Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 4, № 1/2, с. 133–144

Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в пространствах постоянной кривизны $H^3(-1)$ и $S^3(1)$

Л.А. Масальцев

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 28 августа 1995 года

Рассматривается преобразование Бианки–Ли–Беклунда в пространственных формах $H^3(-1)$ (пространстве Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости) и $S^3(1)$ (сферическом пространстве). Получены уравнения, определяющие преобразование в глобальных координатах, и соответствующие им дифференциальные уравнения, которые задают преобразуемые поверхности постоянной внешней кривизны.

Классическое касательное преобразование Бианки–Ли–Беклунда каждой точке M поверхности S постоянной отрицательной гауссовой кривизны $-d^{-2}\sin^2\theta$ евклидова пространства R^3 ставит в соответствие точку M' другой поверхности S'. При этом выполнены следующие условия: 1) расстояние d между точками M и M' постоянно; 2) вектор MM' принадлежит обеим касательным плоскостям к поверхности S в точке M и к поверхности S' в точке M', что можно также записать в виде $(\tau_M, n) = (\tau_{M'}, n') = 0$, где τ_M,$\tau_{M'}$ – касательные векторы к геодезической MM', n и n' – векторы нормали к поверхностям S и S', соответственно в точках M и M'; 3) угол между касательными плоскостями T_MS и $T_{M'}S'$ постоянен и равен θ. Впервые такое преобразование рассматривал Л. Бианки для случая, когда угол $\theta = \pi/2$. Он доказал, что при выполнении условий 1)–3) поверхность S'также имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $-d^{-2}\sin^2\theta$. С. Ли дал аналитическую трактовку построения Бианки, а А. Беклунд обобщил преобразование Бианки на случай $\theta \neq \pi/2$ и положил начало тому обширному разделу математической физики, который называется преобразованиями Беклунда [1]. Напомним аналитическую трактовку классического преобразования Бианки–Ли–Беклунда. За основу берется дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = -\frac{\sin^2\theta}{d^2}\,, \tag{1}$$

которое характеризует поверхность $z = z(x, y)$ постоянной отрицательной гауссовой кривизны $-d^{-2}\sin^2\theta$ в декартовых координатах R^3, где $z_x = p, z_y = q, z_{xx} = r, z_{xy} = s, z_{yy} = t$. Пусть (x, y, z) и (x', y', z') – координаты точек $M \in S$ и, соответственно, $M' \in S'$, а (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q') – соответствующие элементы поверхностей. В этих обозначениях условия 1)–3) касательного преобразования Бианки–Ли–Беклунда принимают вид

$$\begin{aligned}
&(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - d^2 = 0,\\
&p(x-x') + q(y-y') - z + z' = 0,\\
&p'(x-x') + q'(y-y') - z + z' = 0,\\
&pp' + qq' + 1 - \cos\theta\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+(p')^2+(q')^2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Беклунд и Ли доказали, что данное касательное преобразование определено только на поверхностях отрицательной гауссовой кривизны $-d^{-2}\sin^2\theta$ и допускается уравнением (1), т.е. преобразованная поверхность S' вида $z' = z'(x', y')$ также удовлетворяет уравнению (1). В работе [2] Бианки показал,что для поверхностей постоянной отрицательной внешней кривизны в сферическом или гиперболическом трехмерном пространстве имеет место аналогичное преобразование. Многомерные обобщения этих результатов появились через довольно значительный промежуток времени. В 1978 году Ю.А. Аминов в работе [3] предложил многомерный вариант преобразования Бианки. Вслед за этим в работе К. Тененблат, С.Л. Тернг [4] рассмотрено обобщение преобразования Беклунда на n-мерные гиперболические (т.е. постоянной отрицательной секционной кривизны) подмногообразия в $2n-1$ -мерном евклидовом пространстве. В статье К. Тененблат [5] обобщены результаты работы [4] на случай подмногообразий в пространственных формах H^{2n-1} и S^{2n-1}. Рассуждения в работах [2, 4, 5] проведены методом присоединенного подвижного репера; при этом использованы локальные координаты, что не позволяет записать вид данного преобразования в глобальных координатах, как это, например, сделано для уравнения (1) в виде (2). Представляет интерес задача определения преобразования Беклунда в глобальных координатах в различных моделях пространственных форм наряду с соответствующим дифференциальным уравнением, описывающим поверхность постоянной внешней кривизны. При этом условия 1)–3), определяющие преобразование в трехмерных пространственных формах, будут выглядеть следующим образом:

1) расстояние $d(M, M')$ между точками $M \in S$ и $M' \in S'$ постоянно;

2) касательные векторы τ_M и $\tau_{M'}$ к геодезической MM' принадлежат обеим касательным плоскостям $T_M S$ и $T_{M'} S'$, соответственно, т.е. $(\tau_M, n) = (\tau_{M'}, n') = 0$;

3) угол между вектором Tn, являющимся параллельным переносом вектора нормали n к поверхности S в точке M в точку M', и вектором нормали n' к S' в точке M' постоянен и равен θ, т.е. $(n', Tn)_{M'} = \cos\theta |n'|_{M'} |n|_M$.

Аналитическая формулировка условий 1–3, когда поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, а $H^3(-1)$ есть в модели Пуанкаре пространство Лобачевского кривизны -1 в верхней полуплоскости с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$, приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в гиперболическом пространстве $H^3(-1)$ в модели Пуанкаре с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$ описывается системой уравнений*

$$
\begin{aligned}
&(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 - 2zz'\cosh d + {z'}^2 = 0, \\
&p(x-x') + q(y-y') - z + z'\cosh d = 0, \\
&p'(x-x') + q'(y-y') + z' - z\cosh d = 0, \\
&pp' + qq' + \cosh d - \cos\theta\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+(p')^2+(q')^2)} = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Преобразование (3) определено на поверхностях $z = z(x, y)$ постоянной отрицательной внешней кривизны $-\frac{\sin^2\theta}{\sinh^2 d}$ и допускается уравнением

$$
\frac{1+p^2+q^2+z(r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)+z(rt-s^2))}{(1+p^2+q^2)^2} = -\frac{\sin^2\theta}{\sinh^2 d}\,. \tag{4}
$$

Рассмотрим сферическую форму $S^3(1)$ в шаре $|w| < 1$, $w = (x, y, z)$, с метрикой Римана $ds^2 = \frac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}$. Пусть $z = z(x, y)$ – уравнение поверхности S постоянной отрицательной внешней кривизны $-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 d}$ $(d < \pi)$. Пусть точка $(x, y, z(x, y)) \in S$ переходит в точку $(x', y', z'(x', y'))$.

Теорема 2. *Преобразование Беклунда в сферическом пространстве $S^3(1)$, заданное для поверхности $z = z(x, y)$ с постоянной внешней кривизной $-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 d}$, определяется системой уравнений*

$$
\begin{aligned}
&(w-w')^2 - (1+|w|^2)(1+|w'|^2)\sin^2(d/2) = 0, \\
&(n, w'-w)(1+|w|^2) + (n, w)(w-w')^2 = 0, \\
&(n', w-w')(1+|w'|^2) + (n', w')(w-w')^2 = 0, \\
&2(n, w)(n', w')\sin^2(d/2) + (n, n') = |n||n'|\cos\theta\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $n = (z_x, z_y, -1)$, $n' = (z'_{x'}, z'_{y'}, -1)$, $d = const < \pi$. *Поверхность* $z = z(x, y)$ *постоянной отрицательной внешней кривизны в* $S^3(1)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$(1 + |w|^2)^2(rt - s^2) - 2(1 + |w|^2)(n, w)((1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t) + 4(n, w)^2|n|^2 = -4\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 d}|n|^4 \,. \tag{6}$$

Приведенные примеры преобразования Бианки–Ли–Беклунда в моделях Пуанкаре и Римана пространственных форм могут служить примерами преобразований, сохраняющих исходное уравнение.

1. Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в гиперболическом пространстве $H^3(-1)$

Поверхности постоянной внешней кривизны в $H^3(-1)$. Рассмотрим поверхность $z = z(x, y)$ в трехмерном пространстве $H^3(-1)$ в модели Пуанкаре с метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2$. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = z^{-2}((1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2)\,,$$

где $p = z_x$, $q = z_y$. Символы Кристоффеля Γ^k_{ij} конформно-евклидова пространства $H^3(-1)$ вычисляются следующим образом [6, с. 113]: $\Gamma^3_{33} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^1_{31} = -1/z$, $\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = 1/z$, остальные $\Gamma^k_{ij} = 0$. Касательные векторы к поверхности есть $(1, 0, p)$ и $(0, 1, q)$. Нормальный вектор $n = \frac{z(p,q,-1)}{(1+p^2+q^2)^{1/2}}$. Для нахождения второй квадратичной формы поверхности вычислим абсолютный дифференциал вектора нормали Dn. Получим, используя выражения символов Кристоффеля,

$$Dn^1 = dn^1 + \Gamma^1_{ij}n^i dx^j = \frac{zdp + dx}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} + zpd(1 + p^2 + q^2)^{-1/2},$$

$$Dn^2 = dn^2 + \Gamma^2_{ij}n^i dx^j = \frac{zdq + dy}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} + zqd(1 + p^2 + q^2)^{-1/2},$$

$$Dn^3 = dn^3 + \Gamma^3_{ij}n^i dx^j = \frac{pdx + qdy}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} - zd(1 + p^2 + q^2)^{-1/2}\,.$$

Поэтому вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} -Dndx &= -z^{-2}\sum_{i=1}^{3} Dn^i dx^i \\ &= -z^{-2}(1 + p^2 + q^2)^{-1/2}((1 + p^2 + zr)dx^2 + 2(pq + zs)dxdy \\ &\quad +(1 + q^2 + zt)dy^2)\,. \end{aligned}$$

Для произведения главных кривизн или внешней кривизны $k_1k_2 = k_{ext}$ поверхности $z = z(x, y)$ в $H^3(-1)$ после некоторых вычислений получается выражение

$$k_{ext} = \frac{1 + p^2 + q^2 + z(r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) + z(rt - s^2))}{(1 + p^2 + q^2)^2} .$$

Система уравнений, определяющих преобразование Бианки-Ли-Беклунда в $H^3(-1)$. Поверхности S постоянной внешней кривизны в $H^3(-1)$ сопоставляется другая поверхность S' так, что каждой точке $M(x, y, z) \in S$ соответствует точка $M'(x', y', z') \in S'$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) длина геодезической линии MM' постоянна и равна d; 2) геодезическая MM' касается обеих касательных плоскостей в точках M и M' поверхностей S и S', соответственно; 3) угол между параллельно перенесенной нормалью n к S в точку M' (обозначим ее через Tn) и нормалью n' к S' в точке M' равен θ. Задача состоит в том, чтобы сформулировать условия 1)–3) аналитически. Проще всего записать первое условие, т. к. сфера в гиперболическом пространстве кривизны -1 и гиперболического радиуса d есть в точности евклидова сфера [7, с. 37]:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 - 2zz' \cosh d + z'^2 = 0 . \tag{7}$$

Теперь опишем подробно геодезическую MM' в модели Пуанкаре. Эта геодезическая является дугой большого круга евклидовой сферы радиуса R с центром в точке $C(x_C, y_C, 0)$:

$$\begin{aligned}
&x = R \cos \alpha \cos t + x_C, y = R \sin \alpha \cos t + y_C, z = R \sin t,\\
&x_C = (x + x')/2 + (x - x')(z^2 - z'^2)/2l^2,\\
&y_C = (y + y')/2 + (y - y')(z^2 - z'^2)/2l^2,\\
&l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \tan \alpha = (y - y')/(x - x') .
\end{aligned}$$

Радиус евклидовой сферы равен

$$\begin{aligned}
R^2 &= (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + z^2\\
&= \frac{l^2}{4}(1 - \frac{z^2 - (z')^2}{l^2})^2 + z^2 = \frac{z^2 z'^2 \sinh^2 d}{l^2} .
\end{aligned}$$

Вычисление единичного касательного вектора геодезической в точке M дает выражение

$$\tau_M = (z/(z' \sinh d))(x - x', y - y', z - z' \cosh d) .$$

Аналогично, в точке M' единичный касательный вектор есть

$$\tau'_M = (z'/(z \sinh d))(x' - x, y' - y, z' - z \cosh d) .$$

Поэтому условие 2) может быть записано в виде двух уравнений

$$\begin{aligned} \tau_M n_M &= p(x-x') + q(y-y') - z + z' \cosh d = 0, \\ \tau_{M'} n'_{M'} &= p'(x-x') + q'(y-y') + z' - z \cosh d = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы сформулировать третье условие преобразования Беклунда, представим параллельный перенос вектора вдоль геодезической в $H^3(-1)$ в виде произведения вращения вокруг некоторой оси в R^3 и растяжения.

Лемма 1. *Параллельный перенос в $H^3(-1)$ вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ из точки $M(z, y, z)$ в точку $M'(x', y'z')$ вдоль геодезической MM' представляет собой линейное преобразование $T\lambda = (z'/z)R_\phi(l)\lambda$, где $R_\phi(l)$ есть вращение на угол ϕ вокруг оси l, лежашей в плоскости $z = 0$ и проходящей через точку $C(x_C, y_C, 0)$ перпендикулярно плоскости, которая содержит геодезическую MM'. Угол ϕ равен углу $\angle MCM'$.*

Уравнения параллельного переноса вектора $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ вдоль линии $x^k(t)$ в $H^3(-1)$ есть

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + \lambda^l \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

где значения символов Кристоффеля пространства $H^3(-1)$ рассчитаны выше. После преобразования данная система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^1}{dt} &= \lambda^1 \cot t - \lambda^3 \cos\alpha, \\ \frac{d\lambda^2}{dt} &= \lambda^2 \cot t - \lambda^3 \sin\alpha, \\ \frac{d\lambda^3}{dt} &= \lambda^1 \cos\alpha + \lambda^2 \sin\alpha + \lambda^3 \cot t\,. \end{aligned}$$

Данная система имеет следующие три линейно независимых вектора-решения:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin t(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0), \\ v_2 &= \sin t(\cos\alpha\cos t, \sin\alpha\cos t, \sin t), \\ v_3 &= \sin t(\cos\alpha\sin t, \sin\alpha\sin t, -\cos t)\,. \end{aligned}$$

Пусть вектор λ из точки M параллельно переносится в точку M' и становится вектором $T\lambda$. Для его координат получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} (T\lambda)^1 &= \frac{\sin t'}{\sin t}(\lambda^1 + (\lambda^1\cos\alpha + \lambda^2\sin\alpha)\cos\alpha(\cos\phi - 1) - \lambda^3\cos\alpha\sin\phi), \\ (T\lambda)^2 &= \frac{\sin t'}{\sin t}(\lambda^2 + (\lambda^1\cos\alpha + \lambda^2\sin\alpha)\sin\alpha(\cos\phi - 1) - \lambda^3\sin\alpha\sin\phi), \\ (T\lambda)^3 &= \frac{\sin t'}{\sin t}((\lambda^1\cos\alpha + \lambda^2\sin\alpha)\sin\phi + \lambda^3\cos\phi), \end{aligned}$$

где $\sin t = z/R$, $\sin t' = z'/R$, $\phi = t - t'$. Нетрудно проверить, что преобразование T имеет вид $T\lambda = z'/zB^{-1}AB\lambda$, где матрица

$$B = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

представляет собой матрицу преобразования от координат (x, y, z) к координатам с началом в точке C и осью l в качестве новой оси абсцисс, а матрица A определяет вращение вокруг оси l на угол ϕ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B^{-1}AB$ представляет собой вращение вокруг оси l в координатах (x, y, z) на угол ϕ.

Третье условие преобразования Бианки–Ли–Беклунда, которое выражает постоянство угла между $Tn = T(p, q, -1)$ и $n' = (p', q', -1)$, получает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(z')^{-2}\frac{\sin t'}{\sin t}(pp' + qq' + 1 + ((p\cos\alpha + q\sin\alpha)(p'\cos\alpha + q'\sin\alpha) + 1) \times \\
&(\cos(t' - t) - 1) + ((p' - p)\cos\alpha + (q' - q)\sin\alpha)\sin(t' - t)) \\
&= \cos\theta\frac{|n'||n|}{z'z} = \cos\theta\frac{\sqrt{1 + (p')^2 + (q')^2}}{z'}\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{z}.
\end{aligned}$$

Данное уравнение допускает упрощения. Из (8) получаем

$$\begin{aligned}
&(p\cos\alpha + q\sin\alpha)(p'\cos\alpha + q'\sin\alpha) + 1 \\
&= l^{-2}(\cosh d - 1)(z^2 + z'^2 - zz'(\cosh d - 1)), \\
&(p' - p)\cos\alpha + (q' - q)\sin\alpha = l^{-1}(z + z')(\cosh d - 1), \\
&\cos(t' - t) - 1 = -(l^2 + (z - z')^2)/2R^2, \\
&\sin(t' - t) = zz'(z + z')(\cosh d - 1)/lR^2.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(p\cos\alpha + q\sin\alpha)(p'\cos\alpha + q'\sin\alpha) + 1)(\cos(t' - t) - 1) \\
&+((p' - p)\cos\alpha + (q' - q)\sin\alpha)\sin(t' - t) = \cosh d - 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений, задающих аналитически преобразование Бианки–Ли–Беклунда в модели Пуанкаре в $H^3(-1)$, имеет вид

$$F_1 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 - 2zz'\cosh d + z'^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} &F_2 = p(x - x') + q(y - y') - z + z' \cosh d = 0, \\ &F_3 = p'(x - x') + q'(y - y') + z' - z \cosh d = 0, \\ &F_4 = pp' + qq' + \cosh d - \cos\theta \sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + (p')^2 + (q')^2)} = 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение поверхности постоянной внешней кривизны в $H^3(-1)$, удовлетворяющей условиям (9) преобразования Бианки–Ли–Беклунда. Мы можем использовать теорему 1 из работы [5], в которой К. Тененблат утверждает, что внутренняя кривизна двух многообразий, связанных псевдосферической конгруэнцией геодезических в H^{2n-1}, постоянна и равна $-1-\frac{\sin^2\theta}{\sinh^2 d}$. Поэтому в нашем случае можно утверждать, что внешняя кривизна поверхностей S и S' постоянна и равна $k_{ext} = -\frac{\sin^2\theta}{\sinh^2 d}$. Учитывая полученное уравнение для внешней кривизны поверхности S, мы приходим к уравнению (4), которому удовлетворяют как сама поверхность, так и ее образ при преобразовании.

2. Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в сферическом пространстве $S^3(1)$

Рассмотрим модель Римана $S^3(1)$ в шаре $|w| \le 1, w = (x, y, z)$, с метрикой $ds^2 = 4|dw|^2/(1+|w|^2)^2$. При этом расстояние d между точками w и w' может быть вычислено по формуле [7, гл. 3]

$$\sin^2 \frac{1}{2} d(w, w') = \frac{|w - w'|^2}{(1 + |w|^2)(1 + |w'|^2)}\,.$$

Уравнения, задающие преобразование Бианки–Ли–Беклунда в сферическом пространстве $S^3(1)$. Опишем подробно геодезическую пространства $S^3(1)$, соединяющую две различные точки w и w' в данной модели. Известно [9, § 459], что геодезическая представляет собой дугу окружности, пересекающую границу шара $|w| = 1$ в диаметрально противоположных точках. Следовательно, уравнение геодезической в $S^3(1)$, которая соединяет точки w и w', представляет собой дугу окружности

$$f(u) = (w - a)\frac{\sin(\psi - u)}{\sin\psi} + (w' - a)\frac{\sin u}{\sin\psi} + a\,,$$

где $u \in [0, \psi]$, ψ – угол между векторами $w - a$ и $w' - a$. Найдем векторы, направленные по касательным в точках w и w' к геодезической, для чего вычислим $f'(0)$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -(w - a)\cot\psi + (w' - a)\sin^{-1}\psi \\ &= \sin^{-1}\psi(w(t(\cos\psi - 1) - \cos\psi) + w'(t'(\cos\psi - 1) + 1))\,. \end{aligned}$$

Угол ψ, очевидно, удовлетворяет условию $\sin\psi/2 = |w-w'|/2R$. Подставляя в $f'(0)$ выражения для t, t', R, $\cos\psi$, получим вектор v, имеющий направление касательного вектора к геодезической в точке w: $v = (w-w')(1+|w|^2)+w(w-w')^2$. Аналогичные вычисления в точке $u = \psi$ дают выражение касательного вектора v' в точке w': $v' = (w'-w)(1+|w'|^2) - w'(w-w')^2$, $|v|^2 = |v'|^2 = (w-w')^2((1+(ww'))^2 + |w|^2|w'|^2 - (ww')^2)$. Теперь можно записать условие 2) преобразования Беклунда в следующем виде:

$$\begin{aligned}&(n, w'-w)(1+|w|^2) + (n,w)(w-w')^2 = 0,\\ &(n', w-w')(1+|w'|^2) + (n',w')(w-w')^2 = 0\,.\end{aligned}\tag{10}$$

Как и в случае $H^3(-1)$, параллельный перенос вектора в $S^3(1)$ вдоль геодезической можно представить в виде произведения вращения вокруг некоторой оси l и последующего растяжения. Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 1, и мы его опускаем.

Лемма 2. *Параллельный перенос в сферическом пространстве $S^3(1)$ вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ из точки w в точку w' вдоль геодезической ww' представляет собой линейное преобразование*

$$T\lambda = \frac{1+|w'|^2}{1+|w|^2} R_\phi(l)\lambda\,,$$

где $R_\phi(l)$ есть вращение на угол ψ вокруг оси l, которая перпендикулярна плоскости, содержащей геодезическую ww' и проходящей через точку a (центр окружности, представляющей геодезическую в данной модели). Угол ψ равен углу $\angle waw'$

Непосредственное вычисление дает для $T\lambda$ выражение

$$\begin{aligned}T\lambda = \frac{1+|w'|^2}{1+|w|^2}[w&\frac{(\alpha^2-\beta^2)|w'|^2(\lambda w) - (2\beta^2\alpha + (ww')\alpha^2 - \beta^2)(\lambda w')}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}\\ +w'&\frac{(2\beta^2\alpha - (ww')\alpha^2 - \beta^2)(\lambda w) + (\alpha^2-\beta^2)|w|^2(\lambda w')}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)} + m(\lambda m)]\,,\end{aligned}\tag{11}$$

где $\alpha = 1 + (ww')$, $\beta = (|w|^2|w'|^2 - (ww')^2)^{1/2}$, $m = [w, w']$.

Теперь можно сформулировать третье условие преобразования Беклунда в $S^3(1)$. Предварительно заметим, что выражение $(n'm)(nm)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}(n'm)(nm) &= \det(n,w,w')\det(n',w,w')^t = (nn')\beta^2 - (nw)(n'w)|w'|^2\\ &\quad -(n'w')(nw')|w|^2 + (ww')((nw)(n'w') + (nw')(n'w)).\end{aligned}$$

Вычислим скалярное произведение (Tn, n') в евклидовой метрике, подставляя в (11) вместо λ вектор n и используя выражение для $(n'm)(nm)$, а также формулы для $(nw'), (n'w)$ из (10).Получим

$$(Tn, n') = 2\frac{1+|w'|^2}{1+|w|^2}((nw)(n'w')\sin^2(d/2) + \frac{1}{2}(nn')).$$

Используем конформность метрики $S^3(1)$ с евклидовой метрикой

$$\frac{2}{1+|w|^2}|n|_{E^3} = |n|_{w\in S^3} = |Tn|_{w'\in S^3} = \frac{2}{1+|w'|^2}|Tn|_{E^3}.$$

Поэтому условие постоянства угла между Tn и n' можно записать в виде

$$(Tn, n')_{E^3} = |Tn|_{E^3}|n'|_{E^3}\cos\theta = \frac{1+|w'|^2}{1+|w|^2}|n|_{E^3}|n'|_{E^3}\cos\theta.$$

Подставив сюда вместо (Tn, n') найденное ранее выражение, окончательно получим

$$2(nw)(n'w')\sin^2(d/2) + (nn') = |n||n'|\cos\theta\,,$$

где $n = (p, q, -1), n' = (p', q', -1), |n| = \sqrt{1+p^2+q^2}$. Следовательно, в данной модели, условия 1)–3) преобразования Бианки–Ли–Беклунда в $S^3(1)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&(w-w')^2 - (1+|w|^2)(1+|w'|^2)\sin^2(d/2) = 0,\\
&(n, w'-w)(1+|w|^2) + (n, w)(w-w')^2 = 0,\\
&(n', w-w')(1+|w'|^2) + (n', w')(w-w')^2 = 0,\\
&2(n, w)(n', w')\sin^2(d/2) + (n, n') = |n||n'|\cos\theta\,. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Уравнение поверхностей постоянной внешней кривизны в $S^3(1)$. Чтобы получить выражение для внешней кривизны поверхности $z = z(x, y)$ в $S^3(1)$, воспользуемся формулой [9, § 497] для внешней кривизны поверхности конформно -евклидова пространства с метрикой $ds^2 = \lambda^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$:

$$\begin{aligned}
k_{ext} &= \lambda^2\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\\
&+ \lambda(\frac{\partial\lambda}{\partial z} - p\frac{\partial\lambda}{\partial x} - q\frac{\partial\lambda}{\partial y})\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2}\\
&+ \frac{(\frac{\partial\lambda}{\partial z} - p\frac{\partial\lambda}{\partial x} - q\frac{\partial\lambda}{\partial y})^2}{1+p^2+q^2}\,.
\end{aligned}$$

Проведя вычисления в случае $S^3(1)$ для $\lambda = \frac{1+|w|^2}{2}$, получим

$$
\begin{aligned}
k_{ext} &= \frac{(1+|w|^2)^2}{4}\frac{rt-s^2}{|n|^4} \\
&\quad -\frac{1+|w|^2}{2}(w,n)\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{|n|^4}+\frac{(w,n)^2}{|n|^2}\,.
\end{aligned}
$$

Разумеется, эту же формулу можно было использовать и в случае $H^3(-1)$. Теперь снова воспользуемся работой [5], где доказано, что псевдосферическая конгруенция в $S^n(1)$ устанавливает соответствие между многообразиями постоянной внутренней кривизны $1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 d}$. Следовательно, внешняя кривизна поверхности в случае $S^3(1)$ должна быть равна $-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 d}$.

Список литературы

[1] *Н.Х. Ибрагимов*, Группы преобразований в математической физике. Наука, Москва (1983), 280 с.

[2] *L. Bianchi*, Sopra deformationi isogonali delle superficie a curvatura costant e. — Ann. Mat. (1911), t. 18, p. 185–245.

[3] *Ю.А. Аминов*, Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского. — Укр. геом. сб. (1978), вып. 21, с. 3–5.

[4] *K. Tenenblat and C.L. Terng*, Backlund's theorem for n-dimensional submanifolds of R^{2n-1}.— Ann. Math. (1980), v. 111, p. 477–490.

[5] *K. Tenenblat*, Backlund's theorem for submanifolds of space forms and a generalized wave equation.— Bol. Soc. Brasil Mat. (1985), v. 16, p. 67–92.

[6] *Л.П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит., Москва (1948), 316 с.

[7] *А. Бердон*, Геометрия дискретных групп. Наука, Москва (1986), 300 с.

[8] *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surface. Gauthier-Villar's, Paris (1894), 512 p.

[9] *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale. V. 2, Nic. Zanichelli, Bologna (1924), 830 p.

[10] *Л.А. Масальцев*, Псевдосферические конгруэнции Бианки в E^{2n-1}. — Мат. физика, анализ, геом. (1994), т. 1, № 3/4, с. 505–512.

[11] *Л.А. Масальцев*, Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в гиперболическом пространстве $H^3(-1)$. Всерос. школа-коллоквиум по стохастическим методам геометрии и анализа. — Тез. докл., Москва, ТВП (1994), с. 77–78.

[12] *Л.А. Масальцев*, Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в сферическом пространстве. Міжнар. кон. з геометрії "в цілому". — Тез. доп., Черкаси (1995), с. 57–59.

Bianchi–Li–Backlund transformation in spaces of constant curvature $H^3(-1)$ and $S^3(1)$

L.A. Masal'tsev

Bianchi–Lie–Backlund transformation in space forms $H^3(-1)$ (Poincare model of Lobachevsky space at the upper half-plane) and $S^3(1)$ (spherical space with the Riemann metric) are considered. The conditions defining the transformation in global coordinates and the corresponding differential equations of surfaces of constant external curvature are derived.

Перетворення Бiанкi–Лi–Беклунда в просторах постiйної кривини $H^3(-1)$ i $S^3(1)$

Л.А. Масальцев

Розглянуто перетворення Бiанкi–Лi–Беклунда в просторових формах $H^3(-1)$ (просторi Лобачевського в моделi Пуанкаре у верхнiй напiвплощинi) i $S^3(1)$ (сферичному просторi). Одержано рiвняння, якi визначають перетворення в глобальних координатах, i вiдповiднi диференцiальнi рiвняння, якi задають перетворюванi поверхнi постiйної зовнiшньої кривини.