Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 3, с. 309–333

Теорема редукции в задаче восстановления подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу

Василий Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 4 января 1996 года

Доказывается необходимое условие на грассманов образ подмногообразий евклидова пространства. Показано, что восстановление подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ с постоянной размерностью l первого нормального пространства по заданному k-мерному грассманову образу Γ эквивалентно восстановлению некоторого подмногообразия $\tilde{F}^k \subset E^{k+l}$ с постоянной размерностью l первого нормального пространства по заданному k-мерному грассманову образу $\tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}$ специальным образом связан с Γ.

Введение

Пусть $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ – гладкое C^r погружение области $D^n \subset R^n$ в $(n+m)$-мерное евклидово пространство в виде подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$, r, $n \geq 2$. Погружение φ индуцирует отображение Грассмана Φ области D^n в многообразие Грассмана $G(m, n+m)$ m-мерных подпространств $(n+m)$-мерного евклидова пространства, а именно: каждой точке $v \in D^n$ ставится в соответствие нормальное пространство $N_{\varphi(v)} \subset E^{n+m}$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ в точке $\varphi(v)$. Образ D^n при отображении Φ называют грассмановым образом подмногообразия F^n. В общем случае Φ является C^{r-1}-гладким погружением.

Ю.А. Аминовым в [1] была поставлена следующая общая проблема: по заданному погружению $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$ восстановить погружение $\varphi : D^n \to E^{n+m}$, индуцирующее отображение Грасссмана Φ. При $m = 1$ эта проблема близко связана с классической проблемой Минковского (см. [2]).

При $m > 1$ достаточно полное решение задачи восстановления было получено в работах Ю.А. Аминова, Дж. Вайнера, Д. Хоффмана и Р. Оссермана (см. обзор [3]) для погружений двумерных областей в евклидово пространство произвольной размерности.

В некоторых случаях ранг отображения Грассмана Φ в отдельных точках, а иногда и во всей области D^n может быть меньше n. Погружение φ называют тогда тангенциально вырожденным. Такие погружения являются сильно параболическими, что в значительной мере определяет их структуру [4]. Проблема восстановления тангенциально вырожденных погружений по заданному отображению Грассмана также имеет определенный интерес. В настоящий момент она решена для погружений с отображением Грассмана постоянного ранга 1 (см. [5, 6]) и для погружений $D^n \to E^{n+2}$ с отображением Грассмана постоянного ранга 2 (см. [7]). Настоящая работа посвящена исследованию необходимых и достаточных условий для того, чтобы заданное отображение $D^n \to G(m, n+m)$ было отображением Грассмана, индуцированным некоторым погружением $D^n \to E^{n+m}$.

В первом разделе описываются свойства основного инструмента наших исследований – вложений многообразия $G(l, k+l)$ в многообразие $G(m, n+m)$ в виде kl-мерных вполне геодезических подмногообразий $\Lambda(l, k+l)$; каждое из $\Lambda(l, k+l)$ образовано m-мерными подпространствами $E^m \subset E^{n+m}$, содержащими фиксированное $(m-l)$-мерное подпространство $E^{m-l} \subset E^{n+m}$ и ортогональными фиксированному $(n-k)$-мерному подпространству $E^{n-k} \subset E^{n+m}$. Такие "стандартные" подмногообразия образуют хотя и широкий, но достаточно специфический класс подмногообразий на многообразии Грассмана; они рассматривались рядом авторов как самостоятельный объект исследований, так и в качестве вспомогательного средства при решении ряда задач теории грассманова образа. В настоящей работе рассмотрено семейство "стандартных" подмногообразий с дифференциально-геометрической точки зрения (разд. 2).

В разделе 3 доказывается общее необходимое условие на отображение Грассмана. Будем обозначать через d_Φ дифференциал отображения Φ.

Теорема А. *Пусть $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$ – отображение Грассмана, индуцированное C^2-гладким погружением $\varphi : D^n \to E^{n+m}$.*

I) *Ранг отображения Φ в точке $v \in D^n$ равен k тогда и только тогда, когда:*

1) *через точку $\Phi(v)$ проходит $\Lambda(m, k+m)$ такое, что его касательное пространство $T_{\Phi(v)}\Lambda(m, k+m)$ содержит образ $T_v D^n$ при отображении d_Φ, т.е.*

$$d_\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)}\Lambda(m, k+m)\,;$$

2) *через точку $\Phi(v)$ не проходит $\Lambda(m, k_1+m)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее "условию касания" из* 1).

II) *Точечная коразмерность погружения* φ *в точке* v *равна* l *тогда и только тогда, когда:*
1) *через точку* $\Phi(v)$ *проходит* $\Lambda(l, n+l)$ *такое, что его касательное пространство* $T_{\Phi(v)}\Lambda(l, n+l)$ *содержит образ* T_vD^n *при отображении* d_Φ*, т.е.*

$$d_\Phi(T_vD^n) \subset T_{\Phi(v)}\Lambda(l, n+l)\,;$$

2) *через точку* $\Phi(v)$ *не проходит* $\Lambda(l_1, n+l_1)$ *при* $l_1 < l$*, удовлетворяющее "условию касания" из* 1).
(Под точечной коразмерностью погружения φ в точке v понимается размерность первого нормального пространства погружения φ в этой точке .)

В разделе 4 мы рассмотрено C^r-гладкое, $r \geq 3$, отображение $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$ постоянного ранга $k \leq n$, удовлетворяющего при некотором фиксированном $l \leq m$ следующему условию для любой точки $v \in D^n$:

1) через точку $\Phi(v)$ проходит $\Lambda(l, k+l)$ такое, что выполнено "условие касания"

$$d_\Phi(T_vD^n) \subset T_{\Phi(v)}\Lambda(l, k+l);$$

2) через точку $\Phi(v)$ не проходит $\Lambda(l_1, k_1+l_1)$ при $k_1 \leq k$, $l_1 \leq l$, $(k-k_1)^2 + (l-l_1)^2 > 0$, удовлетворяющее "условию касания" из 1).
В этом случае достаточно малая область D^n допускает расслоение на $(n-k)$-мерные слои с k-мерной базой D^k таким образом, что Φ – постоянно вдоль каждого слоя и сужение Φ на базу является C^r-гладким погружением. По заданному отображению Φ с помощью специальной конструкции строится отображение $\tilde{\Phi} : D^k \to G(l, k+l)$ и доказывается следующий факт:

Теорема Б. 1. *Если* Φ *– отображение Грассмана, индуцированное гладким* C^s, $3 \leq s \leq r-1$, *погружением* $\varphi : D^n \to E^{n+m}$*, то для любой точки* $u \in D^k$ *существует окрестность* $U^k \subset D^k$ *такая, что сужение* $\tilde{\Phi}$ *на* U^k *является отображением Грассмана, индуцированным некоторым* C^s*-гладким погружением* $\tilde{\varphi} : D^k \to E^{k+l}$.

2. *Если* $\tilde{\Phi}$ *– отображение Грассмана, индуцированное гладким* C^s, $3 \leq s \leq r-1$, *погружением* $\tilde{\varphi} : D^k \to E^{k+l}$*, то для любой точки* $v \in D^n$ *существует окрестность* $U^n \subset D^n$ *такая, что сужение* Φ *на* U^n *является отображением Грассмана, индуцированным некоторым* C^s*-гладким погружением* $\varphi : D^n \to E^{n+m}$.

Теорема Б устанавливает эквивалентность возможности решения "в малом" задачи восстановления погружения $D^n \to E^{n+m}$ с постоянной точечной коразмерностью $l \leq m$ по заданному отображению Грассмана постоянного ранга $k \leq n$ и задачи восстановления погружения $D^k \to E^{k+l}$ с постоянной точечной коразмерностью l по заданному отображению Грассмана, являющемуся погружением.

1. Стандартные подмногообразия в многообразии Грассмана

На протяжении всей статьи многообразия Грассмана будут предполагаться оснащенными стандартной римановой структурой симметрического пространства.

Многообразие $G(l,k+l)$ допускает аналитическое вложение в $G(m,n+m)$ при любых $k \le n$, $l \le m$ в виде вполне геодезического подмногообразия. Это достигается с помощью следующей конструкции: зафиксируем пару $\pi = \{E_0^{n-k}, E_0^{m-l}\}$ взаимно ортогональных подпространств в E^{n+m} и обозначим через E_0^{k+l} подпространство в E^{n+m}, ортогональное E_0^{n-k} и E_0^{m-l}; ставя в соответствие каждому подпространству $E^l \subset E_0^{l+k}$ подпространство $E^m \subset E^{n+m}$, натянутое на E^l и E_0^{m-l}, получаем реализацию $G(l,k+l)$ в виде подмногообразия в $G(m,n+m)$, которое состоит из m-мерных подпростанств в E^{n+m}, содержащих E_0^{m-l} и ортогональных E_0^{n-k}. Назовем такие подмногообразия многообразиями Грассмана, стандартно вложенными в $G(m,n+m)$ и обозначим через $\Lambda_\pi(l,k+l)$ или просто $\Lambda(l,k+l)$; пару $\pi = \{E_0^{n-k}, E_0^{m-l}\}$ будем называть представляющей парой для $\Lambda(l,k+l)$. Элементарные свойства стандартно вложенных многообразий Грассмана описываются нижеследующими утверждениями.

Лемма 1. *Пусть имеются $\Lambda(l_1,k_1+l_1), \Lambda(l_2,k_2+l_2)$ с представляющими парами $\pi_1 = \{E_0^{n-k_1}, E_0^{m-l_1}\}$ и $\pi_2 = \{E_0^{n-k_2}, E_0^{m-l_2}\}$, соответственно. Если:*

а) $E_0^{n-k_i}$ ортогонально $E_0^{m-l_j}$ при всех i,j,

б) $k = k_1 + k_2 + dim\{E_0^{n-k_1} \cap E_0^{n-k_2}\} - n \ge 0$,

в) $l = l_1 + l_2 + dim\{E_0^{m-l_1} \cap E_0^{m-l_2}\} - m \ge 0$,

то $\Lambda(l_1,k_1+l_1) \cap \Lambda(l_2,k_2+l_2)$ есть $\Lambda(l,k+l)$. Если же хотя бы одно из условий а)–в) не выполнено, то пересечение пусто.

Лемма 2. *Пусть имеется $\Lambda(l,k+l)$. Для любых $k_1, l_1 : k \le k_1 \le n$, $l \le l_1 \le m$ существует $\Lambda(l_1,k_1+l_1)$, которое содержит $\Lambda(l,k+l)$ как подмногообразие.*

Следствие 1. *При любых $k \le n$, $l \le m$ через каждую точку $P \in G(m,n+m)$ проходит $\Lambda(l,k+l)$.*

Следствие 2. *Любое $\Lambda(l,k+l)$ является пересечением однозначно определенных $\Lambda(l,n+l)$ и $\Lambda(m,k+m)$.*

Подмногообразия $\Lambda(l,k+l)$ имеют достаточно простое описание в локальных координатах специального вида на $G(m,n+m)$. А именно, зафиксируем в E^{n+m} два взаимно ортогональных подпространства E_0^n и E_0^m;

введем в E^{n+m} декартовы координаты $x^1,..,x^{n+m}$, выбрав ортонормированный базис из векторов $\overrightarrow{e}_1,..,\overrightarrow{e}_{n+m}$ так, что $E_0^n=\mathrm{span}(\overrightarrow{e}_1,..,\overrightarrow{e}_n)$ и $E_0^m=\mathrm{span}(\overrightarrow{e}_{n+1},..,\overrightarrow{e}_{n+m})$. Подпространство $E^m\subset E^{n+m}$, проектирующееся на E_0^m без вырождения, обладает однозначно определенным базисом из векторов

$$\overrightarrow{\epsilon}_\sigma=||z_\sigma^1,..,z_\sigma^n,\delta_{n+\sigma}^{n+1},..,\delta_{n+\sigma}^{n+m}||,\quad \sigma=\overline{1,m}, \tag{1.1}$$

и задается в декартовых координатах в виде

$$\begin{Vmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} z_1^1 & \dots & z_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ z_1^n & \dots & z_m^n\end{Vmatrix}\quad\begin{Vmatrix} x^{n+1}\\ \vdots\\ x^{n+m}\end{Vmatrix}.$$

Такие подпространства образуют в $G(m,n{+}m)$ окрестность подпространства $E_0^m\subset E^{n+m}$, и величины z_σ^i, $i=\overline{1,n}$, $\sigma=\overline{1,m}$, являются координатами в указанной окрестности [3]. Назовем такие z_σ^i естественными координатами с центром в $\tilde{E}^m$. В дальнейшем будем представлять точку из $G(m,n+m)$ матрицей z размером $n\times m$ с элементами z_σ^i; аналогичного соглашения мы будем придерживаться в отношении векторов из касательного пространства $T_zG(m,n+m)$ к многообразию Грассмана в точке z.

Пусть теперь имеется $\Lambda_\pi(l,k{+}l)$ с представляющей парой $\pi=\{E_0^{n-k},E_0^{m-l}\}$. Предположим, что E_0^{n-k} натянуто на вектора

$$\overrightarrow{a}_\alpha=||a_\alpha^1,...,a_\alpha^{n+m}||,\quad \alpha=\overline{k+1,n},$$

а E_0^{m-l} – на вектора

$$\overrightarrow{b}_\beta=||b_\beta^1,...,b_\beta^{n+m}||,\quad \beta=\overline{l+1,m}.$$

Тогда легко видеть, учитывая (1.1), что указанное стандартное $\Lambda_\pi(l,k+l)$ задается в $G(m,n+m)$ в виде

$$-\begin{Vmatrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n\\ \vdots & & \vdots\\ a_n^1 & \dots & a_n^n\end{Vmatrix}\quad\begin{Vmatrix} z_1^1 & \dots & z_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ z_1^n & \dots & z_m^n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{k+1}^{n+1} & \dots & a_{k+1}^{n+m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n+1}^{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n+m}\end{Vmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\begin{Vmatrix} b_{l+1}^1 & \dots & b_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ b_{l+1}^n & \dots & b_m^n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} z_1^1 & \dots & z_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ z_1^n & \dots & z_m^n\end{Vmatrix}\quad\begin{Vmatrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m}\end{Vmatrix}. \tag{1.3}$$

При соответствующем выборе центра естественных координат можно считать, что

$$\mathrm{rank}\begin{Vmatrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n\\ \vdots & & \vdots\\ a_n^1 & \dots & a_n^n\end{Vmatrix}=n-k, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m} \end{matrix}\right\| = m - l. \qquad (1.5)$$

Любое стандартное подмногообразие в $G(m, n+m)$ и только такие подмногообразия задаются уравнениями (1.2), (1.3), дополненными в общем случае условиями вида (1.4), (1.5). Касательное пространство $T_z\Lambda_\pi(l, k+l)$ подмногообразия $\Lambda_\pi(l, k+l)$, заданного в $G(m, n+m)$ в виде (1.2), (1.3), определяется в $T_zG(m, n+m)$ следующим образом : вектор $T \in T_zG(m, n+m)$ принадлежит $T_z\Lambda_\pi(l, k+l)$ тогда и только тогда , когда

$$\left\|\begin{matrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} T_1^1 & \dots & T_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_m^n \end{matrix}\right\| = 0, \qquad (1.6)$$

$$\left\|\begin{matrix} T_1^1 & \dots & T_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_m^n \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m} \end{matrix}\right\| = 0. \qquad (1.7)$$

Учитывая вполне геодезичность стандартных подмногообразий, не составляет труда средствами элементарной линейной алгебры показать следующее:

Лемма 3. *Пусть q-мерное пространство $\Omega \subset T_zG(m, n+m)$ натянуто на касательные вектора $T(1), ..., T(q)$. Пусть T^* – матрица размером $n \times mq$, составленная из столбцов, а T_*– матрица размером $nq \times m$, составленная из строк матриц $T(1), ..., T(q)$.*

I) *Ранг матрицы T^* не превосходит $k \le n$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda(m, k+m)$ такое, что выполнено "условие касания"*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(m, k+m).$$

II) *Ранг матрицы T_* не превосходит $l \le m$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda(l, n+l)$ такое, что выполнено "условие касания"*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(l, n+l)\,.$$

Из Лемм 1–3 несложно получить

Следствие 1. I) *Ранг матрицы T^* равен $k \le n$ тогда и только тогда, когда :*
i) *через точку z проходит $\Lambda(m, k+m)$ такое, что выполнено "условие касания"*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(m, k+m),$$

ii) *через точку z не проходит $\Lambda(m, k_1 + m)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее "условию касания".*

II) *Ранг матрицы T_* равен $l \leq m$ тогда и только тогда, когда :*
i) *через точку z проходит $\Lambda(l, n+l)$ такое, что выполнено "условие касания"*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(l, n + l),$$

ii) *через точку z не проходит $\Lambda(l_1, n+l_1)$ при $l_1 < l$, удовлетворяющее "условию касания".*

Следствие 2. I) *Ранг матрицы T^* не превосходит $k \leq n$ и ранг матрицы T_* не превосходит $l \leq m$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda(l, k + l)$ такое, что*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(l, k + l)\,.$$

II) *Ранг матрицы T^* равен $k \leq n$ и ранг матрицы T_* равен $l \leq m$ тогда и только тогда, когда:*
i) *через точку z проходит $\Lambda(l, k+l)$ такое , что выполнено "условие касания"*

$$\Omega \subset T_z\Lambda(l, k + l),$$

ii) *через точку z не проходит $\Lambda(l_1, k_1 + l_1)$ при $k_1 \leq k$, $l_1 \leq l$, $(k - k_1)^2 + (l - l_1)^2 > 0$, удовлетворяющее "условию касания".*

2. Приводимые отображения и их редукция

Пусть задано гладкое C^r, $r \geq 2$, отображение X области $D^q \subset R^q$ в многообразие $G(m, n + m)$. Будем обозначать через v точку из D^q, через d_X – дифференциал отображения X.

Определение 1. *Назовем бииндексом $\mu(v)$ отображения X в точке v пару наименьших целых чисел $(\mu_1(v), \mu_2(v))$ таких, что через точку $X(v)$ проходит $\Lambda(l, k + l)$, удовлетворяющее "условию касания"*

$$d_X(T_vD^n) \subset T_{X(v)}\Lambda(\mu_2(v), \mu_1(v) + \mu_2(v))\,.$$

Величину $\mu_i(v)$ назовем i-м индексом отображения X в точке v.

Определение 2. *Отображение X назовем (k, l)-приводимым, если $\mu_1(v) \equiv k$, $\mu_2(v) \equiv l$ в области D^q.*

Из леммы 3 следует, что если отображение X задано в естественных координатах $z = \xi(v^1, ..., v^q)$, где $v^1, ..., v^q$ – локальные координаты в D^n, то для любой точки v индекс $\mu_1(v)$ равен рангу матрицы, составленной из столбцов матриц $\partial\xi/\partial v^1, ..., \partial\xi/\partial v^q$, а индекс $\mu_2(v)$ равен рангу матрицы, составленной из строк тех же матриц. Отсюда легко видеть, что если для отображения X всюду в D^q имеют место $\mu_1(v) \leq k, \mu_2(v) \leq l$ и $\mu_1(\hat{v}) = k, \mu_2(\hat{v}) = l$ в какой-то точке $\hat{v}$, то сужение X на некоторую окрестность точки $\hat{v}$ будет (k, l)-приводимым отображением.

Предположим, что отображение X является (k, l)–приводимым. Каждой точке $v \in D^q$ сопоставим $\Lambda_v(l, k+l)$, которое проходит через $X(v)$ и удовлетворяет "условию касания"; обозначим через $\pi(v) = \{E_0^{n-k}(v), E_0^{m-l}(v)\}$ представляющие пары указанных подмногообразий. Подпространство $E^m(v) \subset E^{n+m}$, которое соответствует точке $X(v) \in G(m, n+m)$, обладает тем свойством, что оно содержит $E_0^{m-l}(v)$ и ортогонально $E_0^{n-k}(v)$.

Зафиксируем в E^{n+m} подпространство E_0^m, подпространство E_0^{n-k}, ортогональное E_0^m, и $E_0^{m-l} \subset E_0^m$. Введем следующие обозначения: $E_0^n \subset E^{n+m}$ – ортогональное дополнение подпространства E_0^m, E_0^l – ортогональное дополнение подпространства E_0^{m-l} в E_0^m, E_0^{k+l} – подпространство в E^{n+m}, ортогональное E_0^{n-k} и E_0^{m-l}. Предположим, что в каждой точке $v \in D^q$ выполнены условия:

а) $E^m(v)$ проектируется без вырождения на E_0^m,

б) $E^{n-k}(v)$ проектируется без вырождения на E_0^{n-k},

в) $E^{m-l}(v)$ проектируется без вырождения на E_0^{m-l}.

Используя проекцию $E^m(v)$ на E_0^m, можно вследствие а) однозначно определить подпространство $\hat{E}^l(v)$ в $E^m(v)$, которое при этой проекции отображается на E_0^l. Спроектируем $\hat{E}^l(v)$ в подпространство E_0^{k+l} и, ввиду сделанных предположений, получим l-мерное подпространство $\tilde{E}^l(v) \subset E_0^{k+l}$. Таким образом, возникает отображение $\tilde{X}$ из D^q в многообразие $G(l, k+l)$, ставящее в соответствие точке $v \in D^q$ подпространство $\tilde{E}^l(v) \subset E_0^{k+l}$. Отметим, что все $\tilde{E}^l(v) \subset E_0^{k+l}$ проектируются без вырождения на E_0^l.

Определение 3. *Отображение $\tilde{X}$ назовем редукцией (k, l)-приводимого отображения X.*

Лемма 4. *Пусть X является (k, l)-приводимым C^1-гладким отображением. Для любой точки $\hat{v} \in D^q$ существует окрестность U^q и подпространства $E_0^m, E_0^{m-l}, E_0^{n-k}$ такие, что условия а)–в) выполнены в U^q.*

Доказательство. Введем в D^q C^1-гладкие координаты $v^1, ..., v^q$. В E^{n+m} зададим ортонормированный базис векторов $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_{n+m}$ и введем в некоторой окрестности U_1 точки $X(\hat{v})$ на $G(m, n+m)$ естественные координаты z^i_σ. Не уменьшая общности, можно считать D^q настолько малой, что $X(D^q) \subset U_1$. Отображение X можно записать тогда в виде $z = \xi(v^1, ..., v^q)$, где матричнозначная функция $\xi(v^1, ..., v^q)$ является C^1-гладкой. Обозначим через $\xi^*(v^1, ..., v^q)$ матричнозначную функцию, составленную из строк, а через $\xi_*(v^1, ..., v^q)$ – матричнозначную функцию, составленную из столбцов матриц $\partial\xi/\partial v^1, ..., \partial\xi/\partial v^q$; очевидно, $\xi^*, \xi_* \in C(D^q)$. Так как X есть (k, l)-приводимое отображение, то $\mathrm{rank}\xi_* \equiv k$, $\mathrm{rank}\xi^* \equiv l$. Поэтому можно определить для достаточно малой области D^q непрерывные функции $a^i_\alpha(v^1, ..., v^q)$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{k+1, n}$ и $b^j_\beta(v^1, ..., v^q)$, $j = \overline{n+1, n+m}$, $\beta = \overline{l+1, m}$ так, что имеет место

$$\xi^*(v) \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+1}_m(v) \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+m}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+m}_m(v) \end{Vmatrix} = 0; \quad \begin{Vmatrix} a^1_{k+1}(v) & \dots & a^n_{k+1}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n(v) & \dots & a^n_n(v) \end{Vmatrix} \xi_*(v) = 0, \tag{2.1}$$

и при этом

$$\mathrm{rank} \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{Vmatrix} \equiv n - k, \quad rank \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+m}_{l+1} & \dots & b^{n+m}_m \end{Vmatrix} \equiv m - l. \tag{2.2}$$

Определим еще непрерывные функции $a^i_\alpha(v^1, ..., v^q)$, $i = \overline{n+1, n+m}, \alpha = \overline{k+1, n}$, и $b^j_\beta(v^1, ..., v^q), j = \overline{1, n}, \beta = \overline{l+1, m}$, уравнениями

$$\begin{Vmatrix} a^{n+1}_{k+1}(v) & \dots & a^{n+1}_n(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n+m}_{k+1}(v) & \dots & a^{n+m}_n(v) \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} a^1_{k+1}(v) & \dots & a^n_{k+1}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n(v) & \dots & a^n_n(v) \end{Vmatrix} \xi_*(v), \tag{2.3}$$

$$\begin{Vmatrix} b^1_{l+1}(v) & \dots & b^1_m(v) \\ \vdots & & \vdots \\ b^n_{l+1}(v) & \dots & b^n_m(v) \end{Vmatrix} = \xi(v) \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+1}_m(v) \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+m}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+m}_m(v) \end{Vmatrix}. \tag{2.4}$$

Из таким образом выбранных функций образуем непрерывные вектор-функции $\overrightarrow{a}_\alpha = \sum_{i=1}^{n+m} a^i_\alpha \overrightarrow{e}_i$, $\overrightarrow{b}_\beta = \sum_{i=1}^{n+m} b^i_\beta \overrightarrow{e}_i$. При фиксированных $v^1, ..., v^q$ подмногообразие в $G(m, n+m)$, задаваемое уравнениями

$$\begin{Vmatrix} a^{n+1}_{k+1}(v) & \dots & a^{n+1}_n(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n+m}_{k+1}(v) & \dots & a^{n+m}_n(v) \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} a^1_{k+1}(v) & \dots & a^n_{k+1}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n(v) & \dots & a^n_n(v) \end{Vmatrix} z,$$

$$\begin{Vmatrix} b^1_{l+1}(v) & \dots & b^1_m(v) \\ \vdots & & \vdots \\ b^n_{l+1}(v) & \dots & b^n_m(v) \end{Vmatrix} = z \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+1}_m(v) \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+m}_{l+1}(v) & \dots & b^{n+m}_m(v) \end{Vmatrix},$$

вследствие (2.1)–(2.4) и определения (k,l)-приводимости представляет собой $\Lambda_v(l,k+l)$, фигурирующее в определении (k,l)-приводимости отображения X. При этом легко видеть, что $E^{n-k}(v)=\mathrm{span}(\overrightarrow{a}_{k+1},...,\overrightarrow{a}_n)$ и $E^{m-l}(v)=\mathrm{span}(\overrightarrow{b}_{l+1},...,\overrightarrow{b}_m)$. Поэтому, выбрав $E_0^m, E_0^{m-l}, E_0^{n-k}$ так, чтобы условия а)–в) выполнялись в точке $\hat{v}$, получаем, что эти же условия будут выполняться и в некоторой окрестности U^q точки $\hat{v}$ вследствие непрерывности вектор-функций $\overrightarrow{a}_\alpha$, $\overrightarrow{b}_\beta$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для любого (k,l)-приводимого отображения $X : D^q\to G(m,n+m)$ можно построить редукцию $\tilde{X} : D^q\to G(l,k+l)$ в достаточно малой области D^q.

Пусть по-прежнему $X : D^q\to G(m,n+m)$ является (k,l)-приводимым C^r-гладким отображением, и пусть построена редукция $\tilde{X} : D^q\to G(l,k+l)$ отображения X, определенная фиксацией подпространств $E_0^m\subset E^{n+m}$, $E_0^{m-l}\subset E_0^m$, и ортогонального E_0^m подпространства $E_0^{n-k}\subset E^{n+m}$. Введем в E^{n+m} ортонормированный базис векторов $\overrightarrow{e}_1,...,\overrightarrow{e}_{n+m}$ так, что E_0^m натянуто на $\overrightarrow{e}_{n+1},...,\overrightarrow{e}_{n+m}$, E_0^{m-l} натянуто на $\overrightarrow{e}_{n+l+1},...,\overrightarrow{e}_{n+m}$, E_0^{n-k} натянуто на $\overrightarrow{e}_{k+1},...,\overrightarrow{e}_n$. Соответствующее подпространство E_0^{k+l} будет тогда натянуто на $\overrightarrow{e}^*_1=\overrightarrow{e}_1,...,\overrightarrow{e}^*_k=\overrightarrow{e}_k$, $\overrightarrow{e}^*_{k+1}=\overrightarrow{e}_{n+1},...,\overrightarrow{e}^*_{k+l}=\overrightarrow{e}_{n+l}$. Введем z_σ^i – естественные координаты с центром в E_0^m на $G(m,n+m)$ и $\tilde{z}_\sigma^i$ – естественные координаты с центром в E_0^l на $G(l,k+l)$. Выбирая в достаточно малой области D^q координаты $v^1,...,v^q$, можно записать отображение X в виде $z=\xi(v^1,...,v^q)$, где $\xi\in C^r(D^q)$, а отображение $\tilde{X}$ – в виде $\tilde{z}=\tilde{\xi}(v^1,...,v^q)$. Подпространство $E^m(v)\subset E^{n+m}$ натянуто на вектора

$$\overrightarrow{\epsilon}_\sigma(v^1,...,v^q)=\overrightarrow{e}_{n+\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\xi_\sigma^i(v^1,...,v^q)\overrightarrow{e}_i,\quad \sigma=\overline{1,m};$$

легко видеть, что $\hat{E}^m(v)\subset E^{n+m}$ будет тогда натянуто на вектора $\overrightarrow{\epsilon}_\sigma(v^1,...,v^q)$, $\sigma=\overline{1,l}$, а значит, $\tilde{E}^m(v)\subset E^{n+m}$ будет натянуто на вектора

$$\overrightarrow{\epsilon}_\sigma(v^1,...,v^q)=\overrightarrow{e}_{n+\sigma}+\sum_{i=1}^{k}\xi_\sigma^i(v^1,...,v^q)\overrightarrow{e}_i,\quad \sigma=\overline{1,l}.$$

С другой стороны, $\tilde{E}^m(v)\subset E^{n+m}$ имеет базис из векторов

$$\overrightarrow{\epsilon}^*_\sigma(v^1,...,v^q)=\overrightarrow{e}^*_{k+\sigma}+\sum_{i=1}^{k}\tilde{\xi}_\sigma^i(v^1,...,v^q)\overrightarrow{e}^*_i,\quad \sigma=\overline{1,l}.$$

Поэтому легко видеть, что

$$\tilde{\xi}_\sigma^i(v^1,...,v^q)=\xi_\sigma^i(v^1,...,v^q),\quad i=\overline{1,k},\quad \sigma=\overline{1,l}. \tag{2.5}$$

Вследствие (2.5) отображение $\tilde{X}$ является C^r-гладким. Введенные указанным образом координаты z^i_σ и $\tilde{z}^i_\sigma$ назовем специально согласованными.

В силу выбора векторов $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_{n+m}$ подпространство $E^{n-k}(v) \subset E^{n+m}$ обладает однозначно определенным базисом из векторов

$$\overrightarrow{a}_\alpha(v^1, ..., v^q) = \sum_{i=1}^{k} a^i_\alpha \overrightarrow{e}_i + \overrightarrow{e}_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{m} a^{n+\sigma}_\alpha \overrightarrow{e}_{n+\sigma}, \quad \alpha = \overline{k+1, n}; \tag{2.6}$$

соответственно, $E^{m-l}(v) \subset E^{n+m}$ обладает однозначно определенным базисом из векторов

$$\overrightarrow{b}_\beta(v^1, ..., v^q) = \sum_{i=1}^{n} b^i_\beta \overrightarrow{e}_i + \sum_{\sigma=1}^{l} b^{n+\sigma}_\beta \overrightarrow{e}_{n+\sigma} + \overrightarrow{e}_{n+\beta}, \quad \beta = \overline{l+1, m}. \tag{2.7}$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \xi = - \begin{Vmatrix} a^{n+1}_{k+1} & \dots & a^{n+m}_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ a^{n+1}_n & \dots & a^{n+m}_n \end{Vmatrix};$$

$$\xi \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \dots & & \dots \\ b^{n+l}_{l+1} & . & b^{n+l}_m \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b^1_{l+1} & \dots & b^1_m \\ \dots & & \dots \\ b^n_{l+1} & \dots & b^n_m \end{Vmatrix},$$

откуда получаем

$$\xi = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{Vmatrix} \quad \tilde{\xi} \quad \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & -b^{n+1}_{l+1} & \dots & -b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -b^{n+l}_{l+1} & \dots & -b^{n+l}_m \end{Vmatrix}$$

$$- \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ a^{n+1}_{k+1} & \dots & a^{n+m}_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ a^{n+1}_n & \dots & a^{n+m}_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b^1_{l+1} & \dots & b^1_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b^k_{l+1} & \dots & b^k_m \end{Vmatrix}. \tag{2.8}$$

Кроме того, условие $d_X(T_v D^q) \subset T_{X(v)}\Lambda_v(l, k+l)$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial v^i} = 0, \quad i = \overline{1, q}; \tag{2.9.1}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \dots & & \dots \\ b^{n+l}_{l+1} & \dots & b^{n+l}_m \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = 0, \quad i = \overline{1, q}. \tag{2.9.2}$$

Дифференцируя (2.8) и подставляя в (2.9), получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial v^i} = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{Vmatrix} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & -b^{n+1}_{l+1} & \dots & -b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -b^{n+l}_{l+1} & \dots & -b^{n+l}_m \end{Vmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} a^{n+1}_{k+1} & \dots & a^{n+l}_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n+1}_n & \dots & a^{n+l}_n \end{Vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{Vmatrix} \tilde{\xi}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} a^{n+l+1}_{k+1} & \dots & a^{n+m}_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n+l+1}_n & \dots & a^{n+m}_n \end{Vmatrix} = \frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{Vmatrix}$$
$$\times \left\{ \tilde{\xi} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+l}_{l+1} & \dots & b^{n+l}_m \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} b^1_{l+1} & \dots & b^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^k_{l+1} & \dots & b^k_m \end{Vmatrix} \right\}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^1_{l+1} & \dots & b^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^k_{l+1} & \dots & b^k_m \end{Vmatrix} = \tilde{\xi} \frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+l}_{l+1} & \dots & b^{n+l}_m \end{Vmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^{k+1}_{l+1} & \dots & b^{k+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^n_{l+1} & \dots & b^n_m \end{Vmatrix}$$

$$= -\left\{ \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{Vmatrix} \tilde{\xi} + \begin{Vmatrix} a^{n+1}_{k+1} & \dots & a^{n+l}_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n+1}_n & \dots & a^{n+l}_n \end{Vmatrix} \right\}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+l}_{l+1} & \dots & b^{n+l}_m \end{Vmatrix}. \tag{2.14}$$

При q, $r \geq 2$, дифференцируя (2.10), находим из условия равенства смешанных производных матричнозначных функций ξ и $\tilde{\xi}$, что

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{Vmatrix} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^j} = \frac{\partial}{\partial v^j} \begin{Vmatrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{Vmatrix} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^i}, \quad i \neq j = \overline{1,q}; \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & \dots & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+l}_{l+1} & \dots & b^{n+l}_m \end{Vmatrix} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} \begin{Vmatrix} b^{n+1}_{l+1} & . & b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots \\ b^{n+l}_{l+1} & . & b^{n+l}_m \end{Vmatrix}, \quad i \neq j = \overline{1,q}. \tag{2.16}$$

Лемма 5. *Пусть $X : D^q \to G(m, n+m)$ – (k,l)-приводимое C^1-гладкое отображение, $\tilde{X} : D^q \to G(l, k+l)$ – его редукция. Тогда $\tilde{X}$ является (k,l)-приводимым отображением.*

Доказательство. Зафиксируем точку $\hat{v}$. Так как значение бииндекса не зависит от выбора координат, то не уменьшая общности будем считать, что введены согласованные естественные координаты на $G(m, n+m)$ и $G(l, k+l)$, отображения X и $\tilde{X}$ заданы в виде $z = \xi(v^1, ..., v^q)$ и $\tilde{z} = \tilde{\xi}(v^1, ..., v^q)$ соответственно, и имеют место соотношения (2.5)–(2.16). Пусть индекс $\tilde{\mu}_1$ отображения $\tilde{X}$ в точке $\hat{v}$ равен $k_1 < k$. Это эквивалентно тому, что для некоторых констант $\tilde{a}^i_\sigma$ имеет место

$$\begin{Vmatrix} \tilde{a}^1_{k_1+1} & \dots & \tilde{a}^k_{k_1+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}^1_k & \dots & \tilde{a}^k_k \end{Vmatrix} \tilde{\xi}_*(\hat{v}) = 0, \tag{2.17}$$

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \tilde{a}^1_{k_1+1} & \dots & \tilde{a}^k_{k_1+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}^1_k & \dots & \tilde{a}^k_k \end{Vmatrix} = k - k_1, \tag{2.18}$$

где матрица $\tilde{\xi}_*$ составлена из столбцов матриц $\partial\tilde{\xi}/\partial v^1, ..., \partial\tilde{\xi}/\partial v^q$.

Из (2.10) и (2.17) следует, что

$$\begin{Vmatrix} \tilde{a}^1_{k_1+1} & \dots & \tilde{a}^k_{k_1+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}^1_k & \dots & \tilde{a}^k_k & 0 & \dots & 0 \\ a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \xi_*(\hat{v}) = 0.$$

Из (2.18) легко видеть, что

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} \tilde{a}^1_{k_1+1} & \dots & \tilde{a}^k_{k_1+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}^1_k & \dots & \tilde{a}^k_k & 0 & \dots & 0 \\ a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^k_n & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = n - k_1,$$

поэтому

$$\operatorname{rank} \quad \xi_*(\hat{v}) \quad \leq k_1,$$

а значит, и индекс μ_1 отображения X в точке $\hat{v}$ не превосходит k_1, что противоречит определению (k,l)-приводимости отображения X. Поэтому индекс $\tilde{\mu}_1$ отображения $\tilde{X}$ в точке $\hat{v}$ равен k. Аналогично можно показать, что индекс $\tilde{\mu}_2$ отображения $\tilde{X}$ в точке $\hat{v}$ равен l. Так как точка $\hat{v} \in D^q$ выбиралась произвольно, то можно заключить, что $\tilde{\mu}_1 \equiv k, \tilde{\mu}_2 \equiv l$, т.е. отображение $\tilde{X}$ является (k,l)-приводимым, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Пусть $X : D^q \to G(m, n+m)$ – (k,l)-приводимое C^1-гладкое отображение, $\tilde{X} : D^q \to G(l, k+l)$ – его редукция. Для любой точки $v \in D^q$ ранги отображений $\tilde{X}$ и X в точке v совпадают.*

Доказательство. Зафиксируем точку v. Так как значение ранга не зависит от выбора координат, то, не уменьшая общности, будем считать, что введены согласованные естественные координаты на $G(m, n+m)$ и $G(l, k+l)$, отображения X и $\tilde{X}$ заданы в виде $z = \xi(v^1, ..., v^q)$ и $\tilde{z} = \tilde{\xi}(v^1, ..., v^q)$, соответственно, и имеют место соотношения (2.5)–(2.16). Тогда лемма тривиальным образом следует из равенств (2.10).

3. Общее необходимое условие на грассманово отображение

Пусть $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ – гладкое C^r погружение области $D^n \subset R^n$ в $(n+m)$-мерное евклидово пространство в виде подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$. Отождествляя касательное пространство T_xE^{n+m} с самим евклидовым пространством E^{n+m}, будем представлять $T_{\varphi(v)}F^n \subset T_{\varphi(v)}E^{n+m}$ как n-мерную плоскость в E^{n+m}, проходящую через точку $\varphi(v)$. Пусть $N_{\varphi(v)}$ – это m-мерное подпространство в E^{n+m}, ортогональное $T_{\varphi(v)}F^n$, т.е. нормальное пространство погружения φ в точке v. Погружение φ индуцирует отображение Грассмана Φ области D^n в многообразие $G(m, n+m)$, а именно: $\Phi(v) = N_{\varphi(v)} \subset E^{n+m}$. Образ D^n при отображении φ называют грассмановым образом подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$. Ясно, что Φ является C^{r-1}-гладким отображением.

Пусть $\hat{v}$ – некоторая точка в D^n. Введем координаты $v^1, ..., v^n$ в достаточно малой области D^n таким образом, чтобы вектора $d_\varphi(\frac{\partial}{\partial v^i}(\hat{v}))$ в E^{n+m} были взаимно ортогональными. Введем в E^{n+m} декартовы координаты специальным образом: точку $\varphi(\hat{v})$ примем за начало координат, орты $\vec{e}_i, i = \overline{1, n}$, направим вдоль $d_\varphi(\frac{\partial}{\partial v^i}(\hat{v}))$, а орты $\vec{e}_{n+\sigma}, \sigma = \overline{1, m}$, определим образующими ортонормированный базис в $N_{\varphi(\hat{v})}$. В многообразии $G(m, n+m)$ зададим естественные координаты z^i_σ с центром в $N_{\varphi(\hat{v})}$. В этих локальных координатах отображение Φ можно записать в виде $z = \xi(v^1, ..., v^n)$, причем матричнозначная функция $\xi(v^1, ..., v^n)$ является C^{r-1}–гладкой и обращается в нуль в точке $\hat{v}$. Соответственно, погружение φ можно задать в виде $\vec{x} = \vec{x}(v^1, ..., v^n) = \sum_{i=1}^{n+m} x^i(v^1, ..., v^n)\vec{e}_i$, и при этом $\vec{x}(v^1, ..., v^n) = 0, \partial\vec{x}/\partial v^i(v^1, ..., v^n) = \vec{e}_i$. Если обозначить через H^σ_{ij} коэффициенты второй квадратичной формы погружения φ в точке $\hat{v}$ относительно нормали $\vec{n}_\sigma = \vec{e}_{n+\sigma}$, то тогда

$$d_\Phi(\frac{\partial}{\partial v^i}(\hat{v})) = \frac{\partial\xi}{\partial v^i}(\hat{v}^1, ..., \hat{v}^n) = \left\| \begin{matrix} H^1_{1i} & \dots & H^m_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H^1_{ni} & \dots & H^m_{ni} \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ является гладким C^2 погружением; пусть $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$ – отображение Грассмана, индуцированное погружением φ. Для произвольной точки $\hat{v} \in D^n$ ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ равен индексу $\mu_1(\hat{v})$ отображения Φ.*

Доказательство. Будем, не уменьшая общности, считать, что в D^n, E^{n+m}, $G(m, n+m)$ введены описанные выше координаты. Предположим, что ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ равен k. Тогда существуют постоянные a^i_α, $i = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{k+1, n}$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} a^i_\alpha \frac{\partial\xi}{\partial v^i}(\hat{v}) = 0, \quad \alpha = \overline{k+1, n}, \tag{3.2}$$

и при этом

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{matrix}\right\| = n-k. \tag{3.3}$$

С учетом (3.1) можем (3.2) переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n a^i_\alpha \left\|\begin{matrix} H^1_{1i} & \dots & H^m_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H^1_{ni} & \dots & H^m_{ni} \end{matrix}\right\| = 0, \quad \alpha = \overline{k+1,n},$$

или

$$\sum_{i=1}^n a^i_\alpha H^\sigma_{ji} = 0, \quad \alpha = \overline{k+1,n}, \quad \sigma = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Так как вторые квадратичные формы C^2-гладкого погружения φ симметричны, то легко видеть, что (3.4) эквивалентно следующему условию:

$$\left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{matrix}\right\| \ \left\|\begin{matrix} H^1_{1i} & \dots & H^m_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H^1_{ni} & \dots & H^m_{ni} \end{matrix}\right\| = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

т.е., учитывая (3.1), получаем

$$\left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{matrix}\right\| \quad \frac{\partial \xi}{\partial v^j}(\hat v) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Принимая во внимание (3.3), заключаем, что подмногообразие $\Lambda(m, k+m)$ в $G(m, n+m)$, задаваемое в виде

$$\left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{matrix}\right\| \quad z = \quad \left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^n_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^1_n & \dots & a^n_n \end{matrix}\right\| \quad \xi(\hat v^1, ..., \hat v^n),$$

проходит через точку $\Phi(\hat v)$, и при этом $d_\Phi(T_{\hat v} D^n) \subset T_{\Phi(\hat v)}\Lambda(m, k+m)$, следовательно, $\mu_1(\hat v) \le k$.

Аналогично можно показать, что если $\mu_1(\hat v) = k$, то ранг отображения Φ в точке $\hat v$ не превосходит k. Таким образом, ранг отображения Φ в точке $\hat v$ равен индексу $\mu_1(\hat v)$ отображения Φ, что и требовалось доказать.

П р и м е р 1. Примером погружения $D^n \to E^{n+m}$, индуцирующего отображение Грассмана постоянного ранга $k < n$, является погружение φ_c в виде цилиндра $F^n \subset E^{n+m}$ с $(n-k)$-мерной образующей $E^{n-k}_0 \subset E^{n+m}$ и k-мерной направляющей (базой) F^k. В этом случае грассманов образ цилиндра лежит в $\Lambda(m, k+m)$ с представляющей парой $\{E_0^{n-k}, E^0\}$. Отметим, что принадлежность грассманова образа некоторому $\Lambda(m, k+m) \subset G(m, n+m)$ суть характиризующее свойство цилиндра, чья образующая имеет размерность не меньше $n-k$.

Обозначим через $\omega(v)$ точечную коразмерность погружения φ в точке v. (Под точечной коразмерностью понимается размерность первого нормального пространства погружения в точке.)

Теорема 2. *Пусть $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ является гладким C^2 погружением; пусть $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$ – отображение Грассмана, индуцированное погружением φ. Для произвольной точки $\hat{v} \in D^n$ точечная коразмерность отображения Φ в точке $\hat{v}$ равна индексу $\mu_2(\hat{v})$ отображения Φ.*

Доказательство. Пусть $\omega(\hat{v}) = l$ и $N^l_{\varphi(\hat{v})}$ – первое нормальное пространство погружения φ в точке $\hat{v}$. Введем в D^n, E^{n+m}, $G(m, n+m)$ описанные выше координаты, при этом специализируем их, положив $\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+l}$ в E^{n+m} образующими ортонормированный базис в $N^l_{\varphi(\hat{v})}$. Тогда $H^\sigma_{ij} = 0$ при $\sigma = \overline{1, m}$. Поэтому

$$\frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) = \left\| \begin{matrix} H^1_{i1} & \dots & H^l_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H^1_{in} & \dots & H^l_{in} & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|, \quad i = \overline{1, n},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) \underbrace{\left\| \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|}_{m-l} = 0\,, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, подмногообразие $\Lambda(l, n+l) \subset G(m, n+m)$, задаваемое в виде

$$z \; \underbrace{\left\| \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|}_{m-l} = \frac{\partial \xi}{\partial v^j}(\hat{v}) \; \underbrace{\left\| \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|}_{m-l},$$

проходит через точку $\Phi(\hat{v})$, и при этом $d_\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(l, n+l)$, а значит, $\mu_2(\hat{v}) \le l$.

Аналогично можно показать, что если $\mu_2(\hat{v}) = l$, то $\omega(\hat{v}) \le l$. Поэтому $\mu_2(\hat{v}) = \omega(\hat{v})$, что и требовалось доказать.

П р и м е р 2. Примером погружения , индуцирующего отображение Грассмана с индексом $\mu_2(\hat{v}) \le l$, является погружение области D^n в E^{n+m} в виде подмногообразия F^n, лежащего в некоторой $(n+l)$-мерной плоскости $E_1^{n+l} \subset E^{n+m}$. В этом случае грассманов образ подмногообразия F^n принадлежит $\Lambda(l, n+l)$ с представляющей парой $\{E^0, E_1^{m-l}\}$, где E_1^{m-l} – подпространство в E^{n+m}, ортогональное плоскости E_1^{n+l}. Принадлежность грассманова образа какому-либо $\Lambda(l, n+l)$ суть характеризующее свойство подмногообразий $F^n \subset E^{n+m}$, лежащих в $(n+l)$-мерных плоскостях пространства E^{n+m}.

Объединяя теоремы 1 и 2 и учитывая определение бииндекса, получаем утверждение сформулированной во Введении теоремы А, дающей общее необходимое условие на отображение Грассмана.

Полезной оказывается следующая достаточно очевидная

Лемма 7. *Пусть* $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ *является гладким* C^2 *погружением; пусть ранг отображения Грассмана, индуцированного погружением* φ*, в некоторой точке* $\hat{v} \in D^n$ *равен* k*. Тогда точечная коразмерность* $\omega(\hat{v})$ *не превосходит* $\min(m, k(k+1)/2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ранг отображения Грассмана Φ в точке $\hat{v}$ равен k, то по теореме 1 индекс $\mu_1(\hat{v})$ отображения Грассмана равен k, а значит, через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda(m, k+m)$ такое, что $d_\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(m, k+m)$. Если $\{E_0^{n-k}, E^0\}$ – представляющая пара этого стандартного подмногообразия, то $E_0^{n-k} \subset d_\varphi(T_{\hat{v}}D^n) \subset E^{n+m}$. Не уменьшая общности, введем в D^n, E^{n+m}, $G(m, n+m)$ координаты, описанные в начале разд. 3; при этом специализируем их выбор так, чтобы орты $\vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n$ образовывали ортонормированный базис в E_0^{n-k}. Тогда условие $d_\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(m, k+m)$ принимает форму

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| \frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Учитывая (3.1), получаем, что $H_{ij}^\sigma = 0$ при $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{k+1, n}$, $\sigma = \overline{1, m}$. Отсюда следует, что первое нормальное пространство погружения φ в точке $\hat{v}$ имеет размерность, не превосходящую $k(k+1)/2$, откуда тривиальным образом получаем утверждение леммы 7.

Следствие 3. *Пусть Φ – отображение Грассмана, индуцированное C^2-гладким погружением $\varphi : D^n \to E^{n+m}$. Тогда для любой точки $v \in D^n$ бииндекс $\mu(v)$ отображения Φ удовлетворяет условию*

$$\mu_2(v) \le min(m, \mu_1(v)(\mu_1(v)+1)/2).$$

4. Проблема восстановления

Рассмотрим непосредственно задачу восстановления погружения $\varphi : D^n \to E^{n+m}$ по заданному отображению Грассмана $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$, индуцированному погружением φ. Воспользуемся методом, развитым в работах Ю.А. Аминова.

Пусть задано C^r-гладкое отображение $\Phi : D^n \to G(m, n+m)$, $r \ge 3$, $n \ge 2$. Поскольку дальнейшие рассуждения будут носить локальный характер, предположим область D^n достаточно малой. Введем в E^{n+m} декартовы координаты $x^1, ..., x^{n+m}$, задав ортонормированный базис из векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n+m}$; в многообразии $G(m, n+m)$ введем естественные координаты z^i_σ с центром в $E^m_0 = \mathrm{span}(\vec{e}_{n+1}, ..., \vec{e}_{n+m})$. Выберем, кроме того, C^r-гладкие координаты $v^1, ..., v^n$ в D^n. Отображение Φ можно считать тогда заданным в виде $z = \xi(v^1, ..., v^n)$, где $\xi(v^1, ..., v^n) \in C^r(D^n)$. Гладкое C^s погружение $\varphi : D^n \to E^{n+m}$, индуцирующее отображение Грассмана Φ, существует тогда и только тогда, когда существуют функции $x^1(v^1, ..., v^n), ..., x^{n+m}(v^1, ..., v^n) \in C^s(D^n)$ такие, что

$$\frac{\partial x^{n+\sigma}}{\partial v^i} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial x^t}{\partial v^i}\xi^t_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}; \tag{4.1}$$

и при этом

$$\mathrm{rank} \quad \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial x^{n+m}}{\partial v^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial v^n} & \dots & \frac{\partial x^{n+m}}{\partial v^n} \end{Vmatrix} \equiv n. \tag{4.2}$$

Действительно, отображение $\varphi : D^n \to E^{n+m}$, заданное в декартовых координатах $x^1 = x^1(v^1, ..., v^n), ..., x^{n+m} = x^{n+m}(v^1, ..., v^n)$, является погружением тогда и только тогда, когда имеет место (4.2); кроме того, так заданное отображение φ индуцирует отображение Грассмана Φ тогда и только тогда, когда имеет место (4.1), что легко увидеть, учитывая (1.1).

Условие (4.1) представляет собой системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения функций $x^{n+1}(v^1, ..., v^n), ...,$ $x^{n+m}(v^1, ..., v^n)$. При $s \ge 2$ эта система имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие совместности $\partial^2 x^{n+\sigma}/\partial v^i \partial v^j = \partial^2 x^{n+\sigma}/\partial v^j \partial v^i$, $\sigma =$

$\overline{1,m}$, $i,j=\overline{1,n}$, принимающее вид

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial x^t}{\partial v^i}\frac{\partial \xi^t_\sigma}{\partial v^j}=\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial x^t}{\partial v^j}\frac{\partial \xi^t_\sigma}{\partial v^i},\ \sigma=\overline{1,m},\quad i,j=\overline{1,n},$$

или в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\left\|x^1,...,x^n\right\|\ \frac{\partial \xi}{\partial v^j}\quad=\quad\frac{\partial}{\partial v^j}\left\|x^1,...,x^n\right\|\ \frac{\partial \xi}{\partial v^j},\quad i,j=\overline{1,n}. \qquad (4.3)$$

Так как предполагается $\Phi(D^n)$ лежащим в области действия координат z^i_σ, то вследствие (4.1) условие (4.2) эквивалентно следующему:

$$\mathrm{Det}\quad\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{matrix}\right\|\neq 0. \qquad (4.4)$$

Таким образом, существование C^s-гладкого погружения $\varphi: D^n\to E^{n+m}$ с заданным C^r-гладким отображением Грассмана $\Phi: D^n\to G(m,n+m)$ эквивалентно существованию в D^n решения $x^1(v^1,...,v^n),...,x^n(v^1,...,v^n)$ системы (4.3) линейных однородных уравнений первого порядка с C^{r-1}-гладкими коэффициентами; при этом решение должно удовлетворять условию регулярности (4.4).

Задача восстановления в случае произвольного $D^n\to G(m,n+m)$ может оказаться достаточно сложной, поэтому естественным кажется рассматривать отображения постоянного ранга. Предположим, что ранг Φ постоянен и равен k, $2\le k\le n$. В этой ситуации в достаточно малой области D^n можно ввести такие C^r-гладкие координаты $v^1,...,v^n$, что $d_\Phi(\frac{\partial}{\partial v^i})\equiv 0$ при $i=\overline{k+1,n}$, и сужение Φ на k-мерную область $D^k=\{(v^1,...,v^n)\in D^n \mid v^{k+1}=\mathrm{const},...,v^n=\mathrm{const}\}$ является C^r-гладким погружением. В дальнейшем будем предполагать, что в D^n введены именно такие координаты; точку из D^n будем по-прежнему обозначать через $v=(v^1,...,v^n)$, точку из D^k – через $u=(v^1,...,v^k)$, а сужение отображения Φ на D^k – через Φ_0. Матричнозначная функция $\xi(v^1,...,v^n)$, задающая отображение Φ, не зависит от переменных $v^{k+1},...,v^n$, и можно рассматривать $z=\xi(v^1,...,v^k)$ как задание C^r-гладкого погружения Φ_0. Система (4.3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\left\|x^1,...,x^n\right\|\ \frac{\partial \xi}{\partial v^j}\quad=\quad\frac{\partial}{\partial v^j}\left\|x^1,...,x^n\right\|\ \frac{\partial \xi}{\partial v^j},\quad i,j=\overline{1,k}; \qquad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^t}\left\|x^1,...,x^n\right\|\ \frac{\partial \xi}{\partial v^i}\quad=0,\quad i=\overline{1,k},\quad t=\overline{k+1,n}. \qquad (4.5.2)$$

Вследствие необходимого условия теоремы А будем предполагать, что существует такое $l \leq m$, что Φ является (k,l)-приводимым; очевидно, что Φ_0 также (k,l)-приводимо.

Пусть $\tilde{\Phi}_0 : D^k \to G(k, l+k)$ – некоторая редукция отображения Φ_0, которая существует в виду леммы 4. Из лемм 5, 6 следует, что $\tilde{\Phi}_0$ есть C^r-гладкое (k,l)-приводимое погружение. Не уменьшая общности, будем считать, что в $G(m, n+m)$ и в $G(l, k+l)$ введены согласованые естественные координаты z^i_σ , $\tilde{z}^j_\tau$ и имеют место (2.5)–(2.16) для матричнозначной функции $\xi(v^1, ..., v^k)$, задающей Φ_0, и для матричнозначной функции $\tilde{\xi}(v^1, ..., v^k)$, задающей $\tilde{\Phi}_0$. Подставим в (4.5) выражение (2.10) для $\partial\xi/\partial v^i$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \left\|x^1, ..., x^n\right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{matrix} \right\|$$

$$\times \frac{\partial \xi}{\partial v^j} \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & -b^{n+1}_{l+1} & \dots & -b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -b^{n+l}_{l+1} & \dots & -b^{n+l}_m \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{\partial}{\partial v^j} \left\|x^1, ..., x^n\right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{matrix} \right\|$$

$$\times \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v^i} \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & -b^{n+1}_{l+1} & \dots & -b^{n+1}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -b^{n+l}_{l+1} & \dots & -b^{n+l}_m \end{matrix} \right\|, i, j = \overline{1, k}; \qquad (4.6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^t} \left\|x^1, ..., x^n\right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{matrix} \right\|$$

$$\times\frac{\partial\tilde\xi}{\partial v^i}\left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & -b^{n+1}_{l+1} & \dots & -b^{n+1}_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -b^{n+l}_{l+1} & \dots & -b^{n+l}_m \end{matrix}\right\| = 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad t=\overline{k+1,n}. \tag{4.6.2}$$

Введем в рассмотрение функции $y^1(v^1,...,v^n),...,y^k(v^1,...,v^n)$ положив

$$\left\|y^1,...,y^k\right\| = \left\|x^1,...,x^n\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a^1_{k+1} & \dots & -a^k_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ -a^1_n & \dots & -a^k_n \end{matrix}\right\|. \tag{4.7}$$

Тогда система (4.6) будет эквивалентна, как нетрудно проверить, следующей системе:

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\left\|y^1,...,y^k\right\| \frac{\partial\tilde\xi}{\partial v^j} = \frac{\partial}{\partial v^j}\left\|y^1,...,y^k\right\| \frac{\partial\tilde\xi}{\partial v^j}, \quad i,j=\overline{1,k}; \tag{4.8.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^t}\left\|y^1,...,y^k\right\| \frac{\partial\tilde\xi}{\partial v^i} = 0, \quad i=\overline{1,k}, \quad t=\overline{k+1,n}. \tag{4.8.2}$$

Так как $\tilde\Phi_0$ является (k,l)-приводимым, то, применяя лемму 3, получаем, что (4.8.2) имеет место тогда и только тогда, когда $\partial\left\|y^1,...,y^k\right\|/\partial v^t = 0$ при $t=\overline{k+1,n}$. Таким образом, функции $x^1,...,x^n$ суть решение системы (4.6) тогда и только тогда, когда функции $y^1,...,y^k$ не зависят от $v^{k+1},...,v^n$ и являются решением системы (4.8.1). Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 4, можно показать, что вектор-функции $\vec a_\alpha, \vec b_\beta$ из (2.6), (2.7) являются C^{r-1}-гладкими. Поэтому при $s\le r-1$, если $x^1,...,x^n \in C^s(D^n)$, то и $y^1,...,y^k\in C^s(D^r)$; обратно, если $y^1,...,y^k\in C^s(D^r)$, то, задав $x^{k+1},...,x^n\in C^s(D^n)$, можно определить $x^1,...,x^k\in C^s(D^n)$, записав (4.7) в виде

$$\left\|x^1,...,x^k\right\| = \left\|y^1,...,y^k\right\| + \left\|x^{k+1},...,x^n\right\| \left\|\begin{matrix} a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^1_n & \dots & a^k_n \end{matrix}\right\|. \tag{4.9}$$

Зафиксируем произвольную точку $\hat v\in D^n$ и соответствующую ей точку $\hat u\in D^k$. Пусть существует C^s-гладкое решение системы (4.5), удовлетворяющее (4.4). Тогда существует решение $x^1(v^1,...,v^n),...,x^n(v^1,...,v^n)\in C^s(D^n)$ системы (4.5), удовлетворяющее (4.4) и обращающееся в нуль в точке $\hat v$.

Функции $y^1(v^1,...,v^k),...,y^k(v^1,...,v^k)$ из (4.7) будут тогда $C^{min(s,r-1)}$-гладким решением системы (4.8.1), обращающимся в нуль в точке $\hat{u}$. Дифференцируя (4.7), можно получить, что в точке $\hat{v}^1,...,\hat{v}^n$ имеет место

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial v^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^n} \end{matrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{matrix} \frac{\partial y^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial v^1} & \frac{\partial x^{k+1}}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial v^1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial x^{k+1}}{\partial v^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^n} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^1_{k+1} & \dots & a^k_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_n & \dots & a^k_n & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{4.10}$$

Из (4.4) и (4.10) следует, что в точке $\hat{u}$, а следовательно, и в некоторой ее окрестности $U^k \subset D^k$ функции $y^1,..,y^k$ удовлетворяют условию

$$\mathrm{Det} \left\|\begin{matrix} \frac{\partial y^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial v^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^1}{\partial v^k} & \dots & \frac{\partial y^k}{\partial v^k} \end{matrix}\right\| \neq 0. \tag{4.11}$$

Таким образом, при $2 \le s \le r-1$ для решения $x^1(v^1,...,v^n),...,x^n(v^1,...,v^n) \in C^s(D^n)$ системы (4.5), удовлетворяющего в D^n условию (4.4) и обращающегося в нуль в точке $\hat{v}$, функции $y^1(v^1,...,v^k),...,y^k(v^1,...,v^k) \in C^s(U^k)$ из (4.7) будут решением системы (4.8.1), удовлетворяющим в U^k условию (4.11) и обращающимся в нуль в точке $\hat{u}$.

Обратно, пусть существует C^s-гладкое решение системы (4.8.1), удовлетворяющее (4.11). Тогда существует решение $y^1(v^1,...,v^k)$,..., $y^k(v^1,...,v^k) \in C^s(D^k)$ системы (4.8.1), удовлетворяющее (4.11) и обращающееся в нуль в точке $\hat{u}$. Зададим функции $x^{k+1}(v^1,...,v^n)$,..., $x^n(v^1,...,v^n) \in C^s(D^n)$ так, чтобы в точке $\hat{v}$ имело место

$$\mathrm{Det} \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x^{k+1}}{\partial v^{k+1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^{k+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{k+1}}{\partial v^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^n} \end{matrix}\right\| \neq 0 \tag{4.12}$$

и данные функции обращались в нуль в точке $\hat{v}$. Из (4.9) определим функции $x^1(v^1,...,v^n),...,x^k(v^1,...,v^n) \in C^{min(s,r-1}(D^n)$. Тогда набор функций $x^1,...,x^n$ является решением системы (4.5), обращающимся в нуль в точке $\hat{v}$. Из (4.10)–(4.12) следует, что в точке $\hat{v}$, а значит, и в некоторой ее окрестности $U^n \subset D^n$ указанный набор функций удовлетворяет условию (4.4).

Таким образом, при $2 \le s \le r-1$ для решения $y^1(v^1,...,v^k)$,..., $y^k(v^1,...,v^k)$ $\in C^s(D^k)$ системы (4.8.1), удовлетворяющего в D^k условию (4.11) и обращающегося в нуль в точке $\hat{u}$, можно построить решение $x^1(v^1,...,v^n)$,..., $x^n(v^1,...,v^n) \in C^s(U^n)$ системы (4.5), удовлетворяющее в U^n условию (4.4) и обращающееся в нуль в точке $\hat{v}$.

Но легко видеть, что существует решение $y^1,...,y^k \in C^s(D^k)$ системы (4.8.1), удовлетворяющее (4.11) тогда и только тогда, когда существует C^s-гладкое погружение $\tilde{\varphi} : D^k \to E^{k+l}$, индуцирующее отображение Грассмана $\tilde{\Phi}_0 : D^k \to G(k, l+k)$ (для этого нужно дословно повторить рассуждения, приведенные в начале данного раздела для отображения Φ, применив их к отображению $\tilde{\Phi}_0$). Отсюда тривиальным образом следует заключение теоремы Б, сформулированной во Введении.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Ю.А. Аминову (ФТИНТ НАН Украины, Харьков), под чьим руководством выполнена эта работа, а также А. Буте де Монвель (Университет Париж-7) и Л. Буте де Монвелю (Университет Париж-6) за поддержку.

Список литературы

[1] *Ю.А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. — Укр. геом. сб. (1980), вып. 23, с. 3–16.

[2] *А.В. Погорелов*, Многомерная проблема Минковского. Наука, Москва (1975), 96 с.

[3] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — Успехи мат. наук (1991), т. 46, вып.2 (278), с. 41–83.

[4] *А.А. Борисенко*, О полных параболических поверхностях. — Укр. геом. сб. (1985), вып. 28, с. 8–19.

[5] *Ю.А. Аминов, Т.С. Тарасова*, Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу. — Укр. геом. сб. (1983), вып. 26, с. 6–13.

[6] *В.А. Горькавый*, Восстановление подмногообразия евклидова пространства по вырожденному в линию грассманову образу. — Мат. заметки (1996), т. 59, вып. 5, с. 681–691.

[7] *В.А. Горькавый*, Восстановление трехмерного подмногообразия пятимерного евклидова пространства по вырожденному двумерному грассманову образу. — Мат. физ., анализ, геом. (1995), т. 2 , вып. 1, с. 25–41.

Theorem of reduction in the problem of reconstruction of submanifolds in Euclidean space by given Grassmann image

Vasil Gorkaviy

A necessary condition for the Grassmann image of submanifolds in the Euclidean space is proved. It is shown that the reconstruction of a submanifold $F^n \subset E^{n+m}$ with the constant dimension l of the first normal space by a given k-dimensional Grassmann image Γ is equivalent to the reconstruction of some submanifold $\tilde{F}^k \subset E^{k+l}$ with the constant dimension l of the first normal space by a given k-dimensional Grassmann image $\tilde{\Gamma}$, where $\tilde{\Gamma}$ is connected with Γ in a special way.

Теорема редукції у задачі відновлення підмноговидів евклідова простору за заданим грасмановим образом

Василь Горькавий

Доводиться необхідна умова на грасманів образ підмноговиду евклідового простору. Показано, що відновлення підмноговиду $F^n \subset E^{n+m}$ з постійною розмірністю l першого нормального простору за заданим k-вимірним грасмановим образом Γ еквівалентно відновленню деякого підмноговиду $\tilde{F}^k \subset E^{k+l}$ з постійною розмірністю l першого нормального простору за заданим k-вимірним грасмановим образом $\tilde{\Gamma}$, де $\tilde{\Gamma}$ спеціальним чином зв'язано з Γ.