Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 4, № 3, с. 286–308

Интегральные представления функций в квантовом круге. I

Л.Л. Ваксман, Д.Л. Шкляров*

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: vaksman@ilt.kharkov.ua

**Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 4 января 1996 года

Рассматривается q-аналог единичного круга – простейшее однородное пространство квантовой группы $SU(1,1)$. Получены q-аналоги формулы Коши–Грина, интегрального представления собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами, функции Грина для уравнения Пуассона и формулы преобразования Фурье.

Основные результаты этой работы являются обобщениями хорошо известных интегральных представлений функций в круге. Точнее, все наши формулы будут включать параметр $q \in (0,1)$ и переходить в классические при $q \to 1$. Речь пойдет о равенствах элементов некоммутативных алгебр, которые мы, следуя традиции, называем функциями в квантовом круге.

Начнем с того, что введем основные понятия и сформулируем результаты работы. После этого будет сделан экскурс в теорию квантовых групп, что позволит мотивировать основные понятия и доказать сформулированные результаты.

Такое расположение материала призвано учесть интересы читателя, не знакомого с понятием квантовой группы, введенным В.Г. Дринфельдом в [1].

1. Функции в квантовом круге

Рассмотрим алгебру $\mathbf{C}[U]_q$ с инволюцией $*$, определяемую своей образующей z и коммутационным соотношением

$$1 - z^*z = q^2(1 - zz^*)\,. \tag{1.1}$$

Алгебра $\mathbf{C}[U]_q$ изучалась ранее, например, в [2].

Пусть T – $*$-представление этой алгебры в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbf{Z}_+)$, определяемое равенствами

$$T(z)e_m = \left(1 - q^{2(m+1)}\right)^{1/2} e_{m+1}\,,$$

$$T(z^*)e_{m+1} = \left(1 - q^{2(m+1)}\right)^{1/2} e_m, \quad T(z^*)e_0 = 0\,.$$

Введем обозначение $y = 1 - z \cdot z^*$. Очевидно, что каждый элемент $f \in \mathbf{C}[U]_q$ единственным образом разлагается в сумму

$$\sum_{i>0} z^i f_i(y) + f_0(y) + \sum_{i>0} f_{-i}(y) z^{*i}\,, \tag{1.2}$$

где $f_i \in \mathbf{C}[y]$, и что $\mathrm{Ker}T = 0$.

Алгеброй непрерывных функций в квантовом круге будем называть пополнение $\mathbf{C}(U)_q$ $*$-алгебры $\mathbf{C}[U]_q$ по норме $||T(f)||$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что всякое $*$- представление $\mathbf{C}[U]_q$ либо одномерно, либо унитарно эквивалентно представлению T. Этим оправдывается использование этого представления в определении $\mathbf{C}(U)_q$. Разумеется, $\mathbf{C}^*$-алгебра $\mathbf{C}(U)_q$ изоморфна алгебре Теплица, порожденной оператором одностороннего сдвига $e_m \mapsto e_{m+1}$ в пространстве $l^2(\mathbf{Z}_+)$ [3]. Важно отметить, что $\mathrm{spec}(y) = \{0\} \cup q^{2\mathbf{Z}_+}$.

Рассмотрим конечные суммы (1.2) с такими коэффициентами f_j, что $\sharp(\mathrm{supp} f_j) < \infty$, $\mathrm{supp} f_j \subset q^{2\mathbf{Z}_+}$. Такие суммы $f \in \mathbf{C}(U)_q$ образуют $*$- подалгебру, называемую в дальнейшем алгеброй основных функций и обозначаемую $\mathrm{Fun}_0(U)_q$. Очевидно, что $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ является бимодулем над алгеброй $\mathbf{C}[U]_q$. Наделим векторное пространство $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ слабейшей из топологий, в которых непрерывны линейные функционалы $\{(T(f)e_i, e_j)\}_{i,j \in \mathbf{Z}_+}$ – матричные элементы представления T. Пополнение $\mathrm{Fun}(U)_q$ пространства $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ назовем пространством обобщенных функций в квантовом круге. Можно сказать, что они являются формальными рядами вида (1.2), причем $\mathrm{supp} f_j \subset q^{2\mathbf{Z}_+}$. Важно отметить, что обобщенные функции образуют бимодуль над алгеброй $\mathbf{C}[U]_q$, а основные функции являются его подмодулем.

"Интеграл Лебега" определим равенством

$$\mu(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1 - q^2)\mathrm{tr}T(f(1 - zz^*)), \quad f \in \mathbf{C}(U)_q\,.$$

Если $f \in \mathrm{Fun}(U)_q$ – формальный ряд (1.2) с ограниченными на $q^{2\mathbf{Z}_+}$ коэффициентами, то

$$\mu(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1 - q^2) \sum_{m=0}^{\infty} f_0(q^{2m}) q^{2m}\,.$$

Пространство $\mathrm{Fun}(U)_q$ является бимодулем над $\mathrm{Fun}_0(U)_q$, а обобщенные функции $\psi \in \mathrm{Fun}(U)_q$ – линейными функционалами на $\mathrm{Fun}_0(U)_q$:

$$\psi : f \mapsto \mu(\psi f) .$$

Очевидно, что отображение $\mathrm{Fun}(U)_q \to (\mathrm{Fun}_0(U)_q)^*$ биективно.

Повторяя предыдущие построения применительно к алгебре $\mathbf{C}[U]_q \otimes \mathbf{C}[U]_q$, получаем пространства основных и обобщенных функций в декартовом произведении квантовых кругов. Введем обозначения $\mathrm{Fun}_0(U \times U)_q$ для пространства основных функций и $\mathrm{Fun}(U \times U)_q$ для пространства обобщенных функций.

Если $K \in \mathrm{Fun}(U \times U)_q$, то интегральный оператор $f \mapsto \mathrm{id} \otimes \mu(K(1 \otimes f))$ с ядром K отображает $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ в $\mathrm{Fun}(U)_q$. Нас будет интересовать обратная задача, состоящая в отыскании явных формул для ядра $K \in \mathrm{Fun}(U \times U)_q$ заданного линейного оператора.

В дальнейшем мы используем соглашение об обозначениях $z = z \otimes 1$, $\zeta = 1 \otimes \zeta$ образующих и пишем $\int_{U_q} K(z,\zeta) f(\zeta)\, d\mu$ вместо более точного, но менее наглядного выражения $\mathrm{id} \otimes \mu(K(1 \otimes f))$.

Примером интегрального оператора служит ортогональный проектор P в $L^2(d\mu)_q$ на пространство Бергмана $H^2(d\mu)_q$. Здесь $L^2(d\mu)_q$ – пополнение $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ по норме $\mu(f^* f)^{1/2}$, а $H^2(d\mu)_q$ – замыкание в $L^2(d\mu)_q$ линейной оболочки мономов $\{z^j\}_{j=0}^{\infty}$ (нами здесь использовано то, что $z^j \in \mathbf{C}[U]_q \subset L^2(d\mu)_q \subset \mathrm{Fun}(U)_q$). Ядро Бергмана определим равенством

$$K_q = (1 - z\zeta^*)^{-1}(1 - q^2 z\zeta^*)^{-1} . \tag{1.3}$$

Его правая часть имеет смысл потому, что $\mathrm{Fun}(U \times U)_q$ является бимодулем над алгеброй $\mathbf{C}[U]_q \otimes \mathbf{C}[U]_q \subset \mathrm{Fun}(U \times U)_q$.

Из вычислений, приведенных в [4], следует

Предложение 1.1 (С. Климек, А. Лисневский).

$$Pf = \int_{U_q} K_q(z,\zeta) f(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad f \in L^2(d\mu)_q .$$

Следствие 1.2.

$$f = \int_{U_q} K_q(z,\zeta) f(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad f \in H^2(d\mu)_q .$$

2. Дифференциальные формы и постановка $\overline{\partial}$-проблемы

Введем обозначение $\Omega_q^{(0,0)} = \mathbf{C}[U]_q$ и бимодуль $\Omega_q^{(0,1)}$ над алгеброй $\Omega_q^{(0,0)}$ с одной образующей dz^* и определяющими соотношениями

$$dz^* \cdot z = q^2 z \cdot dz^*; \quad dz^* z^* = q^{-2} z^* dz^* . \tag{2.1}$$

Дифференциальными формами с полиномиальными коэффициентами будем называть элементы $\mathbf{Z}_+$-градуированной алгебры $\Omega_q^{(0,*)} \overset{\mathrm{def}}{=} \Omega_q^{(0,0)} + \Omega_q^{(0,1)}$, определяемой соотношениями (2.1) и $dz^* dz^* = 0$.

Квантовые аналоги бимодулей дифференциальных форм, также как и алгебр функций, в более общем случае ограниченных симметрических областей (простейшей из которых и является единичный круг) построены в [5].

Нетрудно доказать существование и единственность такого оператора $\overline{\partial}$ степени 1 в $\Omega_q^{(0,*)}$, что

$$\overline{\partial} : z \mapsto 0, \quad \overline{\partial} : z^* \mapsto dz^* \tag{2.2}$$

и для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_q^{(0,*)}$

$$\overline{\partial}(\omega_1 \omega_2) = (\overline{\partial}\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \cdot \omega_1 \cdot \overline{\partial}\omega_2 . \tag{2.3}$$

Из определений следует, что для всех полиномов f

$$dz^* f(y) = f(y) dz^* , \tag{2.4}$$

$$\overline{\partial} : f(y) \mapsto -z \frac{f(y) - f(q^2 y)}{y - q^2 y} \, dz^* . \tag{2.5}$$

Так же, как $\Omega_q^{(0,*)}$, строится градуированная алгебра $\Lambda_q^{(0,*)} = \Lambda_q^{(0,0)} + \Lambda_q^{(0,1)}$ дифференциальных форм с коэффициентами из $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ и дифференцирование $\overline{\partial}$ степени 1 этой алгебры. При построении следует соотношение (2.4) включить в определение $\Lambda_q^{(0,*)}$, а соотношение (2.5) – в определение дифференцирования $\overline{\partial}$.

Пусть $M = M^{(0)} + M^{(1)}$ – $\mathbf{Z}_+$-градуированный бимодуль над алгеброй A. Оператор степени 1 $\overline{\partial} : M \mapsto M$ называют дифференцированием, если

$$\overline{\partial}(\omega m) = (\overline{\partial}\omega) m + (-1)^{\deg \omega} \omega \overline{\partial} m ,$$

$$\overline{\partial}(m \omega) = (\overline{\partial} m)\omega + (-1)^{\deg m} m \overline{\partial}\omega$$

для всех $m \in M$, $\omega \in A$.

Следуя плану, намеченному в п. 1, после дифференциальных форм с коэффициентами из $\mathbf{C}[U]_q$ и $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ нужно ввести в рассмотрение пространство $\overline{\Lambda}_q^{(0,*)} = \overline{\Lambda}_q^{(0,0)} + \overline{\Lambda}_q^{(0,1)}$ форм с обобщенными коэффициентами. Так же, как в п. 1, пространства $\overline{\Lambda}_q^{(0,0)}$, $\overline{\Lambda}_q^{(0,1)}$ получаются пополнением $\Lambda_q^{(0,0)}$, $\Lambda_q^{(0,1)}$, и оператор $\overline{\partial}$ продолжается по непрерывности на $\overline{\Lambda}_q^{(0,*)}$. По построению $\overline{\Lambda}_q^{(0,0)} = \mathrm{Fun}(U)_q$. Разумеется, $\overline{\Lambda}_q^{(0,*)}$ является бимодулем как над алгеброй $\Omega_q^{(0,*)}$, так и над алгеброй $\Lambda_q^{(0,*)}$. Оператор $\overline{\partial}$ – дифференцирование степени 1 этого бимодуля.

При $q = 1$ с каждым гладким расслоением связан градуированный бимодуль – бимодуль дифференциальных форм с коэффициентами в сечениях этого расслоения. Если расслоение голоморфно, то корректно определение дифференцирования $\overline{\partial}$. Нам понадобятся q-аналоги таких бимодулей. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$. Рассмотрим бимодуль над $\Omega_q^{(0,*)}$ с одной образующей v_λ, $\deg(v_\lambda) = 0$ и определяющими соотношениями $zv_\lambda = q^\lambda v_\lambda z$; $z^*v_\lambda = q^{-\lambda}v_\lambda z^*$; $dz^*v_\lambda = q^{-\lambda}v_\lambda dz^*$. Существует и единственно такое его дифференцирование $\overline{\partial}$ степени 1, что $\overline{\partial}v_\lambda = 0$. Очевидно, для любого полинома f

$$f(y)v_\lambda = v_\lambda f(y), \quad \overline{\partial}(f(y)v_\lambda) = (\overline{\partial}f(y))v_\lambda\,.$$

Переходя от полиномов к функциям с

$$\sharp(\mathrm{supp} f) < \infty, \quad \mathrm{supp} f \subset q^{2\mathbf{Z}_+}\,,$$

мы теряем возможность доказать эти равенства, но можем их постулировать. Получаем определение бимодуля $M_\lambda = M_\lambda^{(0)} + M_\lambda^{(1)}$ и дифференцирования $\overline{\partial}$: $M_\lambda \to M_\lambda$ степени 1. Отметим, что M_λ является бимодулем как над алгеброй $\Omega_q^{(0,*)}$, так и над алгеброй $\Lambda_q^{(0,*)}$.

Ограничимся случаем $\lambda \in \mathbf{R}$ и наделим пространства $M_\lambda^{(0)}$, $M_\lambda^{(1)}$ скалярными произведениями

$$(f_1 v_\lambda, f_2 v_\lambda) = \int\limits_{U_q} f_2^* f_1 (1 - zz^*)^{-\lambda-2}\, d\mu\,,$$

$$(f_1 v_\lambda dz^*, f_2 v_\lambda dz^*) = \int\limits_{U_q} f_2^* f_1 (1 - zz^*)^{-\lambda}\, d\mu\,.$$

Соответствующие гильбертовы пространства обозначим $\overline{M}_\lambda^{(0)}$, $\overline{M}_\lambda^{(1)}$. Пусть $f \in \overline{M}_\lambda^{(1)}$. Напомним, что $\overline{\partial}$-проблема состоит в отыскании такого элемента $u \in \overline{M}_\lambda^{(0)}$, что $\overline{\partial}u = f$ и $u \perp \mathrm{Ker}\overline{\partial}$. Требование ортогональности обеспечивает единственность решения. В частном случае $\lambda = -2$, $q = 1$, $\overline{M}_\lambda^{(0)} = L^2(d\mu)$ такая постановка задачи является традиционной [6] и ответ известен [7]:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_U \frac{1}{z - \zeta}\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \zeta z}\right) f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta\,. \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает "формула Коши–Грина"

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_U \frac{1}{(1-\bar\zeta z)^2}u(\zeta)\,d\bar\zeta\wedge d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_U \frac{1-|\zeta|^2}{(z-\zeta)(1-\bar\zeta z)}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta}\,d\bar\zeta\wedge d\zeta\,. \quad (2.7)$$

Наша цель – получить q-аналоги (2.6), (2.7).

Стандартный путь решения $\overline{\partial}$-проблемы начинается с уравнения Пуассона $\Box\omega=f$. Ядро в (2.6) получается дифференцированием функции Грина $G(z,\zeta)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta z}\right)=\frac{1}{2\cdot i}\frac{\partial G}{\partial z}\,.$$

Остается воспользоваться явной формулой для функции Грина

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\ln(|z-\zeta|^2)-\frac{1}{\pi}\ln(|1-z\bar\zeta|^2)\,, \quad (2.8)$$

которая может быть получена методом Даламбера (первое слагаемое в (2.8) является функцией влияния действительного источника, а второе – мнимого).

Перейдем к случаю $q\neq 1$.

3. Уравнение Пуассона

При $q=1$ мера $d\nu=(1-|z|^2)^{-2}d\mu$ является $SU(1,1)$-инвариантной. В случае $q\in(0,1)$ введем инвариантный интеграл ν: $\mathrm{Fun}_0(U)_q\to\mathbf{C}$ равенством

$$\int\limits_{U_q} f\,d\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{U_q} f(1-zz^*)^{-2}\,d\mu\,.$$

Пополнение векторного пространства $\mathrm{Fun}_0(U)_q=\Lambda_q^{(0,0)}$ по норме $\left(\int_{U_q} f^*f\,d\nu\right)^{\frac12}$ обозначим $L^2(d\nu)_q$, а пополнение $\Lambda_q^{(0,1)}$ по норме $\|f\,dz^*\|=\left(\int_{U_q} f^*f\,d\mu\right)^{\frac12}$ будем отождествлять с пространством $L^2(d\mu)_q$, введенным в п. 1.

Существенное отличие квантового круга от обычного проявляется в ограниченности оператора $\overline{\partial}$: $L^2(d\nu)_q\to L^2(d\mu)_q$, определенного на плотном в $L^2(d\nu)_q$ линейном многообразии $\mathrm{Fun}_0(U)_q$.

Предложение 3.1. *При всех* $f\in\mathrm{Fun}_0(U)_q$

$$\|\overline{\partial}f\|\le\left(\frac{q^{-2}(1+q^2)}{(1-q^2)}\right)\|f\|\,. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 5.1 второй части работы вытекает, что неравенство (3.1) достаточно установить для элементов коммутативной подалгебры $\{f(y)\} \subset \mathrm{Fun}_0(U)_q$. Из (2.5) и $\|f(q^2y)\| \le q^{-1}\|f(y)\|$ следует

$$\|\overline{\partial} f(y)\|^2 = \int\limits_{U_q} \frac{\bar{f}(y) - \bar{f}(q^2y)}{y - q^2y} z^* z \frac{f(y) - f(q^2y)}{y - q^2y}\, d\mu$$

$$\le \frac{1}{(1-q^2)^2}\|f(y) - f(q^2y)\|^2 \le \frac{(1+q^{-2})^2}{(1-q^2)^2}\|f(y)\|^2 .$$

Следствие 3.2. *Областью определения оператора* $\overline{\partial}^*$ *является все пространство* $L^2(d\mu)_q$ *и*

$$\|\overline{\partial}^* \overline{\partial} f\| \le q^{-4}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^2 \|f\| \tag{3.2}$$

при всех $f \in \mathrm{Fun}_0(U)_q$.

Неравенства (3. 1), (3. 2) позволяют продолжить по непрерывности операторы $\overline{\partial}$, $\Box = -\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ с плотного линейного многообразия основных функций $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ на все пространство $L^2(d\nu)_q$. В дальнейшем символами $\overline{\partial}$, $\Box$ обозначим эти продолжения.

Прежде, чем перейти к оценке $\|\overline{\partial} f(y)\|$ снизу, напомним обозначение интеграла Джексона

$$\int\limits_1^\infty F(t)\, d_{q^{-2}}t \stackrel{\mathrm{def}}{=} (q^{-2}-1)\sum_{m=0}^{\infty} F(q^{-2m})q^{-2m}$$

и разностного оператора D

$$D : F(t) \mapsto \frac{F(q^{-1}t) - F(qt)}{q^{-1}t - qt} .$$

Лемма 3.3. *Пусть* $\psi(t)$ *– функция на* $q^{-2\mathbf{Z}_+}$, $\sharp(\mathrm{supp}\psi) < \infty$ *и пусть* $x = y^{-1}$. *Тогда*

$$\|\psi(x)\|^2 = q^2 \int\limits_1^\infty |\psi(t)|^2\, d_{q^{-2}}t ,$$

$$\|\overline{\partial}\psi(x)\|^2 = -q^2 \int\limits_1^\infty (C\psi)(t) \cdot \overline{\psi(t)}\, d_{q^{-2}}t ,$$

где

$$C = Dx(q^{-1}x - 1)D . \tag{3.3}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Как следует из доказательства предложения 3.1

$$\|\overline{\partial}\psi(x)\|^2 = (1-q^2)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\psi(q^{-2m})-\psi(q^{-(2m+2)})\right|^2(1-q^{2m+2})q^{-2m}$$

$$= q^{-2}(q^{-2}-1)^{-2}\int_1^{\infty}|\psi(t)-\psi(q^{-2}t)|^2(1-q^2t^{-1})\,d_{q^{-2}}t$$

$$= -\int_1^{\infty}\left|\frac{\psi(t)-\psi(q^{-2}t)}{t-q^{-2}t}\right|^2\cdot t\cdot(1-q^{-2}t)\,d_{q^{-2}}t = -q^2\int_1^{\infty}(C\psi)(t)\overline{\psi(t)}\,d_{q^{-2}}t\,.$$

Предложение 3.4. *При некотором* $\mathrm{C}(q)>0$ *и всех* $f\in L^2(d\nu)_q$

$$\|\overline{\partial}f\|\geq \mathrm{C}(q)\cdot\|f\|\,. \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим ограниченный самосопряженный оператор C, определяемый равенством (3.3), в пространстве функций на $q^{-2\mathbf{Z}_+}$ с нормой $\|\psi\| = \left(q^2\int_1^{\infty}|\psi|^2\,d_{q^{-2}}t\right)^{1/2}$. Покажем, что $\mathrm{C}\leq const(q)<0$. В силу неравенства $\mathrm{C}\leq 0$ достаточно установить, что $\{0\}$ не принадлежит спектру оператора C. Но его непрерывный спектр совпадает с непрерывным спектром оператора $q^{-1}Dx^2D$, поскольку оператор $-DxD$ компактен. Непрерывный спектр $q^{-1}Dx^2D$ может быть найден явно, а отсутствие ядра $\mathrm{Ker}C=\{0\}$ устанавливается прямым вычислением. В силу леммы 3.3 $\|\overline{\partial}f(y)\|\geq \mathrm{C}(q)\|f(y)\|$, $\mathrm{C}(q)>0$. На подпространстве $f=f(y)$ неравенство (3.4) доказано. Остается также, как и в предложении 3.1, воспользоваться соображениями квантовой симметрии.

Замечание 3.5. Точная оценка $\|\overline{\partial}f\|\geq\frac{1}{1+q}\|f\|$ может быть получена с помощью результатов спектрального анализа оператора C, излагаемых в дополнении ко второй части работы.

Следствие 3.6. *При всех* $f\in L^2(d\nu)_q$ *решение уравнения Пуассона* $\Box u=f$ *существует, единственно и удовлетворяет неравенству* $||u||\leq const\,(q)||f||$.

4. Функция Грина

Метод Фурье позволяет получить функцию Грина в виде интеграла по спектру самосопряженного оператора $\Box$. Однако, в отличие от случая $q=1$, произвести интегрирование, приводящее к выражению (2.8), не удается. По-видимому, причиной этого является несогласованность действия квантовой группы $SU(1,1)$ с операцией умножения в алгебре $\mathrm{Fun}_0(U)_q^{\otimes 2}$. Выход, предложенный одним из авторов в [8], состоит в замене прежнего умножения

$$(f_1 \otimes f_2)(k_1 \otimes k_2) = f_1 k_1 \otimes f_2 k_2$$

новым, "правильным":

$$\{(f_1 \otimes f_2)(k_1 \otimes k_2)\} = f_1 k_1 \otimes k_2 f_2 \,.$$

Аналогичным образом подменяются структура алгебры в $\mathbf{C}[U]_q \otimes \mathbf{C}[U]_q$ и бимодуля $\mathrm{Fun}(U \times U)_q$ над построенными алгебрами. Например,

$$\{(f_1 \otimes f_2)(m_1 \otimes m_2)\} = f_1 m_1 \otimes m_2 f_2 \,,$$

$$\{(m_1 \otimes m_2)(f_1 \otimes f_2)\} = m_1 f_1 \otimes f_2 m_2 \,,$$

где m_1, $m_2 \in \mathrm{Fun}(U)_q$ и f_1, $f_2 \in \mathrm{Fun}_0(U)_q$, либо f_1, $f_2 \in \mathbf{C}[U]_q$.

Новые алгебры (бимодуль) будем называть алгебрами (соответственно, бимодулем) ядер интегральных операторов. "Новое" умножение будем попрежнему обозначать точкой, но, во избежание путаницы, договоримся заключать в фигурные скобки выражения, относящиеся к алгебрам и бимодулю ядер интегральных операторов. Например, $\{(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2)\}(c_1 \otimes c_2) = a_1 b_1 c_1 \otimes b_2 a_2 c_2$.

Лемма 4.1. *При всех $m \in \mathbf{Z}_+$ ряд $\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (z^* \zeta)^k (1 - \zeta^* \zeta)^m\right\}$ сходится в пространстве обобщенных функций* $\mathrm{Fun}(U \times U)_q$.

Доказательство. Из определений следует сходимость всякого нормально упорядоченного ряда $\left\{\sum_{j=0}^{\infty} z^{*j} \psi_j (1 - \zeta^* \zeta) \zeta^j\right\}$. Остается переставить множители ζ^k и $(1 - \zeta^* \zeta)^m$ с помощью коммутационных соотношений в алгебре ядер интегральных операторов.

Следствие 4.2. *При всех $m \geq 0$ корректно определено обобщенное ядро*

$$G_m = \left\{ \left((1 - z\zeta^*)^{-1} (1 - zz^*) \right)^m \left((1 - z^*\zeta)^{-1} (1 - \zeta^*\zeta) \right)^m \right\} . \qquad (4.1)$$

Прежде чем формулировать основной результат параграфа, разложим в ряд функцию Грина (2.8):

$$\ln \frac{|z - \zeta|^2}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} = \ln \left(1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} \right) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} \right)^m .$$

Очевидно, что при формальном предельном переходе $q \to 1$

$$\lim_{q \to 1} G_m = \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} \right)^m .$$

Во второй части работы доказан следующий результат (см. предложение 5.3 второй части).

Теорема 4.3. *Непрерывный оператор* $\square^{-1}$ *в пространстве* $L^2(d\nu)_q$ *совпадает на плотном линейном многообразии* $\mathrm{Fun}_0(U)_q \subset L^2(d\nu)_q$ *с интегральным оператором с ядром* $G = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{-2}-1}{q^{-2m}-1} G_m$*:*

$$\square^{-1} f = \int\limits_{U_q} G(z,\zeta) f(\zeta)\, d\nu\,.$$

Здесь $G_m \in \mathrm{Fun}(U \times U)_q$ *определено равенством (4.1).*

5. Интегрирование дифференциальных форм

Определим градуированный бимодуль "дифференциальных форм" $\Omega_q^{(1,*)} = \Omega_q^{(1,0)} + \Omega_q^{(1,1)}$ над алгеброй $\Omega_q^{(0,*)}$ с помощью его образующей $dz \in \Omega_q^{(1,0)}$ и соотношений

$$z \cdot dz = q^{-2} dz \cdot z, \quad z^* dz = q^2 dz \cdot z^*, \quad dz^* dz = -q^2 dz \cdot dz^*\,.$$

Оператор $\overline{\partial}$: $\Omega_q^{(1,*)} \to \Omega_q^{(1,*)}$ является дифференцированием степени 1 и определяется соотношением $\overline{\partial}(dz) = 0$. Интеграл $\Omega_q^{(1,1)} \to \mathbf{C}$ зададим равенством

$$\int\limits_{U_q} f\, dz dz^* = -2\pi i \int\limits_{U_q} f\, d\mu\,, \quad f \in \mathbf{C}[U]_q\,. \tag{5.1}$$

Совершенно аналогично определяется бимодуль $\Lambda_q^{(1,*)} = \Lambda_q^{(1,0)} + \Lambda_q^{(1,1)}$ дифференциальных форм с коэффициентами из $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ и его пополнение $\overline{\Lambda}_q^{(1,*)} = \overline{\Lambda}_q^{(1,0)} + \overline{\Lambda}_q^{(1,1)}$. Дифференцирование $\overline{\partial}$ по непрерывности продолжается на $\overline{\Lambda}_q^{(1,*)}$. Разумеется, бимодуль $\Lambda_q^{(1,*)}$ нам уже встречался под именем $M_{-2}(f_1 + f_2 dz = f_1 + f_2 v_{-2})$.

Если $f dz dz^* \in \overline{\Lambda}_q^{(1,1)}$ и коэффициенты f_i ряда (1.2) являются ограниченными функциями на множестве $q^{2\mathbf{Z}_+}$, то интеграл $\int_{U_q} f\, dz dz^*$ может быть определен прежней формулой (5. 1).

Во второй части работы (см. Предложение 3.3) доказана инвариантность этого интеграла при помощи равенства $\int_{U_q} f \omega_q = -2\pi i \int_{U_q} f\, d\nu$, где $\omega_q = y^{-2} dz dz^* \in \Lambda_q^{(1,1)}$ – "инвариантная" (1, 1)-форма в квантовом круге. Отметим, что $f\omega_q = \omega_q f$ для всех $\mathrm{Fun}_0(U)_q$.

В заключение, введем в рассмотрение пространство всех дифференциальных форм в квантовом круге: $\overline{\Lambda}_q = \overline{\Lambda}_q^{(0,*)} + \overline{\Lambda}_q^{(1,*)}$и операторы $* : \overline{\Lambda}_q \to \overline{\Lambda}_q$, $\overline{\partial}$: $\overline{\Lambda}_q \to \overline{\Lambda}_q$.

Инволюция $*$ в алгебре $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ определяется очевидным образом $z \mapsto z^*$, $f(y) \mapsto \overline{f(y)}$. На бимодуль обобщенных функций $\mathrm{Fun}(U)_q$ этот антилинейный оператор продолжается по непрерывности, а на $\overline{\Lambda}(U)_q$ полагаем

$$(f_0 + f_1 dz + f_2 dz^* + f_3 dz dz^*)^* = f_0^* + dz^* \cdot f_1^* + dz \cdot f_2^* + dz dz^* f_3^* .$$

Пространство $\overline{\Lambda}(U)_q$ является бимодулем как над алгеброй $\Omega_q^{(0,*)}$, так и над $\Lambda_q^{(0,*)}$. Дифференцирование $\overline{\partial}$ степени 1 этого бимодуля определим как прямую сумму дифференцирований слагаемых $\overline{\Lambda}_q^{(0,*)}$ и $\overline{\Lambda}_q^{(1,*)}$. Линейный оператор ∂ в $\overline{\Lambda}(U)_q$ зададим равенством $\partial = * \cdot \overline{\partial} \cdot *$. То есть $\partial f = (\overline{\partial} f^*)^*$ при всех $f \in \overline{\Lambda}(U)_q$.

Сформулируем и докажем q-аналог формулы Грина.

Фактор-алгебра $\mathbf{C}[\partial U]_q = \mathbf{C}[U]_q/(1 - zz^*)$ изоморфна алгебре полиномов $\mathbf{C}\left[z, \frac{1}{z}\right]$, и на ней имеется интеграл

$$\int\limits_{\partial U} f\, d\nu = \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} .$$

Это позволяет определить интеграл $\Omega_q^{(1,0)} \to \mathbf{C}$ равенством

$$\int\limits_{\partial U} dz \cdot f = 2\pi i \int\limits_{\partial U} (f \cdot z)|_{\partial U} \cdot d\nu ,$$

где под сужением на окружность ∂U понимается канонический гомоморфизм $\mathbf{C}[U]_q \to \mathbf{C}[\partial U]_q$.

Предложение 5.1 (формула Грина).

$$\int\limits_{U_q} \overline{\partial} \psi = \int\limits_{\partial U} \psi, \quad \psi \in \Omega_q^{(1,0)} . \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\psi == dz \cdot g(y) \cdot z^*$, поскольку другие слагаемые в (1.2) не вносят вклад ни в одну из частей равенства (5.2). Из определений следует, что $\overline{\partial}\psi = dz dz^* \cdot F(y)$, где

$$F(y) = g(y) - q^{-2} \frac{g(y) - g(q^{-2}y)}{y - q^{-2}y} (1 - y) . \tag{5.3}$$

Значит, $\int_{U_q} \overline{\partial} \psi = \mathrm{const} \sum_{m=0}^{\infty} F(q^{2m}) q^{2m}$. Подставляя в правую часть последнего равенства выражение (5.3) для F и приводя подобные члены, получаем, что коэффициент при $g(q^{2n})$ равен 0. Значит, $\int_{\partial U_q} dz g(y) z^* = 0$, если $g(0) = 0$. Предложение 5.1 доказано для (1, 0)-форм, принадлежащих линейному подмногообразию коразмерности 1. Осталось рассмотреть случай $\psi = dz \cdot z^*$.

6. Формула Коши-Грина

Операторы $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q$, $\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)_q$ в пространстве $\overline{\Lambda}_q$ определим равенствами

$$\partial f = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q \cdot dz, \quad \overline{\partial} f = \left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)_q \cdot dz^* .$$

Так же, как предложение 3.1, доказывается

Предложение 6.1. *При всех* $f \in \mathrm{Fun}_0(U)_q$

$$\int\limits_{U_q} \left(\frac{\partial f}{\partial z^*}\right)_q^* \left(\frac{\partial f}{\partial z^*}\right)_q (1-zz^*)^2\, d\mu \le \mathrm{const} \int\limits_{U_q} f^* f\, d\mu .$$

Обозначим через $L^2((1-zz^*)^2\, d\mu)_q$ пополнение $\mathrm{Fun}_0(U)_q$ по норме $\left(\int_{U_q} f^* f (1-zz^*)^2\, d\mu\right)^{1/2}$.

Следствие 6.2. *Оператор* $\mathrm{Fun}_0(U)_q \to \mathrm{Fun}_0(U)_q$, $f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z^*}\right)_q$ *продолжается по непрерывности до ограниченного линейного оператора*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)_q : L^2(d\mu)_q \to L^2((1-zz^*)^2\, d\mu)_q .$$

В п. 6 второй части работы будут доказаны

Предложение 6.3. *При всех* $f \in L^2((1-zz^*)^2\, d\mu)_q$ *решение* $u \in L^2(d\mu)_q \ominus H^2(d\mu)_q$ $\overline{\partial}$*-проблемы* $\overline{\partial} u = f$ *существует и единственно. Оператор*

$$\overline{\partial}^{-1} : L^2((1-zz^*)^2\, d\mu)_q \to L^2(d\mu)_q \ominus H^2(d\mu)_q$$

ограничен.

Теорема 6.4. *Непрерывный линейный оператор* $\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)^{-1}$ *на плотном линейном многообразии* $\mathrm{Fun}_0(U)_q \subset L^2((1-zz^*)^2 d\mu)_q$ *совпадает с интегральным оператором с ядром* $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q \otimes id(G)$

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{U_q} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q G(z,\zeta)\right) f(\zeta)\, d\zeta^*\, d\zeta .$$

Здесь $G \in \mathrm{Fun}(U \times U)_q$ *– функция Грина уравнения Пуассона в квантовом круге.*

Следствие 6.5. *Для всех* $f \in \mathrm{Fun}_0(U)_q$

$$f = \int\limits_{U_q} (1 - z\zeta^*)^{-1}(1 - q^2 z\zeta^*)^{-1} f(\zeta)\, d\mu$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{U_q} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q G(z,\zeta)\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta^*}\right)_q d\zeta^*\, d\zeta\,, \qquad (6.1)$$

где

$$G = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{-2}-1}{q^{-2m}-1}\left\{\Big((1 - z\zeta^*)^{-1}(1 - zz^*)\Big)^m \Big((1 - z^*\zeta)^{-1}(1 - \zeta^*\zeta)\Big)^m\right\}.$$

Доказательство следствия. Если P – ортогональный проектор в $L^2(d\mu)_q$ на подпространство $H^2(d\mu)_q$, то $f = Pf + (1-P)f$. Первый из интегралов в (6.1) равен Pf в силу предложения 1.1, а второй равен $(1-P)f$ согласно теореме 6.4.

7. Гармонические функции

По аналогии со случаем $q = 1$ введем в рассмотрение оператор b_ε сужения обобщенной функции на окружность $y = 1 - zz^* = \varepsilon$, где $\varepsilon \in q^{2\mathbf{Z}_+}$. Именно, если $u = \sum_{j>0} z^j f_j(y) + f_0(y) + \sum_{j>0} f_{-j}(y) z^{*j}$, то

$$b_\varepsilon u \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j>0} z^j f_j(\varepsilon) + f_0(\varepsilon) + \sum_{j>0} f_{-j}(q^{-2j}\varepsilon) z^{*j}\,. \qquad (7.1)$$

Мы рассматриваем правую часть как элемент пространства формальных рядов

$$\mathrm{Fun}(\partial U)_q = z\mathbf{C}[[z]] + \mathbf{C} + z^*\mathbf{C}[[z^*]]\,,$$

наделяемого в дальнейшем топологией покоэффициентной сходимости. Из определений следует, что оператор b_ε: $\mathrm{Fun}(U)_q \to \mathrm{Fun}(\partial U)_q$ непрерывен и сюръективен. Предел $bu \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon u$, если он существует, будем называть предельным значением функции $u \in \mathrm{Fun}_0(U)_q$. Важно отметить, что сужение $b|_{\mathbf{C}[U]_q}$ – это канонический гомоморфизм алгебры $\mathbf{C}[U]_q$ на ее фактор-алгебру $\mathbf{C}[\partial U]_q = \mathbf{C}[U]_q/(1 - zz^*)$. В отличие от случая $q = 1$, операторы $b_\varepsilon|_{\mathbf{C}[U]_q}$ не являются гомоморфизмами.

Нетрудно показать, что линейный оператор $\Box$: $L^2(d\nu)_q \to L^2(d\nu)_q$ продолжается по непрерывности на все пространство обобщенных функций $\mathrm{Fun}(U)_q$. Нас будет интересовать сужение b на подпространство гармонических функций $u \in \mathrm{Fun}(U)_q$, $\Box u = 0$. Во второй части работы доказаны следующие утверждения (см. предложение 8.5 второй части):

Предложение 7.1. *Для любой гармонической функции u существует предел $bu = \lim_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon u$. При всех $f \in \mathrm{Fun}(\partial U)_q$ существует единственное решение $u \in \mathrm{Fun}(U)_q$ "краевой задачи" $\Box u = 0$, $bu = f$. Оператор b^{-1}: $\mathrm{Fun}(\partial U)_q \to \mathrm{Fun}(U)_q$; b^{-1}: $f \mapsto u$ непрерывен.*

Предложение 7.2. *Пусть $\mathrm{Fun}(U\times\partial U)_q$ – пространство формальных рядов $\sum_{j>0} a_j\zeta^j + a_0 + \sum_{j>0} a_{-j}\zeta^{*j}$ с коэффициентами из $\mathrm{Fun}(U)_q$, $P \in \mathrm{Fun}(U\times\partial U)_q$,*

$$P = (1-zz^*)(1-q^{-2}z\zeta^*)^{-1}(1-z^*\zeta)^{-1}\,.$$

Непрерывный оператор b^{-1} совпадает на плотном в $\mathrm{Fun}(\partial U)_q$ линейном многообразии $\mathbf{C}[\partial U]_q$ с интегральным оператором с ядром Пуассона P:

$$u = \int\limits_{\partial U}(1-zz^*)(1-q^{-2}z\zeta^*)^{-1}(1-z^*\zeta)^{-1} bu\, d\nu, \quad d\nu = \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Опишем предельные значения bu для $u \in L^2(d\mu)_q$, $\Box u = 0$, с помощью q-аналога соболевского пространства $W_2^{-\frac{1}{2}}$. Пусть $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial U)_q$ – пополнение

$$\mathbf{C}[\partial U]_q = \left\{ f | f = \sum_{m>0} c_m z^m + c_0 + \sum_{m>0} c_{-m} z^{*m},\ c_j \in \mathbf{C} \right\}$$

по норме

$$\|f\| = \left\{ \sum_{m>0} \left(\frac{1-q^{2(m+1)}}{1-q^2} \right)^{-1} |c_m|^2 + |c_0|^2 + \sum_{m>0} \left(\frac{1-q^{-2(m+1)}}{1-q^2} \right)^{-1} |c_{-m}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Предложение 7.3. *Оператор b^{-1} изометрически отображает $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial U)_q$ в $L^2(d\mu)_q$. Подпространство $b^{-1}W_2^{-\frac{1}{2}}$ совпадает со всем пространством гармонических функций ($\Box u = 0$, $u \in L^2(d\mu)_q$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение вытекает из первого и из предложения 7.1. Напомним обозначения ([9]):

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j), \quad (a;q)_\gamma = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^\gamma;q)_\infty}, \quad \gamma \in \mathbf{C}\,,$$

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a, b; q; z \\ c \end{matrix} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} z^n, \quad |z| < 1\,;$$

$$\int\limits_0^1 f(t)\, d_q t = (1-q) \sum_{m=0}^{\infty} f(q^m) q^m\,.$$

Изометричность оператора b^{-1} достаточно проверить на степенях z^m, z^{*m}, так как они попарно ортогональны. Используя (1.1) и простейшие формулы суммирования [9], получаем

$$\|z^m\|^2 = \int_0^1 (q^2t; q^2)_m \, d_{q^2}t = \int_0^1 \frac{(q^2t; q^2)_\infty}{(q^{2+2m}t; q^2)_\infty} \, d_{q^2}t$$

$$= {}_2\Phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-2m}, q^2; q^2; q^{2(m+1)} \\ q^4 \end{matrix} \right) = \frac{1-q^2}{1-q^{2(m+1)}},$$

$$\|z^{*m}\|^2 = \int_0^1 (t; q^{-2})_m \, d_{q^2}t = \int_0^1 \frac{(q^{-2(m+1)}t; q^2)_\infty}{(q^2t; q^2)_\infty} \, d_{q^2}t$$

$$= {}_2\Phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-2m}, q^2; q^2; q^2 \\ q^4 \end{matrix} \right) = q^{2m} \frac{(q^2; q^2)_m}{(q^4; q^2)_m} = q^{2m} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^{2(m+1)}}.$$

Изометричность b^{-1} теперь следует из определения $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial U)_q$.

В этом параграфе изучались собственные функции $\Box u = \lambda u$, $\lambda = 0$. Отбросим ограничение $\lambda = 0$.

8. Собственные функции оператора $\Box$

При $q = 1$ интеграл

$$u(z) = \int_{\partial U} \left(\frac{1-|z|^2}{(1-z\bar{\zeta})(1-\bar{z}\zeta)} \right)^{-l} f(\zeta) \, d\nu, \quad d\nu = \frac{d\theta}{2\pi},$$

является собственной функцией $\Box$ (см. [10]):

$$\Box u = \lambda(l)u, \lambda(l) = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

В случае $q \in (0,1)$ роль степени P_γ ядра Пуассона $P = \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{\zeta}|^2}$ будет играть элемент $P_\gamma \in \mathrm{Fun}(U \times \partial U)_q$:

$$P_\gamma = (1-zz^*)^\gamma (z\zeta^*; q^2)_{-\gamma} \cdot (q^2z^*\zeta; q^2)_{-\gamma}. \tag{8.1}$$

Здесь $(z\zeta^*; q^2)_{-\gamma}$, $(q^2z^*\zeta; q^2)_{-\gamma}$ – q-аналоги степеней $(1-z\bar{\zeta})^{-\gamma}$, $(1-\bar{z}\zeta)^{-\gamma}$, и в силу q-биномиальной теоремы [9]

$$(z\zeta^*; q^2)_{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{2\gamma}; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n} (q^{-2\gamma}z\zeta^*)^n,$$

$$(q^2 z^* \zeta; q^2)_{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{2\gamma}; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n} (q^{2-2\gamma} z^* \zeta)^n .$$

Из предложения 7.4 второй части работы следует

Предложение 8.1. *При всех* $f \in \mathbf{C}[\partial U]_q$ *функция* $u \in \mathrm{Fun}(U)_q$,

$$u = \int_{\partial U} P_{-l}(z, \zeta) f(\zeta)\, d\nu, \quad d\nu = \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{8.2}$$

является собственным вектором оператора $\Box$

$$\Box u = \lambda(l) u, \quad \lambda(l) = -\frac{(1 - q^{-2l})(1 - q^{2l+2})}{(1 - q^2)^2} .$$

Нам понадобится стандартное обозначение [9]

$${}_r\Phi_s \left[\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_r; q; z \\ b_1, \ldots, b_s \end{array} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n \cdot (a_2; q)_n \cdot \ldots \cdot (a_r; q)_n}{(b_1; q)_n \cdot (b_2; q)_n \cdot \ldots \cdot (b_s; q)_n (q; q)_n} \left((-1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{1+s-r} \cdot z^n .$$

Следствие 8.2. *Ряд*

$$\varphi_l(y) = {}_3\Phi_2 \left[\begin{array}{c} y^{-1}, q^{-2l}, q^{2(l+1)}; q^2; q^2 \\ q^2; 0 \end{array} \right]$$

сходится в пространстве $\mathrm{Fun}(U)_q$, *и его сумма является собственной функцией оператора* $\Box$: $\Box \varphi_l = \lambda(l) \varphi_l$.

Доказательство следствия. Сходимость ряда следует из его обрыва при всех $y \in q^{2\mathbf{Z}_+}$. Остается установить равенство

$$\varphi_l(y) = \int_{\partial U} P_{-l}(z, \zeta)\, d\nu .$$

Но из определений следует, что интеграл равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{-2l}; q^2)_n^2}{(q^2; q^2)_n^2} q^{2(2l+1)n} y^{-l} z^n z^{*n} = y^{-l} \cdot {}_3\Phi_1 \left[\begin{array}{c} q^{-2l}, q^{-2l}, y^{-1}; q^2; q^{2(2l+1)} y \\ q^2 \end{array} \right] .$$

Остается воспользоваться тождеством [9]

$$b^n \cdot {}_3\Phi_1 \left[\begin{array}{c} q^{-n}, b, \frac{q}{z}; q, \frac{z}{c} \\ \frac{bq^{1-n}}{c} \end{array} \right] = {}_3\Phi_2 \left[\begin{array}{c} q^{-n}, b, \frac{bzq^{-n}}{c}; q; q \\ \frac{bq^{1-n}}{c}, 0 \end{array} \right] ,$$

заменив q на q^2, n на l, b на y^{-1}, z на $q^{2(l+1)}$, c на $q^{-2l}\cdot y^{-1}$.

Функция $\varphi_l(y)$ является q-аналогом сферической функции на гиперболической плоскости [10]:

$$\lim_{q\to 1}\varphi_l = F(-l, l+1; 1; y^{-1})\,.$$

Напомним определение q-гамма-функции [9]

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}\,.$$

Не ограничивая общность, можно определить, что

$$\operatorname{Re} l \geq -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{Im} l < \frac{2\pi}{h}\,,$$

где $h = -2\ln q$, поскольку $\lambda(l) = \lambda(-1-l)$, $\lambda\left(l + \frac{\pi i}{\ln q}\right) = \lambda(l)$.

Предложение 8.3. *Пусть* $\operatorname{Re} l < -\frac{1}{2}$, $u \in \operatorname{Fun}(U)_q$ *– собственная функция(8.2). Тогда в* $\operatorname{Fun}(\partial U)_q$

$$f = \frac{\Gamma_{q^2}^2(-l)}{\Gamma_{q^2}(-1-2l)} \lim_{\varepsilon\in q^{2\mathbf{Z}_+},\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1-l} b_\varepsilon u\,.$$

Доказательство этого предложения опирается на следующий результат, сообщенный нам Л.И. Корогодским:

Лемма 8.4. *При* $\operatorname{Re} l > -\frac{1}{2}$, $x \in q^{-2\mathbf{Z}_+}$

$$\varphi_l\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma_{q^2}(2l+1)}{(\Gamma_{q^2}(l+1))^2} x^l\,, \tag{8.3}$$

а при $\operatorname{Re} l < -\frac{1}{2}$, $x \in q^{-2\mathbf{Z}_+}$

$$\varphi_l\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma_{q^2}(-1-2l)}{(\Gamma_{q^2}(-l))^2} x^{-1-l}\,.$$

Доказательство леммы. В силу равенства $\varphi_l(y) = \varphi_{-1-l}(y)$ можно ограничиться случаем $\operatorname{Re} l > -\frac{1}{2}$. С помощью тождества [9]

$${}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, b; q; z \\ c \end{matrix}\right] = \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_n}{(c;q)_n} {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{-n}; b, \frac{bzq^{-n}}{c}; q; q \\ \frac{bq^{1-n}}{c}, 0 \end{matrix}\right]\,,$$

заменяя в нем q, b, c, z на q^2, q^{-2l}, $q^{-2(l+n)}$, $q^{2(l+1)}$ соответственно, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_l(q^{2n}) &= \frac{(q^{-2(l+n)};q^2)_n}{(q^{-2n};q^2)_n}\cdot {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-2n};q^{-2l};q^2;q^{2(l+1)} \\ q^{-2(l+n)}\end{matrix}\right] \\ &\sim q^{-2nl}\frac{(q^{2(l+1)};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\cdot {}_1\Phi_0\left[q^{-2l};q^2;q^{2(l+1)}\right] \\ &= q^{-2nl}\frac{(q^{2(l+1)};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\cdot\frac{(q^{2(l+1)};q^2)_\infty}{(q^{2(2l+1)};q^2)_\infty}\,.\end{aligned}$$

Остается сослаться на определение q-гамма-функции.

В частном случае $f=1$ предложение 8.3 вытекает из леммы 8.4. Общий случай сводится к этому частному с помощью соображений квантовой симметрии, как будет объяснено в п. 8 второй части работы.

9. Преобразование Фурье

Начнем с *нестрогих* рассуждений, приводящих к обратному преобразованию Фурье. Случай $q=1$ рассмотрен в [10]. Предложение 8.1 позволяет получать собственные функции оператора $\Box$. Можно ожидать, что его спектр в пространстве $L^2(d\nu)_q$ формируется за счет тех l, для которых $\operatorname{Re} l = -\frac{1}{2}$. В частности, спектр $\Box$ совпадает с множеством значений монотонно возрастающей функции $\lambda\left(-\frac{1}{2}+i\rho\right)$ на отрезке $\left[0,\frac{2\pi}{h}\right]$, $h=-2\ln q$.

Естественно ожидать, что "любая" функция u допускает разложение по собственным функциям $u_\rho(z)$:

$$u=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{h}} u_\rho(z)s(\rho)\,d\rho,\quad u_\rho(z)=\int\limits_{\partial U} P_{\frac{1}{2}-i\rho}(z,\zeta)f(\zeta,\rho)\,d\nu\,.$$

Здесь $s(\rho)\,d\rho$ – какая-нибудь мера. Постараемся выбрать ее так, чтобы оператор $f\mapsto u$ оказался изометрическим.

Назовем c-функцией Хариш–Чандры коэффициент при x^l в правой части формулы (8.3)

$$c(l)=\frac{\Gamma_{q^2}(2l+1)}{(\Gamma_{q^2}(l+1))^2} \tag{9.1}$$

и определим меру Планшереля $s(\rho)\,d\rho$ на $\left[0,\frac{2\pi}{h}\right]$ равенством

$$s(\rho)=\frac{1}{4\pi}\frac{he^h}{(e^h-1)}c\left(-\frac{1}{2}+i\rho\right)^{-1}\cdot c\left(-\frac{1}{2}-i\rho\right)^{-1}$$

в точном соответствии с предписаниями теории представлений [10].

Во второй части работы доказано (см. предложение 8.3 второй части)

Предложение 9.1. *Пусть*

$$f \in \mathbf{C}^{\infty}\left(\mathbf{R}/\left(\frac{2\pi}{h}\mathbf{Z}\right)\right) \otimes \mathbf{C}[\partial U]_q ,$$

т.е. $f = \sum\limits_{j>0} a_j(\rho)\zeta^j + \sum\limits_{j>0} a_{-j}(\rho)\zeta^{*j}$ *причем* $\{a_j\}_{j=-N(f)}^{N(f)}$ *– гладкие* $\frac{2\pi}{h}$*-периодические функции. Тогда*

$$\int\limits_{U_q} u^* u \, d\nu = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{h}} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta},\rho)|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi} \cdot s(\rho)\, d\rho \, .$$

Оператор $f \mapsto u$ *продолжается по непрерывности до унитарного оператора из* $L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}s(\rho)\,d\rho\right)$ *на* $L^2(d\nu)$ *(обозначим его* F^{-1} *и назовем обратным преобразованием Фурье).*

Прямое преобразование Фурье введем равенством

$$F \stackrel{\mathrm{def}}{=} (F^{-1})^{-1} = (F^{-1})^* .$$

Из определений следует, что интегральный оператор с ядром $K = \sum k_i'' \otimes k_i'$ сопряжен к интегральному оператору с ядром $K^t = \sum k_i'^* \otimes k_i''^*$. В частности, оператор $F = (F^{-1})^*$ является интегральным, а его ядро $P^t_{\frac{1}{2}+i\rho} \in \mathrm{Fun}(\partial U \times U)_q$ равно

$$P^t_{\frac{1}{2}+i\rho} = (q^2 z^* \zeta; q^2)_{\frac{1}{2}+i\rho} (z\zeta^*; q^2)_{\frac{1}{2}+i\rho} (1-\zeta\zeta^*)^{\left(\frac{1}{2}+i\rho\right)} . \qquad (9.2)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 9.2. *Интегральные преобразования*

$$u(z) \mapsto \int\limits_{U_q} P^t_{\frac{1}{2}+i\rho}(z,\zeta) u(\zeta)\, d\nu ,$$

$$f(e^{i\theta},\rho) \mapsto \int\limits_0^{\frac{2\pi}{h}} \int\limits_0^{2\pi} P_{\frac{1}{2}-i\rho}(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta},\rho)\, \frac{d\theta}{2\pi} \cdot s(\rho)\, d\rho$$

продолжаются по непрерывности с плотных линейных многообразий $u \in \mathbf{C}[U]_q \subset L^2(d\nu)_q$, $f \in \mathbf{C}^\infty\left(\mathbf{R}/\left(\frac{2\pi}{h}\mathbf{Z}\right)\right) \otimes \mathbf{C}[\partial U]_q \subset L^2(s(\rho)\,d\rho) \otimes L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, *до взаимно обратных унитарных операторов*

$$F : L^2(d\nu)_q \to L^2(s(\rho)\,d\rho) \otimes L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right),$$

$$F^{-1} : L^2(s(\rho)\,d\rho) \otimes L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right) \to L^2(d\nu)_q\,.$$

Здесь $P^t_{\frac{1}{2}+i\rho}$, $P_{\frac{1}{2}-i\rho}$ *– ядра (9.3), (8.1), а* $s(\rho)\,d\rho$ *– мера Планшереля (9.2), (9.1).*

Дополнение (второй параметр деформации и квантование по Березину)

Здесь будет получено более общее двухпараметрическое квантование круга, рассмотренное в [4].

Пусть $q \in (0,1)$, $\mu \in \mathbf{R}$. Следуя [4], рассмотрим алгебру с инволюцией $\Im_{\mu,q^2}$ с одной образующей z и определяющим соотношением

$$1 - z^*z = q^2(1 - zz^*) + \mu(1 - zz^*)(1 - z^*z)\,.$$

В [4] алгебра $\Im_{\mu,q^2}$ служила исходным объектом при построении двухпараметрического квантования единичного круга. Мы же до сих пор ограничивались однопараметрической деформацией $\Im_{0,q^2}$ алгебры полиномов и соответствующей однопараметрической деформацией квантового круга.

Покажем, что алгебры $\Im_{\mu,q^2}$ могут быть получены с помощью квантования по Березину из $\mathbf{C}[U]_q \cong \Im_{0,q^2}$* (надеемся, что наш подход позволит получить двухпараметрические квантования ограниченных симметрических областей в $\mathbf{C}^n$).

Прежде всего рассмотрим линейный функционал ν_α: $\mathbf{C}[U]_q \to \mathbf{C}$; $\alpha > 0$, являющийся q-аналогом интеграла по мере $2\alpha(1 - |z|^2)^{2\alpha+1} \cdot d\nu$:

$$\int\limits_{U_q} f\,d\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (1 - q^{4\alpha})\operatorname{tr}\left(T(f \cdot (1 - zz^*)^{2\alpha})\right)\,.$$

Пополнение $\mathbf{C}[U]_q$ по норме $\|f\| = \left(\int\limits_{U_q} f^* f\,d\nu_\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ будем обозначать как $L^2_{q,\alpha}$, а замыкание линейного многообразия $\mathbf{C}[z] \subset L^2_{q,\alpha}$ – через $H^2_{q,\alpha}$.

*В свою очередь, к определению ковариантной алгебры $\mathbf{C}[U]_q$ можно прийти, используя построение препринта [5].

Для любого элемента $\psi \in \mathbf{C}[U]_q$ оператор $\mathbf{C}[U]_q \to \mathbf{C}[U]_q$, $f \mapsto \psi f$ продолжается по непрерывности до ограниченного линейного оператора в $L^2_{q,\alpha}$ (в самом деле, из $\psi^*\psi \le C$ следует, что

$$\|\psi f\|^2 = (1-q^{4\alpha})\mathrm{tr}\left(T(f^*\psi^*\psi f(1-zz^*)^{2\alpha})\right)$$

$$= (1-q^{4\alpha})\mathrm{tr}\left(T(\psi^*\psi f(1-zz^*)^{2\alpha})f^*\right)$$

$$\le C(1-q^{4\alpha})\mathrm{tr}\left(T(f(1-zz^*)^{2\alpha})f^*\right) \le C\cdot\|f\|^2).$$

Следовательно, корректно определен оператор Теплица $\hat{\psi}$: $H^2_{q,\alpha} \to H^2_{q,\alpha}$; $\hat{\psi}$: $f \mapsto P_{q,\alpha}\psi f$, где $P_{q,\alpha}$ – ортопроектор в $L^2_{q,\alpha}$ на подпространство $H^2_{q,\alpha}$.

Согласно подходу Ф.А. Березина, при квантовании "символу" ψ сопоставляется оператор $\hat{\psi}$. Основным объектом нашего дальнейшего исследования будет алгебра операторов в $H^2_{q,\alpha}$, порожденная операторами Теплица $\hat{\psi}$. Рассмотрим ее как абстрактную алгебру с инволюцией. Мы хотим получить описание этой алгебры с помощью образующих и соотношений между ними.

Элемент $\hat{z}$ порождает алгебру с инволюцией, так как $\psi_{ij} = z^{*i}z^j$, $i, j \in \mathbf{Z}_+$ – базис векторного пространства $\mathbf{C}[U]_q$ и $\hat{\psi}_{ij} = \hat{z}^{*i}\hat{z}^j$, $i, j \in \mathbf{Z}_+$ (отметим, что отображение $\psi \mapsto \hat{\psi}$ не является гомоморфизмом алгебр). Получим полный список соотношений, связывающих $\hat{z}$ и $\hat{z}^*$ (это будет одно соотношение).

Из определения нормы в $H^2_{q,\alpha}$ и из простейших свойств q-гамма-функции следует, что

$$\|z^m\|^2 = \frac{(q^2;q^2)_m}{(q^{4\alpha+2};q^2)_m}.$$

Это позволяет получить явную формулу для ядра $\mathrm{K}_{2\alpha}$ интегрального оператора $\mathrm{P}_{q,\alpha}$:

$$\mathrm{K}_{2\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^{4\alpha+2};q^2)_m}{(q^2;q^2)_m}(z\otimes\zeta^*)^m = {}_1\Phi_0\left(\begin{array}{c} q^{4\alpha+2}; q^2; z\otimes\zeta^* \\ - \end{array}\right).$$

Теперь нетрудно описать действие операторов $\hat{z}$, $\hat{z}^*$ на элементы базиса $\{z^m\}_{m\ge 0}$ пространства $H^2_{q,\alpha}$. Имеем

$$\hat{z} : z^m \mapsto z^{m+1},\ m \ge 0;\ \hat{z}^* : z^m \mapsto \frac{1-q^{2m}}{1-q^{4\alpha+2m}} z^{m-1},\ m \ge 1;\ \hat{z}^* : 1 \mapsto 0.$$

Значит, полагая $\mu = -(1-q^2)q^{4\alpha}/(1-q^{4\alpha})$, получаем

$$(1-\hat{z}\hat{z}^*)^{-1} : z^m \mapsto (q^{-2m} - q^{4\alpha})/(1-q^{4\alpha})z^m,$$

$$(1-\hat{z}^*\hat{z})^{-1} : z^m \mapsto (q^{-2m-2} - q^{4\alpha})/(1-q^{4\alpha})z^m,$$

$$(1-\hat{z}\hat{z}^*)^{-1} = q^2(1-\hat{z}^*\hat{z})^{-1} + \mu\,.$$

Наконец,

$$1-\hat{z}^*\hat{z} = q^2(1-\hat{z}\hat{z}^*) + \mu(1-\hat{z}\hat{z}^*)(1-\hat{z}\hat{z}^*)\,.$$

(Используя градуировку deg$\hat{z}=1$, deg$\hat{z}^*=-1$ и неприводимость алгебраической кривой

$$x_1 = q^2\cdot x_2 + x_1x_2\,,$$

легко показать, что любое другое соотношение между образующими $\hat{z}$, $\hat{z}^*$ является следствием найденного соотношения.)

В заключение отметим, что наши построения доказывают ковариантность алгебр $\Im_{\mu,q^2}$ при всех $\mu\in\mathbf{R}$, хотя у нас

$$\mu = -(1-q^2)q^{4\alpha}/(1-q^{4\alpha}) < 0\,.$$

Дело в том, что "ковариантность" означает согласованность умножения и действия квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q su(1,1)$[4]. Следовательно, "ковариантность" сводится к проверке равенств, обе части которых аналитически зависят от параметра μ.

Заключительные замечания

Разумеется, полученные результаты допускают обобщения на однородные пространства U более сложных групп G, скажем, $G=SU(m,n)$. Алгебра $\mathbf{C}[\partial U]_q$ перестает быть коммутативной, и, следовательно, возрастает роль нестандартного умножения в алгебре ядер, введенного нами в п. 4.

С точки зрения теории базисных гипергеометрических рядов [9] предметом нашего исследования были производящие функции, которые являлись элементами некоммутативных алгебр. Наиболее известный пример таких "функций" представляет q- бином Ньютона: если $ab=qba$, то

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}b^k a^{n-k}\,.$$

Список литературы

[1] *В.Г. Дринфельд*, Квантовые группы. — Зап. науч. семин. ЛОМИ (1986), т. 155, с. 18–49.

[2] *G. Nagy and A. Nica*, On the "quantum disk" and a "non-commutative circle.", Algebraic methods in operator theory, R.E. Curto and P.E. Jorgensen (Eds.), Birkhauser, Boston (1994), p. 276–290.

[3] *B. Blackadar,* K-theory for operator algebras. Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1986).

[4] *S. Klimek and A. Lesniewski,* A two-parameter quantum deformation of the unit disk. — J. Funct. Anal. (1993), v. 115, p. 1–23.

[5] *S. Sinel'shchikov and L. Vaksman,* On q-analogues of bounded symmetric domains and Dolbeault complexes. Preprint (to be published).

[6] *М. Билз, Ч. Фефферман, Р. Гроссман,* Строго псевдовыпуклые области в $\mathbf{C}^n$. Мир, Москва (1987).

[7] *P. Charpentier,* Formules explicites pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial} u = f$ dans le boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$. — Ann. Inst. Fourier (1980), v. 30, p. 121–154.

[8] *Л.Л. Ваксман,* Гармонический анализ и квантовые группы. В сб: 16-я Всесоюз. школа по теории операторов в функциональных пространствах, Н. Новгород, (1992), с. 57–76.

[9] *Г. Гаспер, Р. Рахман,* Базисные гипергеометрические ряды. Мир, Москва (1993).

[10] *С. Хелгасон,* Группы и геометрический анализ. Мир, Москва (1987).

Integral representations of functions in the quantum disk. I

L.L. Vaksman, D.L. Shklyarov

A q-analogue of the unit disk – the simplest homogeneous space of the quantum group $SU(1,1)$ is considered. q-analogues of the Cauchy–Green formula, the integral representation of eigen functions of the Laplace–Beltrami operator, the Green function for the Poisson equation and the formula of the Fourier transformation are given.

Інтегральні зображення функцій в квантовому крузі. I

Л.Л. Ваксман, Д.Л. Шкляров

Розглядається q-аналог одиничного круга – найпростіший однорідний простір квантової групи $SU(1,1)$. Отримано q-аналоги формули Коші–Гріна, інтегрального зображення власних функцій оператора Лапласа–Бельтрамі, функції Гріна для рівняння Пуассона та формули перетворення Фур'є.