Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 3, с. 278–285

Выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского

А.А. Борисенко, Д.И. Власенко

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Alexander.A.Borisenko@univer.kharkov.ua
E-mail: borisenko@geom.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 ноября 1996 года

Рассматриваются погруженные полные общие гиперповерхности пространства Лобачевского L^n, где $n \geq 3$. Оказывается, что поверхность, локально выпуклая и локально опорная на орисферу, будет либо компактом, гомеоморфным сфере, либо орисферой.

1. Введение

Выпуклые гиперповерхности в пространстве Лобачевского устроены сложнее, чем в евклидовом пространстве. Известно, что любая выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского гомеоморфна области на сфере и для всякой области на сфере существует гомеоморфная ей выпуклая поверхность [1]. Дополнительное требование локальной опорности на орисферу в каждой точке дает два топологически различных типа поверхностей. В частности Курье [2] в 1989 году доказал следующее утверждение: M – полное связное класса C^∞ риманово многообразие, чья размерность $n \geq 2$; $f : M \to L^{n+1}$ – C^∞ изометрическое погружение и в каждой точке M все главные кривизны не меньше 1. Если существует точка $p \in M$, в которой все главные кривизны больше 1, то M – компактная выпуклая гиперповерхность, диффеоморфная S^n.

Из требования на главные кривизны следует, что в каждой точке поверхности существует локально опорная орисфера [2, с. 421]. Аналогичный результат справедлив для общих локально выпуклых гиперповерхностей. В этой статье доказана

Теорема. *Пусть* $\overline{M}$ *–* n*-мерное многообразие, такое что:*
(1) f *– погружение* $\overline{M}$ *в* L^{n+1},

(2) *в каждой точке локально выпукло,*

(3) *в каждой точке локально опирается на орисферу,*

(4) *полное в индуцированной метрике,*

(5) $n \geq 2$,

тогда $\overline{M}$ *вложено как граница выпуклого тела, и либо*

(1) $M = f(\overline{M})$ *– компакт, гомеоморфный* S^n,

либо

(2) M *– орисфера в* L^{n+1}.

Эта теорема является аналогом результата Хейенорта [3] для общих локально выпуклых гиперповерхностей евклидова пространства. Доказательство теоремы следует схеме рассуждений Хейенорта.

2. Гиперболическое пространство

В дальнейших рассуждениях будем использовать модель верхнего полупространства H^{n+1}. Эта модель пространства Лобачевского представлена областью $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1} : x_0 > 0\}$ с метрикой $g = (1/x_0^2)\Sigma_{i=0}^n dx_i^2$.

Абсолютом, т.е. множеством бесконечно удаленных точек в данной модели будет множество $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1} : x_0 > 0\} \cup \{\infty\}$. Геодезическими будут полуокружности, ортогональные абсолюту, и евклидовы прямые, ортогональные абсолюту, их назовем "вертикальными".

"Горизонтальные" гиперповерхности, определенные уравнением $x_0 = const$, будут орисферами; орисферами будут также евклидовы сферы, касающиеся абсолюта.

Если P – орисфера, то оришаром, ограниченным P, будет открытая компонента дополнения P в H^{n+1}, которая является выпуклым множеством. В случае, когда P определена уравнением $x_0 = c$, оришар, ограниченный P, определяется неравенством $x_0 > c$.

Для всякого множества M в H^{n+1} определим функцию высоты $h : M \to R$ уравнением $h(p) = x_0(p)$, т.е. высота точки определяется ее x_0-координатой. Обозначим орисферы, задаваемые уравнением $x_0 = \xi$, через H_ξ. Так как введена функция высоты, то будем говорить, что точка p над q или q под p, если $h(p) \gtrless h(q)$. Например, оришаром D_ξ, соответствующим H_ξ, будет множество точек лежащих над H_ξ.

3. Определения

В дальнейшем множества, обозначенные буквой с чертой над ними, показывают принадлежность к многообразию, а соответствующие буквы без черты – к поверхности этих множеств; в частности, $M = f(\overline{M})$.

Гомеоморфный образ n-мерной сферы и n-мерного отрезка в E^{n+1} будем называть n-сферой и n-клеткой, соответственно.

M выпукло в точке $p \in M$ относительно f, если существует окрестность U, такая что $f|_{\overline{U}}$ – гомеоморфизм и $f(\overline{U})$ лежит на границе выпуклого тела.

Поверхность в пространстве Лобачевского глобально опирается на орисферу в точке поверхности p, если p лежит на границе оришара, замыкание которого содержит поверхность.

Поверхность в пространстве Лобачевского локально опирается на орисферу в точке поверхности p, если существует поверхность F, содержащая некоторую окрестность точки p, и эта орисфера глобально опорна для F.

Назовем множество в пространстве Лобачевского h-выпуклым, если для любых двух точек этого множества часть любого орицикла, соединяющего их, принадлежит множеству.

4. Леммы

Лемма 1. *Область в L^{n+1} в каждой точке границы, локально опирающаяся на орисферу, будет евклидово выпуклой.*

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы Шмидта [3, с. 241].

Следствие 1. *Тело в L^{n+1} в каждой граничной точке, локально опирающееся на орисферу, будет h-выпуклым.*

Следствие 2. *Тело в L^{n+1} в каждой граничной точке имеет локально опорную орисферу, тогда эта орисфера будет и глобально опорной.*

Лемма 2. *Пусть $f : \mathrm{M} \to L^{n+1}$ – погружение n-мерного многообразия, где M – полное в индуцированной метрике. $\overline{C}$ – открытое связное подмножество в $\overline{M}$ такое, что $f|_{\overline{C}}$ – гомеоморфизм, тогда $f|_{\overline{C}\cup\partial\overline{C}}$ будет гомеоморфизмом.*

5. Выпуклые части

Сначала проведем доказательство для поверхности в модели H^3. Не ограничивая общности, считаем опорной орисферой в граничной точке тела $O = (1, 0, 0)$ орисферу $(x_0 - \frac{1}{2})^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Существует окрестность N точки O такая, что образ N лежит на некоторой поверхности, для которой эта орисфера будет глобально опорна. Пересечем N замкнутым оришаром D_ξ, тогда $N \cap D_\xi$ разделит D_ξ на две области. Одна из них ограничена, обозначим ее $[C_\xi]$. К этому телу применим следствие 2, тогда $[C_\xi]$ глобально опирается на орисферу в каждой граничной точке. Получаем

Следствие 3. *Для каждой точки p на M существует тело K, содержащее на своей границе некоторую окрестность точки p и глобально опирающееся на орисферу в любой граничной точке.*

Обозначим границу $[C_\xi]$ в H_ξ через S_ξ, а множество граничных точек $[C_\xi]$ над H_ξ – через C_ξ. Тогда $\partial[C_\xi] = C_\xi \cup S_\xi$. Заметим, что $[C_\xi]$ – выпуклое тело как пересечение опорных оришаров. Так как $f|_{\overline{N}}$ – гомеоморфизм, то и $f|_{\overline{C_\xi}}$ – тоже гомеоморфизм.

Для орисферы H высоты z назовем C выпуклой частью высоты z, если:

(1) $C \subset M$ и точка $O \in C$,

(2) $f|_{\overline{C}}$ – гомеоморфизм,

(3) существует выпуклое тело $[C]$, глобально опирающееся на H_z и некоторую орисферу в точке O и чья граница $C \cup S$, где S – компакт в H.

Внутренность $[C]$ обозначим (C), тогда $[C] = (C) \cup C \cup S$. Обозначим границу C в M как B. Так как $0 \le \dim S \le 2$, то B — 1-сфера, отрезок или точка.

6. Доказательство теоремы при $n = 2$

Обозначим через Γ объединение всех выпуклых частей, через (Γ) – объединение соответствующих открытых множеств (C), а через $[\Gamma]$ – замыкание (Γ). Мы видели, что C_ξ – выпуклая часть, поэтому Γ не пусто. Пусть ζ обозначает инфинум высот выпуклых частей. Если рассмотреть H_ξ, где $\zeta < \xi < 1$, то часть Γ над H_ξ будет выпуклой частью C_ξ.

Так как $\Gamma \subset M$, то к $[\Gamma]$ применимо следствие 2 и в каждой точке существует глобально опорная орисфера к $[\Gamma]$. Тогда $[\Gamma]$ выпукло как пересечение опорных оришаров. Если $\zeta > 0$, то $[\Gamma]$ – ограничено, так как будет лежать в пересечении оришаров, соответствующих орисфере H_ζ, и глобально опорной орисфере в точке O.

Из определения Γ видим, что $f|_{\overline{\Gamma}}$ – гомеоморфизм и что если $\zeta = 0$, то граница $[\Gamma]$ есть поверхность Γ, и если $\zeta > 0$, то часть границы $[\Gamma]$ над H_ξ есть Γ. Поэтому, если $\zeta > 0$, то Γ будет выпуклой частью, и граница $[\Gamma]$ состоит из Γ и компактного множества Σ в H_ζ.

Рассмотрим три взаимоисключающих случая, исчерпывающих все возможности.

I. $\zeta = 0$. Γ как объединение открытых множеств открыто, а Γ, будучи границей $[\Gamma]$, замкнуто. Таким образом, Γ будет открытым и замкнутым подмножеством M; оно не пусто, что было замечено выше. Поэтому, так как M связно, то $\Gamma = M$. Тогда M есть граница трехмерного неограниченного выпуклого множества, и $f|_{\overline{M}=\overline{\Gamma}}$ – гомеоморфизм. Покажем, что M будет орисферой. Заметим, что по следствию 2 всякая локально опорная орисфера к M будет и глобально опорной. Предположим, что, кроме глобально опорной орисферы в точке p, существует в некоторой точке отличная от нее глобально опорная орисфера, но, очевидно, что на абсолюте пересечение этих орисфер будет пусто, а значит, M лежит в пересечении этих орисфер, т.е. компакте. Это противоречит неограниченности M. Тогда во всех точках M будет одна и таже опорная орисфера, с которой M совпадает.

II. $\zeta > 0$ и $\dim \Sigma < 2$. Γ – выпуклая часть, и мы можем применить лемму 2. С границей Γ совпадает Σ, и $f|_{\overline{\Gamma\cup\Sigma}}$ будет гомеоморфизмом. Поскольку $\Gamma \cup \Sigma$ есть 2-сфера, следовательно, закрытое и открытое подмножество M. Так как M связно, то $M = \Gamma \cup \Sigma$ и M будет границей выпуклого множества $[\Gamma]$.

III. $\zeta > 0$ и $\dim \Sigma = 2$. Для рассмотрения этого случая нам понадобится

Главная лемма. *C – выпуклая часть, и $\dim S = 2$, тогда либо*

(1) *C будет подмножеством другой выпуклой части,*

либо

(2) *S будет частью M, и $f|_{\overline{C}\cup\overline{S}}$ – гомеоморфизм.*

Для выпуклой части Γ первый вариант исключается, так как мы берем инфинум высот выпуклых частей. Поэтому остается второй вариант, для которого можно повторить рассуждения пункта **II**.

7. Доказательство главной леммы

Рассмотрим выпуклую часть C высоты z. Границей соответствующего тела $[C]$ будет $C \cup S$, где S является двухмерным множеством в орисфере H_z. 1-сфера B будет границей S в H_z и границей C в M. Каждая точка p на B имеет окрестность N на границе $\dot{K}$ тела K в каждой точке глобально опирающегося на орисферу по следствию 3.

Для каждой точки B существует некоторая окрестность (b) на B, т.е. (b) будет открытой частью дуги B. Так как B – компакт, то существует конечное покрытие B окрестностями (b_i). Каждая (b_i) лежит в окрестности N_i, а N_i расположена на границе тела K_i.

Далее рассмотрим точку $p \in B$; существует в M окрестность N точки p, лежащая на границе тела K. Докажем, что пересечение внутренности тела K с (C) не пусто. K и $[C]$ – выпуклые тела, поэтому содержат геодезические соединяющие точки пересечения N и C. Это пересечение не пусто, так как p лежит на границе C. А эти геодезические не лежат на границах тел в силу опорности тел K и $[C]$ на орисферы, поэтому пересечение внутренностей тел не пусто.

Пусть p произвольная точка B, $p \in (b)$. Рассмотрим плоскость ϕ, проходящую через точки O, p и Q, где точки $Q \in S \setminus B$ и Q не лежат ни в одном K;

очевидно, что это возможно. Так как Q является внутренней точкой S в H, то очевидно, геодезическая $(OQ) \subset (C)$, поэтому кривая $L = \phi \cap (C \cup S)$ будет 1-сферой. Кривой $[pp^*]$, проходящей через точку Q и связывающей точку p с другой точкой $p^* \in B$, является $\phi \cap S$. Множество $L \setminus (pp^*)$ будет простой кривой в $C \cup B$, соединяющей p и p^*, потому что $f|_{\overline{C \cup B}}$ — гомеоморфизм. Всегда можно предположить, что эта кривая не всецело в N и $p \in N$, поэтому, проходя эту кривую и стартуя из точки p, существует первая точка $U \notin N$. Точка $U \in \dot{N}$ и дуга $(pU) \subset N$; $(pU) \subset C$, и получаем, что $(pU) \subset (\phi \cap C \cap N)$.

Так как точка p внутренняя в (b), то $\phi \cap \dot{K}$ будет 1-сферой. Окрестность N является 2-клеткой в K, и мы всегда можем предположить, что она не всецело содержит $\phi \cap \dot{K}$. Тогда на $\phi \cap K$ есть точки $u, v \in \dot{N}$ и дуга $(upv) \subset (\phi \cap \dot{K})$.

Рассмотренная выше дуга $(pu) \subset (\phi \cap C \cap N)$, а значит, $(pu) \subset (\phi \cap \dot{K})$. Поэтому U будет одной из этих двух точек, пусть u, и дуга $(pU) = (pu)$.

Если 1-сфера $\phi \cap \dot{K}$ имеет точки под H, то назовем точку p точкой первого типа. Если $\phi \cap \dot{K}$ не имеет точек под H, но содержит точки, кроме p в H, то назовем p точкой второго типа. Если $\phi \cap \dot{K}$ не имеет в H точек, отличных от p, то p – точка третьего типа.

Хотя тип точки и определен относительно тела K, но несложно увидеть, что он не зависит от тела K.

Покажем невозможность третьего типа точек. Пусть p – это точка третьего типа. Тогда точка p разделяет множество $H \cap K_i$ на две связные компоненты. В силу h-выпуклости K_i и H, $K_i \cap H$ также будет для любых двух точек содержать часть орицикла, соединяющего эти точки, а орициклы в H – это евклидовы прямые. В силу того, что все евклидовы отрезки, соединяющие точки, которые расположены в различных компонентах, должны проходить через точку p, то $H \cap K_i$ должно быть отрезком, а значит, $H \cap K_i$ совпадает с (b_i), и все точки (b_i) третьего типа. Так как мы рассматриваем открытое покрытие B, то соседние дуги (b_{i-1}) и (b_{i+1}) будут содержать точки третьего типа и, значит, тоже будут евклидовыми отрезками; при этом они лежат на том же орицикле, что и (b_i), так как их пересечение с (b_i) – открытое множество, как пересечение открытых множеств. Так как рассматривается конечное покрытие, то вся граница, 1-сфера, будет лежать на орицикле, что невозможно, а значит, невозможен третий тип точек.

Докажем, что все точки (b) одного и того же типа. Пусть точка p второго типа. Возьмем точку $r \in (pv) \cap H$ и рассмотрим глобально опорную орисферу к границе $\dot{K}$ тела K, содержащего точку r. Так как r лежит на орицикле в H, то эта орисфера совпадает с H, а значит, точек K под H не будет. Тогда все точки (b) второго типа.

Рассуждения, аналогичные приведенным для третьего типа точек, показывают, что граница B состоит из одного и того же типа точек. Отсюда получаем два возможных случая:

Случай α. Все точки B первого типа. Для этого случая рассуждения Хейенорта повторяются дословно. Опишем краткую схему рассуждений. В каждой точке на B можно опуститься вниз по кривой $\phi \cap K_i$. Далее опустимся на некоторое ненулевое, допустимое для всех точек расстояние. Получаем множество C^+, чья граница S^+ лежит в $H_{z^+}, z^+ < \zeta$. И при этом $f|_{\overline{C}^+}$ — гомеоморфизм. Случай α рассмотрен.

Случай β. Точки $\overline{B}$ второго типа. Для случая β имеет место также дословный повтор рассуждений Хейенорта. Опишем основные моменты. Отступаем по $\phi \cap K_i$ для каждой точки на ненулевое расстояние, определенное для каждой точки в зависимости от ее расстояния до точки Q, и при этом остаемся в H_ζ. Получим новую границу B_1. Все точки B_1 будут также второго типа. Повторим процесс. Получим последовательность B_i, сходящуюся к точке Q. Тогда S будет частью M и $f|_{\overline{C} \cup \overline{S}}$ будет гомеоморфизмом.

8. Обобщение теоремы на L^n

Отличия от L^3 появляются при рассмотрении $\dim S$, области гиперплоскости H, ограниченной границей C. Так как $\dim \partial S = n - 2$ или 0, то $\dim S \in \{0, n-1, n-2\}$, и доказательство сводится к аналогичному рассмотрению трех случаев.

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство для L^3, но с геометрическими рассмотрениями (пересечение плоскостей, линий, орисфер), необходимыми в L^3, но более аккуратными в L^n. Это возможно, так как все леммы доказаны и для L^n.

Эта работа была частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP, грант № SPU 071006).

Список литературы

[1] *А.Д. Александров*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. ОГИЗ, Москва–Ленинград (1948), 388 с.

[2] *C. Currier*, On hypersurfaces of hyperbolic space infinitesimally supported by horospheres. — Trans. Amer. Math. Society (1989), v. 313, No. 1, p. 420–431.

[3] *J. van Heijenoort*, On localy convex manifolds. — Comm. Pure Appl. Math. (1952), v. 5, p. 223–242.

Convex surfaces in Hyperbolic space

A.A. Borisenko, D.I. Vlasenko

This paper is concerned with complete, immersed generic hypersurfaces in a Hyperbolic space L^n, where $n \geq 3$. Such surface, which is locally convex and locally supported by horosphere either compact, which is homeomorphic to a sphere or horosphere.

Опуклі поверхні в просторі Лобачевського

А.А. Борисенко, Д.І. Власенко

Розглянуто занурені повні загальні поверхні простору Лобачевського L^n, де $n \geq 3$. Виявляється, що поверхня, яка локально опукла та локально опорна на орисферу, буде або компактом, гомеоморфним сфері, або орисферою.