Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 1/2, с. 104–111

О вписанных и описанных телах

Б.Д. Котляр

Государственная горная академия Украины,
Украина, 320027, г. Днепропетровск, пр. К. Маркса, 19

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Получены условия, необходимые для того чтобы одно тело в $\mathbf{R}^n$ можно было погрузить в другое тело. Приведены неравенства для радиуса шара, вписанного в тело, и радиуса шара, описанного вокруг тела в $\mathbf{R}^n$.

1. Хорошо известны условия, достаточные для того чтобы одну из двух плоских квадрируемых фигур K_1, $K_2 \subset \mathbf{R}^2$ со спрямляемыми границами $\partial K_1, \partial K_2$ можно было поместить в другую движением. Так, если обозначить площадь фигуры K_i через F_i, периметр K_i – через L_i, то из неравенства $2\pi(F_1+F_2)-L_1L_2 > 0$ вытекает, что существуют движение S_1 либо движение S_2 плоскости $\mathbf{R}^2$ такие, что выполняется одно из включений $S_1K_1 \subset K_2$, $S_2K_2 \subset K_1$ [1]; там же приведены и другие подобные результаты. Из них, в частности, следует (см. также [2]), что для замкнутого множества K с площадью (мерой Жордана) F и периметром L радиус вписанного круга r и радиус описанного круга R удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{2\pi}(L-(L^2-4\pi F)^{1/2}) \le r; \quad R \le \frac{1}{2\pi}(L+(L^2-4\pi F)^{1/2})\,.$$

Приведенные результаты двумерны, однако существуют и их n-мерные обобщения [3, 4] (см. также [2]).

В настоящей статье приводятся некоторые неравенства, дающие необходимые условия для того, чтобы числа r и R являлись соответственно радиусами шаров, вписанного в измеримое по Лебегу множество и описанного вокруг этого множества.

Для того чтобы множество K можно было трансляцией поместить в множество G, необходимо выполнение тривиального неравенства $\mathrm{mes}G \ge \mathrm{mes}K$; наша задача – улучшить эту оценку. Ниже с использованием методики, предложенной в [5, 6], получены неравенства, связывающие некоторые характеристики множеств G и K, если множество K трансляцией может быть помещено в множество G; отметим, что все результаты носят n-мерный характер. Пусть D – измеримое по Лебегу ограниченное множество. Пусть $F_D(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$ – преобразование Фурье индикаторной функции множества D, т.е.

$$F_D(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \chi_D(x) e^{-i\lambda x} dx \,, \tag{1}$$

где

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in D; \\ 0 & \text{для } x \notin D \end{cases}$$

и $\lambda x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$. Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbf{R}^n$ – нуль функции $F_K(\lambda)$, т.е.

$$F_K(\delta) = 0 \,. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если существует трансляция $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такая, что $\tau(K) \subset G$, то выполняется неравенство*

$$\mathrm{mes} G - \mathrm{mes} K \geq \left| \int_G e^{-i\delta x} dx \right| . \tag{3}$$

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ – нуль функции $F_G(\lambda)$, т.е.

$$F_G(\gamma) = 0 \,. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если существует трансляция $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такая, что $\tau(K) \subset G$, то выполняется неравенство*

$$\mathrm{mes} G - \mathrm{mes} K \geq \left| \int_K e^{-i\gamma x} dx \right| . \tag{5}$$

Пусть, как обычно, $J_p(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка p, m – некоторый корень этой функции с порядком, равным $n/2$, т.е.

$$J_{n/2}(m) = 0 \,. \tag{6}$$

Обозначим через ω_n объем шара единичного радиуса в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 3. *Если $G \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество, r – радиус шара, содержащегося в G, то для любого $\mu \in \mathbf{R}^n$, для которого*

$$\|\mu\| = m \,, \tag{7}$$

выполняется неравенство

$$\mathrm{mes} G - \omega_n r^n \geq \left| \int_G e^{-\frac{i\mu x}{r}} dx \right| . \tag{8}$$

Теорема 4. *Если $G \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество, R – радиус шара, содержащего G, то для любого $\mu \in \mathbf{R}^n$, для которого справедливо равенство (7), выполняется неравенство*

$$\omega_n R^n - \mathrm{mes} G \geq \left| \int_G e^{-\frac{i\mu x}{R}} dx \right| . \tag{9}$$

Теоремы 3 и 4 дают необходимые условия для того, чтобы числа r и R являлись радиусами вписанного и описанного шаров, соответственно.

Приведем пример применения неравенства (9). Из того, что радиус Юнга множества G с диаметром d в $\mathbf{R}^n$ равен $d(n/2n+2)^{1/2}$ [2], вытекает неравенство

$$\mathrm{mes} G \leq \omega_n d^n \left(\frac{n}{2(n+1)} \right)^{n/2} - \left| \int_G e^{-\frac{i\mu x}{R}} dx \right| .$$

Тем самым получено неравенство, которое может давать и лучшую, и худшую оценки, чем хорошо известное неравенство Бибербаха–Урысона [2], дающее оценку объема множества через его диаметр. Аналогичный результат для покрытия множества правильным симплексом можно получить из (5) и теоремы Гейла [2].

2. Доказательство теоремы 1. Пусть трансляция $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такова, что $\tau(y) = y + z$ для некоторого $z \in \mathbf{R}^n$; тогда имеем

$$F_{\tau(K)}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{\tau(K)}(x) e^{-i\lambda x} dx$$
$$= (2\pi)^{-n/2} e^{i\lambda z} \int_{\mathbf{R}^n} \chi_K(y) e^{-i\lambda y} dy = e^{i\lambda z} F_K(\lambda) .$$

Следовательно, $F_{\tau(K)}(\delta) = 0$. Пусть трансляция τ такова, что $\tau(K) \subset G$. Получаем последовательно

$$\left| \int_G e^{-i\delta x} dx \right| = \left| \int_{\tau(K)} e^{-i\delta x} dx + \int_{G \setminus \tau(K)} e^{-i\delta x} dx \right|$$
$$= \left| F_{\tau(K)}(\delta) + \int_{G \setminus \tau(K)} e^{-i\delta x} dx \right| \leq \mathrm{mes}(G \setminus \tau(K)) = \mathrm{mes} G - \mathrm{mes} K .$$

Доказательство теоремы 2. Оцениваем модуль интеграла (см. правую часть неравенства (5)):

$$\left| \int_K e^{-i\gamma x} dx \right| = \left| \int_{\tau(K)} e^{-i\gamma x} dx \right| = \left| \int_G e^{-i\gamma x} dx - \int_{G \setminus \tau(K)} e^{-i\gamma x} dx \right|$$

$$= \left| F_G(\gamma) + \int_{G \setminus \tau(K)} e^{-i\gamma x} dx \right| \le \mathrm{mes}(G \setminus \tau(K)) = \mathrm{mes} G - \mathrm{mes} K\,.$$

Доказательство теорем 3 и 4. Достаточно заметить (см., например, [7, гл. 9]), что преобразование Фурье индикаторной функции шара $U_r(o)$ радиуса r с центром в начале координат лишь множителем отличается от функции Бесселя полуцелого порядка $n/2$, т.е.

$$F_{U_r(o)}(\lambda) \sim J_{n/2}(r\lambda)\,.$$

3. Полученное необходимое условие становится тем эффективнее, чем более "извилиста" граница ∂G множества G. Вообще, предложенный метод позволяет учитывать влияние границы множеств на возможность включения одного из них в другое с помощью трансляции. Отметим, что в ряде случаев нетрудно убедиться в существовании нуля функции $F_H(\lambda)$. Например, в случае симметричного относительно начала координат множества $H \subset \mathbf{R}^n$ функция $F_H(\lambda)$ является вещественнозначной. Ясно, что $\|F_H\|_{L^\infty} < +\infty$. Если бы функция $F_H(\lambda)$ была абсолютно интегрируемой, то (см. [7, гл. 11]) функция $\chi_H(x)$ была бы непрерывной; в силу полученного противоречия заключаем, что $F_H(\lambda)$ не является абсолютно интегрируемой. В то же время $F_H(\lambda)$ – интегрируемая на $\mathbf{R}^n$ функция, ибо в этом случае справедлива формула обращения преобразования Фурье (см. там же). Однако интегрируемая, но не абсолютно интегрируемая вещественнозначная функция меняет знак; так как $F_H(\lambda)$ непрерывна, то она имеет нуль.

4. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях гомотет λH множества $H \subset \mathbf{R}^n$ может быть помещенным в H с помощью трансляции. Ясно, что для выпуклого тела при $0 \le \lambda < 1$ это можно осуществить всегда; для множества H, имеющего внутреннюю точку, соответствующее включение выполняется при $\lambda \in \mathbf{R}^n$, достаточно малых по модулю.

Теорема 5. *Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое множество, $\lambda \in \mathbf{R}$, $|\lambda| < 1$. Если существует трансляция τ такая, что $\tau(\lambda G) \subset G$, то*

$$\mathrm{mes} G \ge \frac{1}{1 - |\lambda|^n} \left| \int_G e^{-i\lambda\delta y} dy \right|, \tag{10}$$

где δ – корень функции $F_G(t)$.

Теорема 5 немедленно следует из теоремы 1 (или теоремы 2) с учетом того, что для $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполняется равенство $F_{\lambda G}(t) = |\lambda|^{-n} F_G(\lambda t)$.

Из (10) следует, например, оценка. Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество, t_0 – корень функции $F_G(t)$, $\frac{t}{t_0} \in (0,1)$; тогда

$$F_G(t) \le \left(1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^n\right) \mathrm{mes} G\,. \tag{11}$$

5. В рассмотренных теоремах можно перейти к преобразованию Фурье произвольной суммируемой на $\mathbf{R}^n$ функции $g(t)$ (вместо индикаторной функции множества $\chi_G(t)$). Это соответствует переходу от "обычных" подмножеств $\mathbf{R}^n$ к "нечетким" подмножествам эвклидова пространства (о нечетких множествах см., например, [8]). Для нашей цели удобно отождествить нечеткое подмножество $A \subset \mathbf{R}^n$ с функцией принадлежности μ_A: $\mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ (в случае, если A – "обычное" множество, μ_A обращается в индикаторную функцию этого множества). Для нечетких множеств включение $A \subset B$ означает выполнение неравенства $\mu_A(t) \le \mu_B(t)$ для любого $t \in \mathbf{R}^n$, а транслят $A(z)$ нечеткого множества A на вектор $z \in \mathbf{R}^n$ – нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{A(z)}(t) = \mu(t - z)\,. \tag{12}$$

Для нечеткого множества A с $\mu_A \in L^1(\mathbf{R}^n)$ определим преобразование Фурье

$$F_A(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \mu_A(x) e^{-i\lambda x}\, dx\,. \tag{13}$$

Теорема $1'$. *Пусть G и K – нечеткие подмножества $\mathbf{R}^n$, μ_G, $\mu_K \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Если $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbf{R}^n$ – нуль функции $F_K(\lambda)$ и существует трансляция $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такая, что $\tau(K) \subset G$, то выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x))\, dx \ge \left| \int_{\mathbf{R}^n} \mu_G(x) e^{-i\delta x}\, dx \right|. \tag{14}$$

Теорема $2'$. *Пусть G и K – нечеткие подмножества $\mathbf{R}^n$, μ_G, $\mu_K \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Если $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ – нуль функции $F_G(\lambda)$ и существует трансляция $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такая, что $\tau(K) \subset G$, то выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x))\, dx \ge \left| \int_{\mathbf{R}^n} \mu_K(x) e^{-i\gamma x}\, dx \right|. \tag{15}$$

Доказательства теорем $1'$ и $2'$ аналогичны доказательствам теорем 1, 2.

6. Интересно рассмотреть вопрос о включении нечетких подмножеств многомерного тора $T^n = T \times \ldots \times T$, где T – окружность единичной длины. Так как вместо преобразований Фурье при решении этой задачи естественно воспользоваться коэффициентами Фурье, то результат усложняется: если зачастую легко убедиться в существовании нуля преобразования (см., например, п. 3), то для заданной периодической функции f может не равняться нулю ни один из ее коэффициентов Фурье. Нечеткое подмножество тора T^n отождествляется с функцией принадлежности μ_A: $T^n \to [0, +\infty)$; включение и трансляция нечетких множеств определяются, как в п. 5 (причем сложение векторов происходит, конечно, по mod1 для каждой переменной).

Как обычно, коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(T^n)$ с номером (мультииндексом) $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{Z}^n$ определяются равенством

$$c_r(f) = \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i q x}\, dx\,. \tag{16}$$

Теорема 6. *Пусть G и K – нечеткие подмножества тора T^n, μ_G, $\mu_K \in L^1(T^n)$. Если существует трансляция $\tau : T^n \to T^n$ такая, что $\tau(K) \subset G$, то для любого мультииндекса q выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbf{T}^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x))\, dx \geq |c_q(\mu_G)| - |c_q(\mu_K)|\,. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. Учитывая неравенство $\mu_K(x) \leq \mu_G(x)$, получаем последовательно

$$|c_q(\mu_G)| = \left| \int_{T^n} \mu_G(x) e^{-2\pi i q x}\, dx \right| \leq \left| \int_{T^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x)) e^{-2\pi i q x}\, dx \right|$$
$$+ \left| \int_{T^n} \mu_K(x) e^{-2\pi i q x}\, dx \right| \leq \int_{T^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x))\, dx + |c_q(\mu_K)|\,.$$

Отсюда следует (17).

Отметим, что неравенство (17) дает улучшение тривиального неравенства

$$\int_{T^n} (\mu_G(x) - \mu_K(x))\, dx \geq 0 \tag{18}$$

лишь в случае, когда

$$|c_q(\mu_G)| > |c_q(\mu_K)| \tag{19}$$

для некоторого мультииндекса $q \neq 0$. Покажем, как в некоторых случаях можно убедиться в выполнении неравенства (19). Пусть, например, G – "обычное" множество на T^1 – интервал $\left[0, \frac{\delta}{2}\right) \bigcup \left[1 - \frac{\delta}{2}, 1\right)$, $0 < \delta < 1$. Тогда для $q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ имеем $c_r(\mu_G) = \frac{1}{\pi q} \sin \pi q \delta$. Следовательно, на множестве положительной асимптотической плотности (об этом понятии см. [9, гл. III])

$$|c_{|q|}(\mu_G)| \geq \frac{a}{|q|}\,.$$

Для $\delta \in Q$ это очевидно, а для $\delta \in R\backslash Q$ вытекает из теоремы Г. Вейля о распределении дробных долей $\{q\delta\}$. Пусть $\mu_K \in \mathrm{Lip}\frac{1}{2}$ – функция на T^1; тогда из [10] следует, что асимптотическая плотность множества номеров $q \in \mathbf{Z}$, для которых

$$|c_{|q|}(\mu_K)| \geq \frac{b}{|q|}\,,$$

равна 0. Из этого следует, что для множества номеров положительной асимптотической плотности выполняется неравенство (19). Следовательно, тривиальная оценка (18) может быть улучшена. В многомерном случае подобные результаты следуют из [11].

Список литературы

[1] *Л. Сантало*, Интегральная геометрия и геометрические вероятности. Наука, Москва (1983), 360 с.

[2] *Д.М. Бураго, В.А. Залгаллер*, Геометрические неравенства. Наука, Ленинград (1980), 288 с.

[3] *A. Dinghas*, Bemerkung zu einer Verscharfung der Isoperimetrischen Ungleichungen durch H. Hadwiger. — Math. Nachr. (1948), Bd. 1, No. 5, S. 248–286.

[4] *В.И. Дискант*, Обобщение неравенства Боннезена. — Докл. АН СССР (199), т. 213, № 3, с. 519–521.

[5] *Б.Д. Котляр*, Об укладках параллелотопов и некоторых других множеств. — Сиб. мат. журн. (1984), т. 25, № 3, с. 232–235.

[6] *Б.Д. Котляр*, Плотности укладок ограниченных множеств. — Сообщ. АН Груз.ССР (1987), т. 126, № 3, с. 469–472.

[7] *С. Бохнер*, Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, Москва (1962), 360 с.

[8] *Л. Заде*, Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Мир, Москва (1976), 168 с.

[9] *А.Г. Постников*, Введение в аналитическую теорию чисел. Наука, Москва (1971), 417 с.

[10] *Б.Д. Котляр*, Коэффициенты Фурье и плотности множеств натуральных чисел. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1981), вып. 35, с. 54–61.

[11] *Б.Д. Котляр*, О коэффициентах Фурье гладких функций многих переменных. — В кн.: Исследования по теории функций многих веществ, переменных, Изд-во Ярославского ун-та, Ярославль (1980), с. 118–122.

On inscribed and described solids

B.D. Kotlyar

The conditions needed for a solid in $\mathbf{R}^n$ to be placed in another solid are derived. The inequalities for the radius of a sphere which is inscribed into solid and the radius of a sphere which is discribed around solid in $\mathbf{R}^n$ are adduced.

Про вписані та описані тіла

Б.Д. Котляр

Одержано умови, необхідні для того щоб одне тіло в $\mathbf{R}^n$ можна було занурити у інше тіло. Наведено нерівності для радіуса кулі, вписаної у тіло, і радіуса кулі, описаної навколо тіла в $\mathbf{R}^n$.