Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 4, № 1/2, с. 189–192

Вычисление энтропии боголюбовских действий некоторых абелевых групп на CAR-алгебре

В.М. Олексенко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 1 ноября 1996 года

Получена формула для энтропии боголюбовских действий абелевых групп $Z/nZ \oplus Z/nZ \oplus \ldots$ (n=2,3,...) относительно квазисвободного состояния на CAR-алгебре.

1. Недавно Кон, Нарнхофер и Тирринг [1, 2] перенесли понятие энтропии Колмогорова–Синая на автоморфизмы C^*-динамических систем. Более подробную информацию и библиографию, связанную с этой деятельностью, можно найти в монографиях [3, 4]. Одним из важных направлений в этой области является рассмотрение конкретных моделей, в которых динамическая энтропия может быть вычислена точно или хорошо оценена. Представляется также интересным и важным расширение понятия энтропии не только для одного автоморфизма, как это сделано в работах Кона, но и для групп автоморфизмов по аналогии с эргодической теорией. Так, в работе [5] была найдена явная формула энтропии для боголюбовских автоморфизмов алгебр канонических антикоммутационных соотношений (CAR-алгебры). Аналогичный результат уже для групп Z^n, $n = 2, 3, \ldots$, был доказан в работе Безуглого и Голодца [6].

В этой статье мы получим формулу для энтропии, но уже для боголюбовских действий не являющихся свободными абелевых групп $\Gamma = Z/kZ \oplus Z/kZ \oplus \ldots$, где $k = 2, 3, \ldots$, относительно квазисвободного состояния на CAR-алгебре. Энтропийные свойства действий таких групп изучены мало даже в классическом коммутативном случае [7]. В следующей работе будут рассмотрены свойства такой энтропии и доказано, что энтропия боголюбовского действия, соответствующая сингулярному спектру, равна нулю. В дальнейшем будем полагать, что k=2.

2. Для того чтобы сформулировать основные результаты, нужны некоторые обозначения.

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ – CAR-алгебра [5], $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$, $\Gamma(n) = \bigoplus_{i=1}^{n} Z_i$, где $Z_i = Z/2Z$, $X = \hat{\Gamma}$ – дуальная группа для Γ, μ – мера Хаара на X. Пусть α – действие группы Γ на C^*-алгебре $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ (т.е. $\alpha(g) \in Aut\mathcal{A}(\mathrm{H})$, $g \in \Gamma$) такое, что $w \circ \alpha = w$, где w – квазисвободное состояние на $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ [5].

Если γ – абсолютно положительное, сохраняющее единицу отображение $\gamma : C \to \mathcal{A}(\mathrm{H})$, где C – конечномерная алгебра, то согласно [2] можно рассмотреть функции

$$H_n(\gamma) = H_w(\gamma, \alpha(g) \circ \gamma,\ g \in \Gamma(n)),$$

которые являются супремумом энтропий по всем абелевым моделям для $(\mathcal{A}(H), w, \alpha(g) \circ \gamma, g \in \Gamma(n))$.

Из субаддитивности $H_n(\gamma)$ [2] следует, что $H_{n+1} \leq 2H_n(\gamma)$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} H_n(\gamma)$.

Определение. *Энтропию действия α группы Γ относительно состояния w на C^*-алгебре $\mathcal{A}(H)$ определим как*

$$h_w(\alpha) = \sup_{\gamma} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} H_n(\gamma).$$

Пусть U – представление группы Γ на гильбертовом пространстве H, тогда U можно разложить в прямую сумму одномерных неприводимых представлений: $U = \int\limits_X \oplus U_x d\nu(x)$, где ν – борелевская мера на $X = \hat{\Gamma}$. Очевидно, что ν можно представить в виде $\nu = \nu_a + \nu_c$, где ν_a – борелевская мера на X, абсолютно непрерывная относительно меры Хаара μ на X, и ν_c – сингулярная мера на X относительно μ. Тогда U распадается в прямую сумму дизъюнктных представлений $U = U_a \oplus U_c$, где представление U_a действует на пространстве H_a и U_c действует на H_c. Представление U_a называется абсолютно непрерывной частью представления U, а U_c – его сингулярной частью.

Разложим теперь представление U_a в прямую сумму одномерных представлений $U_a = \int\limits_X \oplus U_x d\nu_a(x)$. Тогда гильбертово пространство H_a тоже может быть представлено в виде прямой суммы гильбертовых пространств : $H = \int\limits_X \oplus H_x d\nu_a(x)$. Рассмотрим теперь борелевскую функцию $m(U_a)(x) = \dim H_x$, которая называется функцией кратности представления U_a. В дальнейшем будем обозначать $m(U)(x) = m(U_a)(x)$.

Сформулируем основной результат. Пусть $A = \lambda 1$, $\ 0 \leq \lambda \leq 1$; соответствующее квазисвободное состояние w_A на $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ будем обозначать w_λ.

Теорема 1. *Если U – унитарное представление Γ на гильбертовом пространстве H и $0 \leq \lambda \leq 1$, то*

$$h_{w_\lambda}(\alpha_U) = (\eta(\lambda) + \eta(1-\lambda)) \int\limits_X m(U)(x) d\mu(x),$$

где $\eta(t) = -t \log t,\ 0 \leq t \leq 1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случаи, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, могут быть рассмотрены, как и в теореме 6.1 [5]. Положим, что $0 < \lambda < 1$. Будем рассматривать энтропию $h_{w_\lambda}(\alpha_U)$ как отображение, которое ставит в соответствие функции кратности $m(U)$ представления U число $t(m(U)) = \frac{1}{S(w_\lambda)} h_{w_\lambda}(\alpha_U(m(U)))$, где $S(w_\lambda) = \eta(\lambda) + \eta(1-\lambda)$. Дальнейшее доказательство опирается на лемму.

Лемма. *Пусть S – аддитивная полугруппа функций $f : X \to \mathbf{N} \bigcup 0$, измеримых относительно меры Хаара на X, $\mathbf{1}$ – постоянная функция на X, которая равна единице, и T_n – отображение $T_n : S \to S\ \ (n \in \mathbf{N})$ такое, что $(T_n f)(x) = \sum\limits_{g \in \Gamma(n)} f(g+x),\ x \in X$. Пусть отображение $t : S \to \mathbf{R}^+$ удовлетворяет условиям:*

(i) $t(n\mathbf{1}) = n$,

(ii) $f \leq g \Rightarrow t(f) \leq t(g)$,

(iii) $f_j \nearrow f \Rightarrow t(f_j) \nearrow t(f), \quad j \in \mathbf{N}$,

(iv) $t(T_n f) = 2^n t(f)$,

(v) $t(f) = t(g)$, *если* $f = g (mod\ 0)$ *относительно меры Хаара.*

Тогда

$$t(f) = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

Если S состоит из функций кратности $f(x) = m(U)(x)$, то можно доказать, что $t(m(U))$ обладает свойствами (i) – (v). Теперь из леммы следует теорема.

Сформулируем теорему в предположении, что A имеет чисто дискретный спектр. В целях экономии места не будем доказывать этот более общий результат.

Пусть оператору A отвечает измеримая операторная функция $A(x)$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leq A \leq 1$ – оператор с чисто точечным спектром, действующий на H, U – унитарное представление Γ на H, коммутирующее с A. Тогда*

$$h_{w_A}(\alpha_U) = \int\limits_X Tr(\eta(A(x)) + \eta(1 - A(x))) d\mu(x).$$

Список литературы

[1] *A. Connes and E. Störmer*, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras. — Acta Math. (1975), v. 134, p. 289–306.

[2] *A. Connes, H. Narnhofer, and W. Thirring*, Dynamical entropy of C^*-algebras and von Neumann algebras. — Commun. Math. Phys. (1987), v. 112, p. 691–719.

[3] *F. Benatti*, Deterministic chaos in infinite quantum systems. Springer, Berlin–Heidelberg (1993), 610 p.

[4] *M. Ohya and D. Petz*, Quantum entropy and its use. Springer, Berlin–Heidelberg (1993), 420 p.

[5] *E. Störmer and D. Voiculescu*, Entropy of Bogoliubov automorphisms of the canonical anticommutation relations. — Commun. Math. Phys. (1990), v. 133, p. 521–542.

[6] *S.I. Bezuglyi and V.Ya. Golodets*, Dynamical entropy for Bogoliubov actions of free abelian groups on the CAR-algebra. — Ergod. Theory and Dynam. Syst. (1987), v. 17, p. 1–26.

[7] *D.S. Ornstein and B. Weiss*, Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. — J. d'Analyse Math. (1987), v. 48, p. 1–141.

Calculation of the entropy for Bogolubov actions of some Abelian groups on CAR-algebra

V.M. Oleksenko

The formula for the entropy of Bogoliubov actions Abelian groups $Z/nZ \oplus Z/nZ \oplus \ldots$ $(n = 2, 3, \ldots)$ with respect to quasifree state on CAR-algebra is received.

Обчислення ентропії боголюбівських дій деяких абелевих груп на CAR-алгебрі

В.М. Олексенко

Одержано формулу для ентропії боголюбівських дій абелевих груп $Z/nZ \oplus Z/nZ \oplus \ldots$ (n=2,3,...) відносно квазівільного стану на CAR-алгебрі.