейные пространства, наделенные невырожденной симметрической билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Наделим пространство $E \times E'$ билинейной формой (1). Применяя изложенную выше конструкцию к абелевым алгебрам Ли, получаем биекцию между множеством лагранжевых подпространств в $E \times E'$ и множеством троек $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \varphi)$, где $\mathfrak{c} \subset E$ и $\mathfrak{c}' \subset E'$ – коизотропные подпространства, $\varphi$: $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}'/(\mathfrak{c}')^{\perp}$ – линейный изоморфизм, сохраняющий $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**2.** Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, $R$ – система корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, $R_+$ – множество положительных корней относительно некоторого базиса $\Gamma \subset R$.

Пусть $\Delta \subset \Gamma$, $[\Delta] := \{\alpha \in R |$ в разложение $\alpha$ по $\Gamma$ входят только корни из $\Delta\}$, $\mathfrak{h}_\Delta := \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, $\mathfrak{n}_\Delta := \bigoplus\limits_{\alpha \in R_+ \setminus [\Delta]} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{a}_\Delta := \mathfrak{h}_\Delta \bigoplus \left( \bigoplus\limits_{\alpha \in [\Delta]} \mathfrak{g}_\alpha \right)$, $\mathfrak{z}_\Delta$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}_\Delta$ в $\mathfrak{h}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда $\mathfrak{p}_\Delta := \mathfrak{a}_\Delta \bigoplus \mathfrak{n}_\Delta \bigoplus \mathfrak{z}_\Delta$ – параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Хорошо известно, что любая параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$ $G$-сопряжена единственной подалгебре вида $\mathfrak{p}_\Delta$.

Пусть $V$ – коизотропное подпространство в $\mathfrak{z}_\Delta$. Положим $\mathfrak{c}_{\Delta,V} := \mathfrak{a}_\Delta \bigoplus \mathfrak{n}_\Delta \bigoplus V$. Тогда $\mathfrak{c}_{\Delta,V}$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Можно показать, что всякая коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$ $G$-сопряжена единственной подалгебре вида $\mathfrak{c}_{\Delta,V}$ (см. [3], §6, где этот хорошо известный факт приводится без доказательства; доказательство см., например, в [4], §3). В частности, отсюда следует, что если $\mathfrak{c}$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$, то найдется единственная параболическая подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ такая, что $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$.

Если $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ – параболическая подалгебра, то $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp$ редуктивна, $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{a}$ – полупроста, $\mathfrak{z}$ абелева. Если $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}$ – коизотропная подалгебра такая, что $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{c}/\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a} \bigoplus V$, где $V$ – коизотропное подпространство в $\mathfrak{z}$. Так получается биекция между множеством коизотропных подалгебр в $\mathfrak{g}$ и множеством пар $(\mathfrak{p}, V)$, где $\mathfrak{p}$ - параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, а $V \subset \mathfrak{z}$ – коизотропное подпространство.

Пусть $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{g}$ – параболические подалгебры такие, что $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}'$ (здесь $\mathfrak{p}'/(\mathfrak{p}')^\perp = \mathfrak{a}' \bigoplus \mathfrak{z}'$, где $\mathfrak{a}'$ полупроста, $\mathfrak{z}'$ абелева). Будем называть такие пары $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$ *допустимыми.* Пусть $\theta$: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ – изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$ – лагранжево относительно билинейной формы (1) подпространство. Будем называть четверки $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0)$ *допустимыми.* Если $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0)$ – допустимая четверка, то положим $\mathfrak{l}(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0) := \{(x,y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}' | \theta(x_{ss}) = y_{ss}, (x_{\mathfrak{z}}, y_{\mathfrak{z}}) \in \mathfrak{l}_0\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, где $x_{ss}$ – образ $x$ в $\mathfrak{a}$, $x_{\mathfrak{z}}$ – образ $x$ в $\mathfrak{z}$, $y_{ss}$ – образ $y$ в $\mathfrak{a}'$, $y_{\mathfrak{z}}$ – образ $y$ в $\mathfrak{z}'$. Используя приведенное выше описание коизотропных подалгебр в $\mathfrak{g}$ и замечание в конце разд. 1, нетрудно проверить, что $\mathfrak{l}(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0)$ – лагранжева подалгебра, и так получается $G$-эквивариантная биекция между множеством лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ и множеством допустимых четверок $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0)$.

Если $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$ – допустимая пара параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$, то пусть $P$ – связная подгруппа в $G$ такая, что $\mathrm{Lie}P = \mathfrak{p}_0$, где $\mathfrak{p}_0$ – фактор $\mathfrak{p}$ по центру алгебры Ли $\mathfrak{g}$; пусть $P'$ – такая же подгруппа для $\mathfrak{p}'$.

**Предложение 2.1.** *Лагранжевы подалгебры* $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\theta,\mathfrak{l}_0)$ *и* $\tilde{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}(\mathfrak{p},\mathfrak{p}',\tilde{\theta},\tilde{\mathfrak{l}}_0)$ *$G$-сопряжены тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{l}_0 = \tilde{\mathfrak{l}}_0$, *а* $\theta$ *и* $\tilde{\theta}$ *лежат в одной орбите действия группы* $P \cap P'$.

Доказательство. Подалгебры $\mathfrak{l}$ и $\tilde{\mathfrak{l}}$ $G$-сопряжены тогда и только тогда, когда пары $(\theta, \mathfrak{l}_0)$ и $(\tilde{\theta}, \tilde{\mathfrak{l}}_0)$ лежат в одной $P \cap P'$-орбите. Так как $P$ действует на $\mathfrak{z}$ тривиально (ибо элементы $P$ индуцируют внутренние автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}$), то $P \cap P'$ действует тривиально на множестве лагранжевых подпространств в $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$. ■

Напомним хорошо известное описание классов $G$ -сопряженности пар $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$, где $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{g}$ – параболические подалгебры.

Пусть $\Delta$, $\Delta' \subset \Gamma$, $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}(\mathfrak{g})$ – множество пар $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')$ таких, что $\mathfrak{p}$ $G$-сопряжена $\mathfrak{p}_\Delta$, $\mathfrak{p}'$ $G$-сопряжена $\mathfrak{p}_{\Delta'}$. Группа $G$ действует на $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$. Пусть $W$ – группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, $W_\Delta \subset W$ – подгруппа, порожденная отражениями, соответствующими корням из $\Delta$. Тогда существует биекция между множеством $G$-орбит на $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$ и множеством $W_\Delta \setminus W/W_{\Delta'}$. При этом двойному смежному классу элемента $w \in W$ соответствует $G$-орбита пары $(\mathfrak{p}_\Delta, w(\mathfrak{p}_{\Delta'}))$.

Замечание. В записи $w(\mathfrak{p}_{\Delta'})$ $w$ означает (любой) внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что $w(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ и $w(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{w(\alpha)}$, где $\alpha \in R$.

**3.** Пусть $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ – допустимая пара параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}'/(\mathfrak{p}')^\perp = \mathfrak{a}' \bigoplus \mathfrak{z}'$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ полупросты, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$ абелевы. Пусть $\Theta$ – это множество изоморфизмов алгебр Ли $\theta$: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$, сохраняющих $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Из результатов разд. 2 следует, что для описания классов $G$-сопряженности лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ осталось описать орбиты действия группы $P \cap P'$ на множестве $\Theta$.

Предложение 3.5, являющееся основным результатом настоящего раздела, позволяет в некоторых случаях сводить эту задачу к аналогичной для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ меньшего ранга.

Пусть $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, где $\Delta, \Delta'$ таковы, что соответствующие им схемы Дынкина изоморфны. Тогда пара параболических подалгебр $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + (\mathfrak{p}')^\perp)$ лежит в $\mathcal{P}_{\tilde{\Delta},\tilde{\Delta}'}$ для некоторых $\tilde{\Delta} \subset \Delta$, $\tilde{\Delta}' \subset \Delta'$. Пусть $\mathfrak{q}$ – образ $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp)/\mathfrak{p}^\perp$ в $\mathfrak{a}$, а $\mathfrak{q}'$ – образ $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + (\mathfrak{p}')^\perp)/(\mathfrak{p}')^\perp$ в $\mathfrak{a}'$. Тогда $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{a}'$ – параболические подалгебры. Пусть $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^\perp = \tilde{\mathfrak{a}} \bigoplus \tilde{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{q}'/(\mathfrak{q}')^\perp = \tilde{\mathfrak{a}}' \bigoplus \tilde{\mathfrak{z}}'$, где $\tilde{\mathfrak{a}}$, $\tilde{\mathfrak{a}}'$ полупросты, $\tilde{\mathfrak{z}}$, $\tilde{\mathfrak{z}}'$ абелевы. Пусть $\mathfrak{Z} = \tilde{\mathfrak{z}} \bigoplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}' = \tilde{\mathfrak{z}}' \bigoplus \mathfrak{z}'$.

Пусть $\mathfrak{l}$ – образ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ в $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp) \times (\mathfrak{p}'/(\mathfrak{p}')^\perp) = (\mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}) \times (\mathfrak{a}' \bigoplus \mathfrak{z}')$. Наделим алгебру Ли $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp) \times (\mathfrak{p}'/(\mathfrak{p}')^\perp)$ скалярным произведением (1).

**Лемма 3.1.** $\mathfrak{l}$ – *лагранжева подалгебра.*

Доказательство. $\mathfrak{l}$ – изотропная подалгебра, и $\dim\mathfrak{l} = \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}') - \dim(\mathfrak{p}^\perp \cap (\mathfrak{p}')^\perp) = \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}') - \dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}')^\perp = \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}') + \dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') - \dim\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{p} + \dim\mathfrak{p}' - \dim\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{p} - \dim\mathfrak{p}^\perp = \frac{1}{2}\dim((\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp) \times (\mathfrak{p}'/(\mathfrak{p}')^\perp))$. ■

Заметим, что проекция $\mathfrak{l}$ на $\mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}$ вдоль $\mathfrak{a}' \bigoplus \mathfrak{z}'$ – это $\mathfrak{q} \bigoplus \mathfrak{z}$, а на $\mathfrak{a}' \bigoplus \mathfrak{z}'$ вдоль $\mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{z}$ – это $\mathfrak{q}' \bigoplus \mathfrak{z}'$. Поэтому $\mathfrak{l} = \{(x, y) | x \in \mathfrak{q} \bigoplus \mathfrak{z}, y \in \mathfrak{q}' \bigoplus \mathfrak{z}', \varphi(x_{ss}) = y_{ss}, \psi(x_{\mathfrak{Z}}) = y_{\mathfrak{Z}}\}$, где $\varphi$: $\tilde{\mathfrak{a}} \to \tilde{\mathfrak{a}}'$, $\psi$: $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}'$ – некоторые изоморфизмы алгебр Ли, сохраняющие $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $x_{ss}$ – образ $x$ в $\tilde{\mathfrak{a}}$, $x_{\mathfrak{Z}}$ – образ $x$ в $\mathfrak{Z}$, $y_{ss}$ – образ $y$ в $\tilde{\mathfrak{a}}'$, $y_{\mathfrak{Z}}$ – образ $y$ в $\mathfrak{Z}'$.

Пусть $\Gamma_\psi \subset \mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}'$ – график $\psi$, $\bar{\Gamma}_\psi$ – его образ в $\mathfrak{Z}/\mathfrak{z} \times \mathfrak{Z}'/\mathfrak{z}' = \tilde{\mathfrak{z}} \times \tilde{\mathfrak{z}}'$. Пусть $\bar{\mathfrak{l}}$ – образ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ в $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'$, тогда $\bar{\mathfrak{l}} = \{(x, y) | x \in \mathfrak{q}, y \in \mathfrak{q}', \varphi(x_{ss}) = y_{ss}, (x_{\mathfrak{z}}, y_{\mathfrak{z}}) \in \bar{\Gamma}_\psi\}$, где $x_{\mathfrak{z}}$ – образ $x$ в $\tilde{\mathfrak{z}}$, $y_{\mathfrak{z}}$ – образ $y$ в $\tilde{\mathfrak{z}}'$.

Рассмотрим группу $S := \{(g, g') | g(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}, g'(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}', \varphi\tilde{g} = \tilde{g}'\varphi\} \subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{a} \times \mathrm{Int}\mathfrak{a}'$ (здесь $\tilde{g}$: $\tilde{\mathfrak{a}} \to \tilde{\mathfrak{a}}$ индуцирован $g$; то же для $\tilde{g}'$). Заметим, что $\pi(P \cap P') \subset S$, где $\pi$: $P \cap P' \to \mathrm{Int}\,\mathfrak{a} \times \mathrm{Int}\,\mathfrak{a}'$ – естественный гомоморфизм.

**Лемма 3.2.** *Группа $S$ связна.*

Доказательство. Пусть $Q \subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{a}$, $Q' \subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{a}'$ – связные подгруппы такие, что $\mathrm{Lie}Q = \mathfrak{q}$, $\mathrm{Lie}Q' = \mathfrak{q}'$. Пусть $N \subset Q$, $N' \subset Q'$ – унипотентные радикалы. Тогда $N \times N' \subset S \subset Q \times Q'$. Так как подгруппа $N \times N'$ связна, то достаточно доказать, что $S/(N \times N')$ связна. Ядро естественного эпиморфизма $S/(N \times N') \to \mathrm{Int}\mathfrak{a}'$ изоморфно центру $\tilde{Z}$ группы $Q/N$. Осталось доказать связность $\tilde{Z}$.

Пусть $H \subset \mathrm{Int}\mathfrak{a}$ – подгруппа Картана такая, что $H \subset Q$, $\Gamma$ – некоторая система простых корней. Так как центр группы $\mathrm{Int}\,\mathfrak{a}$ тривиален, то имеется изоморфизм $\lambda$: $H \to (\mathbb{C}^*)^\Gamma$, $\lambda(h) = (\alpha(h))_{\alpha \in \Gamma}$. Мы можем считать, что $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_\Delta$, где $\Delta \subset \Gamma$. Тогда $\lambda(\tilde{Z}) = \{(z_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} | z_\alpha = 1 \text{ при } \alpha \in \Delta\}$, поэтому $\tilde{Z}$ связен. ■

Следствие. *Если $\bar{\Gamma}_\psi = \tilde{\mathfrak{z}} \times \tilde{\mathfrak{z}}'$, то $\pi(P \cap P') = S$.* ■

Пусть теперь $\theta \in \Theta$. Пусть $\sigma = \sigma_\theta$: $\Delta \to \Delta'$ – индуцированный им изоморфизм схем Дынкина. Положим $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{a}'$ и сопоставим $\theta$ тройку $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, где $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{g}_1$ – параболические подалгебры, $\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}'_1 := \theta(\mathfrak{q})$, $\theta_1$: $\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}'_1$ – сохраняющий $\langle\cdot,\cdot\rangle$ изоморфизм алгебр Ли, определенный формулой $\theta_1(x) := \theta(\varphi^{-1}(x))$ (здесь $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1^\perp = \mathfrak{a}_1 \bigoplus \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{p}'_1/(\mathfrak{p}'_1)^\perp = \mathfrak{a}'_1 \bigoplus \mathfrak{z}'_1$, где $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ полупросты, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}'_1$ абелевы, в частности, $\mathfrak{a}_1 = \tilde{\mathfrak{a}}'$, $\mathfrak{z}_1 = \tilde{\mathfrak{z}}'$; в последней формуле $\theta$ означает изоморфизм $\tilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{a}'_1$, индуцированный $\theta$: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$). Тогда $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1) \in \mathcal{P}_{\Delta_1, \Delta'_1}(\mathfrak{g}_1)$, где $\Delta_1 := \tilde{\Delta}' \subset \Delta'$, $\Delta'_1 := \sigma(\tilde{\Delta}) \subset \Delta'$. Кроме того, $\theta_1$ индуцирует изоморфизм $\sigma_1 = \sigma_{\theta_1}$: $\Delta_1 \to \Delta'_1$, причем $\sigma_1(\alpha) = \sigma(\sigma_\varphi^{-1}(\alpha))$ при $\alpha \in \Delta_1 = \tilde{\Delta}'$ (здесь $\sigma_\varphi$: $\tilde{\Delta} \to \tilde{\Delta}'$ индуцирован $\varphi$: $\tilde{\mathfrak{a}} \to \tilde{\mathfrak{a}'}$). Тем самым $\sigma_1$ зависит только от $\sigma$.

Обозначим через $\Theta_\sigma$ множество изоморфизмов $\theta \in \Theta$, индуцирующих фиксированный изоморфизм $\sigma$: $\Delta \to \Delta'$. Пусть $\Theta_{\Delta_1, \Delta'_1, \sigma_1}$ – это множество троек $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, где $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1) \in \mathcal{P}_{\Delta_1, \Delta'_1}(\mathfrak{g}_1)$, $\theta_1$: $\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}'_1$ – изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и индуцирующий изоморфизм $\sigma_1$: $\Delta_1 \to \Delta'_1$.

Покажем, что если $\bar{\Gamma}_\psi = \tilde{\mathfrak{z}} \times \tilde{\mathfrak{z}}'$, то имеется естественная биекция между множеством $P \cap P'$ – орбит на $\Theta_\sigma$ и множеством $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_1$-орбит на $\Theta_{\Delta_1, \Delta'_1, \sigma_1}$.

Пусть $f$: $\Theta_\sigma \to \Theta_{\Delta_1, \Delta'_1, \sigma_1}$ – отображение, сопоставляющее $\theta \in \Theta_\sigma$ тройку $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1) \in \Theta_{\Delta_1, \Delta'_1, \sigma_1}$ так, как указано выше. Группа $P \cap P'$ действует на $\Theta_{\Delta_1, \Delta'_1, \sigma_1}$ посредством естественного гомоморфизма $P \cap P' \to \mathrm{Int}\,\mathfrak{a}' = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_1$.

**Лемма 3.3.** *Отображение $f$ является $P \cap P'$-эквивариантным.*

Доказательство. Пусть $\theta$, $\hat{\theta} \in \Theta_\sigma$, $f(\theta) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, $f(\hat{\theta}) = (\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}'_1, \hat{\theta}_1)$. Пусть $\hat{\theta} = g'\theta g^{-1}$, где $(g, g') \in \pi(P \cap P')$. Используя тот факт, что $(g, g') \in S$, легко проверить, что $g'$ переводит $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, в $(\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}'_1, \hat{\theta}_1)$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $\bar{\Theta}_\sigma$ – множество $P\cap P'$-орбит на $\Theta_\sigma$, $\bar{\Theta}_{\Delta_1,\Delta_1',\sigma_1}$ – множество $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_1$-орбит на $\Theta_{\Delta_1,\Delta_1',\sigma_1}$, $\bar{f}$: $\bar{\Theta}_\sigma \to \bar{\Theta}_{\Delta_1,\Delta_1',\sigma_1}$-отображение, индуцированное $f$.

**Лемма 3.4.** *Отображение $\bar{f}$ сюръективно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1) \in \Theta_{\Delta_1,\Delta_1',\sigma_1}$. Покажем, что образ этой тройки в $\bar{\Theta}_{\Delta_1,\Delta_1',\sigma_1}$ лежит в образе $\bar{f}$. Мы можем считать, что $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}'$. Покажем, что найдется $\theta \in \Theta_\sigma$ такой, что $f(\theta) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$. Для этого выберем $\tilde{\sigma} \in \Theta_\sigma$ такой, что $\tilde{\sigma}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}'_1$. Пусть $\tilde{\sigma}_1$: $\tilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{a}'_1$ – изоморфизм, индуцированный $\tilde{\sigma}$. Найдется $g_1' \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{a}'_1$ такой, что $\theta_1\varphi = g_1'\tilde{\sigma}_1$. Поднимем $g_1'$ до внутреннего автоморфизма $g'$: $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}'$ такого, что $g'(\mathfrak{p}'_1) = \mathfrak{p}'_1$. Тогда $\theta = g' \cdot \tilde{\sigma}$ – искомый элемент $\Theta_\sigma$. ■

**Предложение 3.5.** *Если $\bar{\Gamma}_\psi = \tilde{\mathfrak{z}} \times \tilde{\mathfrak{z}}'$, то отображение $\bar{f}$ биективно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим инъективность $\bar{f}$. Пусть $\theta$, $\hat{\theta} \in \Theta_\sigma$, $f(\theta) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, $f(\hat{\theta}) = (\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}_1', \hat{\theta}_1)$. Пусть имеется $g' \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Int}\mathfrak{a}'$, переводящий $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$ в $(\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}_1', \hat{\theta}_1)$. Положим $g = \hat{\theta}^{-1}g'\theta \in \mathrm{Int}\mathfrak{a}$. Так как $S = \pi(P\cap P')$ (см. следствие из леммы 3.2), то достаточно проверить, что $(g, g') \in S$. ■

Рассмотрим тривиальный частный случай, когда допустимая пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ такова, что $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{p}$ (это означает, что $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ имеют общую подалгебру Леви). Тогда $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}'$. Если $\theta \in \Theta$, то $f(\theta) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1, \theta_1)$, где $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}'$, а $\theta_1$ – сохраняющий $\langle\cdot,\cdot\rangle$ автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}'$. Так как $\tilde{\mathfrak{z}} = \tilde{\mathfrak{z}}' = 0$, то условие предложения 3.5 выполнено, и получаем

**Предложение 3.6.** *Пусть $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{p}$. Тогда определенное выше отображение $\bar{f}$ индуцирует биекцию между множеством $P\cap P'$-орбит на $\Theta$ и множеством классов $\mathrm{Int}\mathfrak{a}'$-сопряженности автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{a}'$, сохраняющих $\langle\cdot,\cdot\rangle$.* ■

З а м е ч а н и е. Предложение 3.6 легко доказывается непосредственно, без использования предложения 3.5.

Рассмотрим еще случай, когда подалгебра $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{p}'$ разрешима. Тогда $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$ – борелевские подалгебры. Можем считать, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}\cap\mathfrak{p}'$; пусть $\tilde{\mathfrak{h}}$ – образ $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{h}}'$ – образ $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{a}'$. Пусть $Q \subset \mathrm{Int}\mathfrak{a}$, $Q' \subset \mathrm{Int}\mathfrak{a}'$ – борелевские подгруппы, соответствующие $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$, $N \subset Q$, $N' \subset Q'$ – унипотентные радикалы. Тогда $N \times N' \subset \pi(P\cap P')$; пусть $T = \pi(P\cap P')/(N\times N') \subset (Q/N)\times(Q'/N')$. Пусть $\Theta(\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}') = \{\theta \in \Theta | \theta(\tilde{\mathfrak{h}}) = \tilde{\mathfrak{h}}'\}$. Используя разложение Брюа, нетрудно проверить, что пересечение $N\times N'$-орбиты любого $\theta \in \Theta$ с $\Theta(\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}')$ состоит ровно из одного элемента. Отсюда вытекает

**Предложение 3.7.** *Пусть $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ разрешима. Тогда существует естественная биекция между множеством $P \cap P'$-орбит на $\Theta$ и множеством $T$-орбит на $\Theta(\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}')$.* ■

**4.** Цель настоящего раздела – привести примеры применения техники, изложенной в разд. 3.

1. Пусть $\mathfrak{g} = sl(2)$. Тогда $|\Gamma| = 1$. Перечислим $G$-орбиты на множестве допустимых пар параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$.

1) $\Delta = \Delta' = \emptyset$. Тогда $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$ состоит из двух орбит, $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = O_1 \cup O_2$, где $O_1$ состоит из пар равных борелевских подалгебр, а $O_2$ – из пар противоположных борелевских подалгебр. Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = 0$.

2) $\Delta = \Delta' = \Gamma$. Тогда $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = \{(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})\}$.

Выберем по представителю в каждой орбите. Пусть $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$ – множество допустимых четверток $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \theta, \mathfrak{l}_0)$, у которых $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ пробегает множество представителей орбит, и при фиксированной паре $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ $\mathfrak{l}_0$ пробегает лагранжевы подпространства в $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$, а $\theta$ следующие:

1.$i$) ($i = 1, 2$). Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in O_i$, то $\theta = 0$.

2) Если $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}$, то $\theta$ пробегает систему представителей классов $G$-сопряженности автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

З а м е ч а н и е. В случаях 1.$i$), ($i = 1, 2$), имеется ровно два различных лагранжевых подпространства $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$ (ибо $\dim\mathfrak{z} = \dim\mathfrak{z}' = 1$), в случае 2) $\mathfrak{l}_0 = 0$ (ибо $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' = 0$).

Применяя предложение 3.6, получаем

**Предложение 4.1.** *Множество $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$ образует систему представителей классов $G$-сопряженности допустимых четверок.* ■

2. Пусть $\mathfrak{g} = sl(3)$. Тогда $|\Gamma| = 2$, $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $W = S_3$. Перечислим $G$-орбиты на множестве допустимых пар параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$.

1) $\Delta = \Delta' = \emptyset$. Тогда $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$ состоит из пар борелевских подалгебр. Так как $|W| = 6$, то $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$ состоит из шести орбит, $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = \bigcup_{i=1}^{6} O_i$. Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = 0$.

2) $|\Delta| = |\Delta'| = 1$. Имеются четыре такие пары $(\Delta, \Delta')$: а) $\Delta = \Delta' = \{\alpha_1\}$, б) $\Delta = \Delta' = \{\alpha_2\}$, в) $\Delta = \{\alpha_1\}$, $\Delta' = \{\alpha_2\}$, г) $\Delta = \{\alpha_2\}$, $\Delta' = \{\alpha_1\}$. Так как $|W_\Delta \setminus W/W_{\Delta'}| = 2$, то каждое из множеств $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$ состоит из двух орбит, $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = O_1 \cup O_2$, где $O_1 = \{(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') | \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{p}\}$, $O_2 = \{(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') | \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp \neq \mathfrak{p}\}$. Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, то $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}' \simeq sl(2)$.

3) $\Delta = \Delta' = \Gamma$. Тогда $\mathcal{P}_{\Delta,\Delta'} = \{(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})\}$.

Выберем по представителю в каждой орбите. Пусть $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$ – множество допустимых четверок $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \theta, \mathfrak{l}_0)$, у которых $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ пробегает множество представителей орбит, и при фиксированной паре $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ $\mathfrak{l}_0$ пробегает лагранжевы подпространства в $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$, а $\theta$ следующие:

1.$i$) $(1 \leq i \leq 6)$. Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in O_i \subset \mathcal{P}_{\emptyset,\emptyset}$, то $\theta = 0$.

2.1) Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in O_1 \subset \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, где $|\Delta| = |\Delta'| = 1$, то $\theta$ пробегает систему представителей классов сопряженности автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = sl(2)$.

2.2) Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') \in O_2 \subset \mathcal{P}_{\Delta,\Delta'}$, где $|\Delta| = |\Delta'| = 1$, то $\theta$ пробегает множество $\{\theta_1, \theta_2\}$, где $\theta_1$ и $\theta_2$ – фиксированные элементы $\Theta$ такие, что $\theta_1(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}'$, $\theta_2(\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{q}'$ (напомним , что $\mathfrak{q}$ – это образ $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}^\perp)/\mathfrak{p}^\perp$ в $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}'$ – образ $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' + (\mathfrak{p}')^\perp)/(\mathfrak{p}')^\perp$ в $\mathfrak{a}'$).

3) Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, то $\theta$ пробегает систему представителей классов $G$-сопряженности автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

З а м е ч а н и е. В случаях 2.$i$), $i = 1, 2$, имеются ровно два различных лагранжевых подпространства $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{z} \times \mathfrak{z}'$ (так как $\dim\mathfrak{z} = \dim\mathfrak{z}' = 1$), в случае 3) $\mathfrak{l}_0 = 0$ (так как $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' = 0$).

**Предложение 4.2.** *Множество $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$ образует систему представителей классов $G$-сопряженности допустимых четверок.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случаи 1), 2.1) и 3) следуют из предложения 3.6. Рассмотрим случай 2.2). Будем использовать обозначения разд. 3. Нам достаточно описать $P \cap P'$–орбиты на множестве $\Theta_\sigma$, где $\sigma$ – единственный изоморфизм $\Delta$ на $\Delta'$. В нашем случае $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}'$ – борелевские подалгебры, поэтому $\Delta_1 = \Delta_1' = \emptyset$. Легко проверить, что $\bar{\Gamma}_\psi = \tilde{\mathfrak{z}} \times \tilde{\mathfrak{z}}'$, поэтому, согласно предложению 3.5, имеется биекция между $P \cap P'$-орбитами на множестве $\Theta_\sigma$ и $\mathrm{Int}\, sl(2)$-орбитами на множестве пар борелевских подалгебр в $sl(2)$. Имеются ровно две такие орбиты. Этим орбитам соответствуют изоморфизмы $\theta_1$ и $\theta_2$, указанные в списке, определяющем множество $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$. ■

3. Пусть $\mathfrak{g} = sl(4)$. Тогда условие предложения 3.5 выполнено для всех $G$-орбит на множестве допустимых пар параболических подалгебр, кроме одной, а именно $G$-орбиты пары $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, где $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ – стационарные подалгебры подпространств $V$, $V' \subset \mathbb{C}^4$, $V = \mathbb{C}e_1 \bigoplus \mathbb{C}e_2$, $V' = \mathbb{C}e_2 \bigoplus \mathbb{C}e_3$, $\{e_i\}$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^4$. Рассмотрим подробно только этот случай.

Обозначим через $E_{ij}$ $4 \times 4$-матрицу с единицей на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца и нулями на всех остальных местах. Пусть простые корни $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \in \Gamma$ выбраны так, что $H_{\alpha_1} = E_{11} - E_{22}$, $H_{\alpha_2} = E_{22} - E_{33}$, $H_{\alpha_3} = E_{33} - E_{44}$. Пусть $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Если $\alpha \in R$, то выберем $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ совпадающим с одним из $E_{ij}$. Заметим, что $\mathfrak{a} \simeq sl(2) \bigoplus sl(2)$ порождается элементами $\bar{X}_{\pm\alpha_1}$, $\bar{X}_{\pm\alpha_3}$, а $\mathfrak{a}' \simeq sl(2) \bigoplus sl(2)$ – элементами $\bar{X}_{\pm\alpha_2}$,

$\bar{X}_{\pm\alpha_0}$ (здесь черта означает образ в $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ соответственно). В нашем случае $\Theta=\Theta_{\sigma_1}\cup\Theta_{\sigma_2}$, где $\sigma_1$, $\sigma_2$: $\Delta\to\Delta'$ – изоморфизмы, $\Delta=\Delta'=\{\alpha_1,\alpha_3\}$, $\sigma_1=\mathrm{id}$, $\sigma_2\neq\mathrm{id}$. Определим $\tilde{\sigma}_1\in\Theta_{\sigma_1}$ и $\tilde{\sigma}_2\in\Theta_{\sigma_2}$ формулами $\tilde{\sigma}_1(\bar{X}_{\pm\alpha_1})=\bar{X}_{\pm\alpha_2}$, $\tilde{\sigma}_1(\bar{X}_{\pm\alpha_3})=\bar{X}_{\pm\alpha_0}$, $\tilde{\sigma}_2(\bar{X}_{\pm\alpha_1})=\bar{X}_{\pm\alpha_0}$, $\tilde{\sigma}_2(\bar{X}_{\pm\alpha_3})=\bar{X}_{\pm\alpha_2}$. Пусть $F(\lambda)$ – образ $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\\lambda&0\end{smallmatrix}\right)$ в $PSL(2)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$; пусть $E$ – единица в $PSL(2)$. Пусть подмножество $\mathcal{H}_1\subset PSL(2)\times PSL(2)$ состоит из элементов $(F(\lambda),E)$ $(\lambda\in\mathbb{C}^*)$, $(F(1),F(1))$, $(E,F(1))$, $(E,E)$, а подмножество $\mathcal{H}_2\subset PSL(2)\times PSL(2)$ – из элементов $(E,F(\lambda))$ $(\lambda\in\mathbb{C}^*)$, $(F(1),F(1))$, $(F(1),E)$, $(E,E)$. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{a}$ с $sl(2)\bigoplus sl(2)$ так, чтобы $\bar{X}_{\pm\alpha_1}\mapsto X_1^{\pm}$, $\bar{X}_{\pm\alpha_3}\mapsto X_2^{\pm}$, где $X_i^+=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $X_i^-=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ – образующие Шевалле $i$-го экземпляра $sl(2)$, $i=1,2$.

**Предложение 4.3.** *Изоморфизмы $\theta=\tilde{\sigma}_i\cdot h$, где $h\in\mathcal{H}_i$, образуют систему представителей $P\cap P'$-орбит на множестве $\Theta_{\sigma_i}$, $i=1,2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 3.7, нам достаточно описать орбиты действия группы $T$ на множестве изоморфизмов $\theta\in\Theta$ таких, что $\theta(\tilde{\mathfrak{h}})=\tilde{\mathfrak{h}}'$, где $\tilde{\mathfrak{h}}=\mathbb{C}\bar{H}_{\alpha_1}\bigoplus\mathbb{C}\bar{H}_{\alpha_3}\subset\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{h}}'=\mathbb{C}\bar{H}_{\alpha_2}\bigoplus\mathbb{C}\bar{H}_{\alpha_0}\subset\mathfrak{a}'$.

Пусть $\theta\in\Theta_{\sigma_1}$, $\theta=\tilde{\sigma}_1\cdot h$, где $h\in PSL(2)\times PSL(2)$. Пусть $A\subset PSL(2)$ состоит из диагональных матриц, а $B\subset PSL(2)$ – из матриц с нулями на главной диагонали. Тогда условие $\theta(\tilde{\mathfrak{h}})=\tilde{\mathfrak{h}}'$ означает, что $h$ сохраняет стандартную картановскую подалгебру в $sl(2)\bigoplus sl(2)$, т.е. $h=(h_1,h_2)$, где $h_1$, $h_2\in A\cup B$. Пусть, например, $h_1\in B$, $h_2\in A$, $h_1$ – образ $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\a_1&0\end{smallmatrix}\right)$ в $PSL(2)$, $h_2$ – образ $\left(\begin{smallmatrix}a_2&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ в $PSL(2)$. Тогда нетрудно проверить, что действие $T$ сводится к преобразованиям $a_1\mapsto\alpha\cdot a_1$, $a_2\mapsto\alpha^{-1}\cdot a_2$, где $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Поэтому под действием $T$ $h$ однозначно приводится к виду $(F(\lambda),E)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$.

В остальных трех случаях ($h_1\in B$, $h_2\in B$; $h_1\in A$, $h_2\in B$, $h_1\in A$, $h_2\in A$), а также в случае, когда $\theta\in\Theta_{\sigma_2}$, доказательство проводится аналогично. ■

## Список литературы


[1] *V.G. Drinfeld,* Quantum groups. — Proc. Int. Congr. Math., Berkeley (1986), v. 1, p. 798–820.

[2] *V.G. Drinfeld,* On Poisson homogeneous spaces of Poisson–Lie groups. — Teoret. Mat. Physika (1993), v. 95, No. 2, p. 226–227.

[3] *А.А. Белавин, В.Г. Дринфельд,* Уравнения треугольников и простые алгебры Ли. Препринт 1982-18. Ин-т теорет. физики им. Ландау, Черноголовка (1982), 80 с.

[4] *Е.А. Каролинский,* Классификация пуассоновых однородных пространств компактной группы Пуассона–Ли. — Мат. физика, анализ, геометрия (1996), т. 3, No. 3/4, с. 274–289.

**On the classification of Lagrangian subalgebras in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, where $\mathfrak{g}$ is a complex reductive Lie algebra**

E.A. Karolinsky

An inductive approach to the classification of Lagrangian subalgebras in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ up to the diagonal $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-action is proposed. Using this approach, the classification of Lagrangian subalgebras in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, where $\mathfrak{g} = sl(n)$, $n \leq 4$, is obtained.

**Про класифікацію лагранжевих підалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, де $\mathfrak{g}$ – комплексна редуктивна алгебра Лі**

Є.О. Каролінський

Подано індуктивний алгоритм, в деяких випадках дозволяючий дати класифікацію лагранжевих підалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ з точністю до діагональної дії групи $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$. За допомогою цього алгоритма подано класифікацію $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$-орбіт на множині лагранжевих підалгебр в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, де $\mathfrak{g} = sl(n)$, $n \leq 4$.