Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 4, с. 407–427

Геометрический метод синтеза динамической обратной связи

В.Е. Белозеров

Днепропетровский государственный университет,
Украина, 320625, г. Днепропетровск, пр. Гагарина, 72

Статья поступила в редакцию 25 сентября 1995 года,
после переработки – 14 июня 1996 года

Пусть размерности пространств состояний n, входов m и выходов p общей линейной системы управления, а также целое число $l \geq 0$ удовлетворяют ограничению $n < mp + l(m + p - \min(m,p))$. Предложен алгоритм синтеза динамического компенсатора порядка l. Показано, что если $n \geq mp$, то минимальный порядок $l_{\min}$ компенсатора, который допускает такая система управления, определяется соотношением $1+(n-mp)/(m+p-1) > l_{\min} \geq (n-mp)/(m+p-1)$ (в случае $n < mp$, $l_{\min} = 0$). Кроме того, для систем с двумя входами или выходами разработана процедура, полностью решающая проблему синтеза компенсаторов 1-го и, частично, 2-го порядков. Приводится пример.

Введение

Исследуем известную задачу о синтезе динамической обратной связи (динамического компенсатора) для линейной системы управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t), & x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ y(t) = Cx(t), & y(t) \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^p$ – вещественные линейные пространства вектор-столбцов размерностей n, m, p; $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ – векторы состояний, входов и выходов; A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, B: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, C: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ – вещественные линейные отображения соответствующих пространств (система (0.1) в дальнейшем будет называться системой типа (p, n, m)). Точная формулировка этой задачи выглядит так [1]:

Задача (о синтезе динамического компенсатора). *Построить динамическую линейную систему* $\dot{w}(t) = Dw(t) + v(t)$, $w(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^l$, *которая, будучи присоединенной к системе* (0.1) *так, чтобы* $u(t) = Ky(t) + Gw(t)$,

$v(t) = Hy(t)$, обеспечила бы совпадение характеристического многочлена оператора

$$\left(\begin{array}{c|c} A+BKC & BG \\ \hline HC & D \end{array} \right) : \mathbb{R}^{n+l} \quad \mathbb{R}^{n+l}$$

с наперед заданным вещественным приведенным многочленом степени $n+l$. Здесь l – неотрицательное целое число, называемое порядком динамического компенсатора; $D\colon \mathbb{R}^l \quad \mathbb{R}^l$, $H\colon \mathbb{R}^p \quad \mathbb{R}^l$, $G\colon \mathbb{R}^l \quad \mathbb{R}^m$, $K\colon \mathbb{R}^p \quad \mathbb{R}^m$ – вещественные линейные отображения соответствующих пространств, подлежащие определению.

Заметим, что последняя задача допускает более абстрактную формулировку [2], которую и будем использовать в дальнейшем. Пусть

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & O_l \end{array} \right) : \mathbb{R}^{n+l} \quad \mathbb{R}^{n+l},\ B_l = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & E_l \end{array} \right) : \mathbb{R}^{m+l} \quad \mathbb{R}^{n+l},$$

$$C_l = \left(\begin{array}{c|c} C & O \\ \hline O & E_l \end{array} \right) : \mathbb{R}^{n+l} \quad \mathbb{R}^{p+l} \tag{0.2}$$

– линейные отображения соответствующих пространств. Требуется определить вещественное линейное преобразование общего вида

$$K_l = \left(\begin{array}{c|c} K & G \\ \hline H & D \end{array} \right) : \mathbb{R}^{p+l} \quad \mathbb{R}^{m+l}$$

такое, что $\det(\lambda E_{n+1} \quad A_l \quad B_l K_l C_l) = \lambda^{n+l} + d_l \lambda^{n+l \quad 1} + \ldots + d_{n+1}$, где вещественные числа $d_l, \ldots, d_{n+l}$ – любые наперед заданные; E_l и O_l – соответственно единичная и нулевая матрицы порядка l.

Лучший (в практическом смысле) известный результат о синтезе динамической обратной связи выглядит следующим образом [1–4]. Предположим, что система (0.1) – вполне управляема и вполне идентифицируема. Обозначим через ν_B и ν_C ее показатели управляемости и наблюдаемости, соответственно [1]. Тогда система (0.1) допускает динамический компенсатор порядка $l = \max(\nu_B \quad 1, \nu_C \quad 1)$. Алгоритм синтеза такого компенсатора также приведен в [1] и [4].

В настоящей работе последний результат будет существенно улучшен. При этом предлагаемая процедура синтеза базируется на методе спуска [5] и итерационно-параметрическом методе [6]. Во избежание ненужных осложнений в дальнейшем изучается только локальный вариант задачи синтеза [5, 6], что вполне приемлемо с практической точки зрения. (Напомним, что в локальной задаче необходимо построить обратную связь K_l, реализующую коэффициенты d_i характеристического полинома с наперед заданной точностью $\delta > 0$: $d_i - d_i < \delta$, где $\det(\lambda E_{n+1} - A_l - B_l K_l C_l) = \lambda^{n+l} + d_l \lambda^{n+l-1} + \ldots + d_{n+1}$; $i = 1, \ldots, n+l$). Отметим, что в [6] также рассматривалась эта проблема. Однако там были даны только необходимые и достаточные условия существования компенсатора заданного порядка без алгоритма его построения. Прямое же использование метода синтеза статической обратной связи, приведенного в [6], в задаче о динамической обратной связи невозможно.

1. Полиномиальное представление системы типа (p, n, m)

Определим целые числа $\nu_1, \ldots, \nu_m$ (индексы управляемости пары (A, B) [1]) следующим образом: $\nu_i = k + 1$, если $i = 1, \ldots, r$, и $\nu_i = k$, если $i = r + 1, \ldots, m$, где k – целая часть числа n/m, а $r = n - km$; $i, j = 1, \ldots, m$. Пусть $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – невырожденная матрица, элементы которой – независимые переменные, и t_i – ее столбцы; $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим функциональные векторы $B(t_i) = B \cdot t_i$ и составим матрицу

$$S(T) = \Big(B(t_1), \ldots, A^{\nu_1 - 1} B(t_1), \ldots, B(t_m), \ldots, A^{\nu_m - 1} B(t_m)\Big) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Тогда легко показать: для вполне управляемой пары (A, B) существует такая матрица $T_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, что $\det S(T_0) = 0$.

Итак, пусть $\det S(T_0) = 0$ для некоторой невырожденной матрицы $T_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Определим вектор-строки $v_i \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$v_i S(T_0) = \left(\frac{0 \ldots 0}{\nu_1} \ldots \frac{0 \ldots 1}{\nu_i} \ldots \frac{0 \ldots 0}{\nu_m}\right), \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Затем легко показать, что матрица

$$p = \left[v_1^T, (v_1, A)^T, \ldots, (v_1, A^{\nu_1 - 1})^T, \ldots, v_m^T, (v_m, A)^T, \ldots, (v_m, A^{\nu_m - 1})^T\right]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

– невырожденна. Если теперь выбрать соответствующим образом обратимую матрицу $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (которая совпадает с E_m, если число m делит нацело число n), то матрицы A, B и C можно представить в форме

$$A_c = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} \end{pmatrix}, \quad B_c = PBT_0G = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \ldots & B_{mm} \end{pmatrix},$$

$$C_c = CP^{-1} = (c_1, \ldots, c_n)\,, \tag{1.1}$$

где C_c – матрица общего вида и $c_1, \ldots, c_n$ – ее столбцы;

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots\ \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ a_{i,\eta_i\ 1+1} & a_{i,\eta_i\ 1+2} & \ldots & a_{i,\eta_i} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{\nu_i\ \ \nu_i},$$

$$\eta = \nu_1 + \ldots + \nu_{i\ \ 1} + 1, \ldots, \eta = \nu_1 + \ldots + \nu_i;$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots\ \ldots & 0 \\ a_{i,\delta_i\ 1+1} & \ldots & a_{i,\delta_i} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{\nu_i\ \ \nu_j}, \quad i = j\,,$$

$$\delta_1 = \nu_1 + \ldots + \nu_{j\ \ 1} + 1, \ldots, \delta_j = \nu_1 + \ldots + \nu_{j\ \ 1} + \nu_j;$$

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{\nu_i}; \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{\nu_i}; \quad i = j\,;$$

$\mathbb{R}^{\nu_i\ \ \nu_j}$ – вещественное линейное пространство матриц размеров $\nu_i \quad \nu_j$; i, $j = 1, \ldots, m$.

Заменим в матрицах (0.2) матрицы A, B, C на A_c, B_c, C_c, соответственно, и построим полиномиальную матрицу

$$D(\lambda) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, & a_{1\nu_1}, & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, \ldots, & a_{m\nu_1}, & 0 \\ c_1, \ldots, & c_{\nu_1}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_1} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_{1,\nu_1+1}, \ldots, & a_{1,\nu_1+\nu_2}, & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,\nu_1+1}, \ldots, & a_{m,\nu_1+\nu_2}, & 0 \\ c_{\nu_1+1}, \ldots, & c_{\nu_1+\nu_2}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_2} \end{pmatrix} \right|$$

$$\ldots \left| \begin{pmatrix} a_{1,\nu_1+\ldots+\nu_{m\ \ 1}+1}, \ldots, & a_{1,n}, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ a_{m,\nu_1+\ldots+\nu_{m\ \ 1}+1}, \ldots, & a_{m,n}, & 1 \\ c_{\nu_1+\ldots+\nu_{m\ \ 1}+1}, \ldots, & c_n, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_m} \end{pmatrix} \right) \quad \mathbb{R}(\lambda)^{(m+p)\ \ m},$$

где λ – независимая переменная и $\mathbb{R}(\lambda)$ – кольцо всех вещественных полиномов от λ. Матрица $D(\lambda)$ в дальнейшем будет называться полиномиальным представлением системы типа (p, n, m).

2. Описание процедуры синтеза

В связи со специфическим квазидиагональным строением матриц A_l, B_l, и C_l метод спуска приводит к явным формулам, которые описываются ниже.

Рассмотрим матрицу

$$K_l = \left(\begin{array}{c|c} K & G \\ \hline X + YBK & \underbrace{F + YBG}_{l} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \}\, l \end{array} \qquad \mathbb{R}^{(m+l)\quad(p+l)},$$

где матрица X максимального ранга задается произвольно; матрицы F, K и G пока не определены, а матрица Y вычисляется из матричного уравнения

$$YA \quad FY = XC \tag{2.1}$$

Тогда матрица замкнутой системы будет иметь вид

$$A_l + B_l K_l C_l = \left(\begin{array}{c|c} A + BKC & BG \\ \hline XC + YBKC & F + YBG \end{array} \right). \tag{2.2}$$

Применим теперь к (2.2) преобразование подобия вида

$$S_l = \left(\begin{array}{c|c} E_n & O \\ \hline Y & E_l \end{array} \right),$$

где E_n и E_l – единичные матрицы порядков n и l. Тогда, с учетом (2.1), получим

$$S_l^{\ \,1}(A_l + B_l K_l C_l) S_l = \left(\begin{array}{c|c} A + BKC + BGY & BG \\ \hline O & F \end{array} \right). \tag{2.3}$$

(Матрица (2.3) по сути дела и является результатом процедуры метода спуска [5].) Отсюда немедленно вытекает, что для решения задачи о синтезе динамического компенсатора можно применить следующий алгоритм:

1) выбрать матрицу F таким образом, чтобы матрица (2.3) имела бы l требуемых собственных чисел (из $n + l$ заданных);

2) решить задачу синтеза статической обратной связи для системы $((C^T\,Y^T)^T, A, B)$ типа $(p+l, n, m)$. (При этом необходимо разместить желаемым образом n оставшихся собственных чисел матрицы (2.3). Так как матрицы (2.3) и $A_l + B_l K_l C_l$ – подобны, то тем самым будет решена и задача о синтезе динамического компенсатора.)

Как известно [6], для общих матриц A, B и C итерационно-параметрический метод работает только если $mp > n$. Поэтому в нашем случае, очевидно, должно выполняться условие $m(p+l) > n$. (Если же за основу процедуры синтеза взята не пара (A,B), а пара (C,A), то тогда должно выполняться неравенство $(m+l)p > n$.)

Таким образом, если выбрать в качестве основы алгоритма синтеза ту из пар (A,B) или (C,A), для которой произведение $l(m+p-\min(m,p))$ – максимально, то получим следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть для общих матриц A, B и C системы (0.1) и некоторого целого $l \geq 0$ имеет место неравенство*

$$n < mp + l(m+p-\min(m,p))\,.$$

Тогда существует динамический компенсатор порядка l, решающий задачу синтеза, матричные параметры которого задаются соотношениями: $H = X + YBK$, $D = F + YBG$, где X – любая ненулевая вещественная $(l \times p)$ матрица ранга $\max(l,p)$ общего вида; F выбирается в пункте 1 алгоритма; Y находится из решения матричного уравнения (2.1); K и G – результат пункта 2 алгоритма.

Доказательству теоремы предпошлем две специальные леммы.

Без потери общности будем считать, что для общей линейной системы (C,A,B) типа (p,n,m) справедливы соотношения: $mp = n+1$ и $m \geq p$. Тогда $\nu_1 = \ldots = \nu_{m-1} = p$, $\nu_m = p-1$. Составим полиномиальное представление

$$D(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} f_{11}(\lambda) & \ldots & f_{1,m-1}(\lambda) & f_{1m}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{m+p,1}(\lambda) & \ldots & f_{m+p,m-1}(\lambda) & f_{m+p,m}(\lambda) \end{array}\right) = (D^{(m-1)}(\lambda)\; D^{(m)}(\lambda))$$

системы (C,A,B) (здесь $D^{(m-1)}(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{(m+p)\times(m-1)}$; $D^{(m)}(\lambda)$ – последний столбец матрицы $D(\lambda)$) и определим максимальное подпространство $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^{(m+p)}$ такое, что для любой вектор-строки $v \in \mathbb{V}$ справедливо тождество $vD^{(m)}(\lambda) \equiv 0$. (Заметим, что из равенства $m+p-(\nu_m+1) = m$ следует, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{V} \geq m$.)

Пусть $T \in \mathbb{R}^{m\times(m+p)}$ – матрица, составленная из m любых линейно-независимых вектор-строк пространства $\mathbb{V}$. Обозначим через $T^{(1)}(\lambda), \ldots$, $T^{(m)}(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ грассмановы координаты $(m-1)$-вектора $\Lambda^{m-1}(TD^{(m-1)}(\lambda))$ [5, 6]. (Это полиномы степени $\leq (m-1)p$.)

Лемма 2.1. *Предположим, что* $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{V} = m$ *и многочлены* $T^{(1)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p\ \ 1}T^{(1)}(\lambda), \ldots, T^{(m)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p\ \ 1}T^{(m)}(\lambda)$ *линейно независимы. Тогда локальная задача синтеза для системы* (C, A, B) *имеет вещественное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим невырожденную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} Q \quad 0 \\ \hline T \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{(m+p)\ \ (m+p)},$$

где матрица $Q \quad \mathbb{R}^{p\ \ p}$ такова, что

$$GD(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda^{p\ \ 1} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{——} \\ & P(\lambda) & & 0 \end{array}\right)$$

Ясно, что $\Lambda^{m\ \ 1}P(\lambda) = (T^{(1)}(\lambda), \ldots, T^{(m)}(\lambda))^T$. Рассмотрим уравнение задачи синтеза в полиномиальной форме [6]

$$\Lambda^m(Z\ E_m)\ \ \Lambda^m G\ \ \left(\Lambda^m D(\lambda)\ \ \ \begin{pmatrix} \lambda^n + d_1\lambda^{n\ \ 1} + \ldots + d_n \\ \hline 0 \ldots\ldots\ldots 0 \end{pmatrix}\right) = 0, \quad Z \quad \mathbb{R}^{m\ \ p}. \tag{2.4}$$

Тогда линейная (относительно Z) часть уравнения (2.4) представится в виде

$$(T^{(1)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p\ \ 1}T^{(1)}(\lambda), \ldots, T^{(m)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p\ \ 1}T^{(m)}(\lambda))^T$$

$$+(t_1(\lambda^n + d_1\lambda^{n\ \ 1} + \ldots + d_n), \ldots, t_{n+1}(\lambda^n + d_1\lambda^{n\ \ 1} + \ldots + d_n))^T$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & & a_p^{(1)} & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \\ & a_0^{(1)} & & a_0^{(1)} \\ & & & \\ a_0^{(m)} & & a_p^{(m)} & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \\ & a_0^{(m)} & & a_0^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1(1, d_1, \ldots, d_n) \\ \\ \\ \\ t_{n+1}(1, d_1, \ldots, d_n) \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^n \\ \\ \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = (M + S) \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \\ \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},$$

где M, $S \quad \mathbb{R}^{(n+1) \quad (n+1)}$ и $\mathrm{rang} S = 1$; $t_1, \ldots, t_{n+1} \quad \mathbb{R}$; $T^{(i)}(\lambda) = a_0^{(i)}\lambda^p + \ldots + a_p^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$.

Так как полиномы $T^{(1)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p \quad 1} T^{(m)}(\lambda)$ – линейно независимы, то $\mathrm{rang} M = n+1$ и потому $\mathrm{rang}(M+S) \quad n$. Но матрица Якоби системы уравнения синтеза (обозначим ее через J) является некоторой подматрицей размера $(n+1) \quad n$ матрицы $M+S$ и, значит, $\mathrm{rang} J = n$ или $n \quad 1$. Если $\mathrm{rang} J = n$, то, согласно [6], этого достаточно для разрешимости задачи синтеза. Если же $\mathrm{rang} J = n \quad 1$, то, заменяя коэффициенты d_i на числа d_i в пределах $d_i \quad d_i \; < \delta$, $i = 1, \ldots, n$, можно добиться того, что $\mathrm{rang} J = n$. (Напомним, что мы рассматриваем локальную проблему синтеза.)

Лемма 2.2. *Пусть пара (C, A) – вполне наблюдаема, $F \quad \mathbb{R}^{l \quad l}$ – общая матрица соответствующих размеров и $Y = Y(X)$ – решение уравнения (2.1). Тогда найдется такая матрица X, что* $\mathrm{rang}(C^T \; Y^T)^T = p + l$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что F – диагональная матрица, все собственные числа λ_i которой вещественны и различны и совпадают с l (из $n+l$) требуемыми собственными числами замкнутой системы $A_l + B_l K_l C_l$, $i = 1, \ldots, n$. (Случай общей матрицы F приведет лишь к техническим усложнениям, но никак не отразится на конечном результате.)

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ – индексы наблюдаемости пары (C, A). Так как задача синтеза компенсаторов порядка $l \quad \mu_1 \quad 1$ решена [1, 2], то можно считать, что $l < \mu_1 \quad 1$. Предположим, что $c_1, \ldots, c_p$ – тот базис пространства $(\mathbb{R}^p)C$, для которого матрица

$$Q = \left[c_1^T, (c_1 A)^T, \ldots, (c_1 A^{\mu_1 \quad 1})^T, \ldots, c_p^T, (c_p A)^T, \ldots, (c_p A^{\mu_p \quad 1})^T\right]^T \quad \mathbb{R}^{n \quad n}$$

невырожденна. Обозначим через $x \quad \mathbb{R}^p$ вектор-строку, являющуюся решением уравнения $xC = c_1$, и представим матрицу X из (2.1) в виде $X = (x^T, \ldots, x^T)^T$. Тогда, если $\det(A \quad \lambda_i E_n) = 0$, то из (2.1) получим, что

$$Y = \begin{pmatrix} c_1(A \quad \lambda_1 E_n)^{\quad 1} \\ \\ c_1(A \quad \lambda_l E_n)^{\quad 1} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{l \quad n}.$$

(Так как рассматривается локальная задача синтеза, условие $\det(A \quad \lambda_i E_n) = 0$ может быть достигнуто сколь угодно малыми изменениями чисел λ_i, $i = 1, \ldots, l$.)

Рассмотрим матрицу $C_Y = (C^T \; Y^T)^T$. Так как $\mathrm{rang} C_Y = \mathrm{rang} C_Y (A \quad \lambda_1 E_n) \ldots (A \quad \lambda_l E_n)$, то всегда найдется обратимая матрица $T \quad \mathbb{R}^{(p+l) \quad (p+1)}$ такая, что $T C_Y (A \quad \lambda_1 E_n) \quad \ldots \quad (A \quad \lambda_l E_n) = ((c_1 A^l)^T, (c_1 A^{l \quad 1})^T, \ldots, c_1^T)^T$.

Доказательство леммы следует теперь из невырожденности матрицы Q и сравнения ее с матрицей $((c_1A^l)^T, \ldots, c_1^T)^T$. ■

Доказательство теоремы 2.1. Согласно алгоритму, приведенному выше, а также лемме 2.2, все сводится к решению задачи синтеза для системы (C_Y, A, B). Поэтому, как и в доказательстве леммы 2.1, будем считать, что $m(p+1) = n+1$ и $\nu_1 = \ldots = \nu_{m-1} = p+l$, $\nu_m = p+l-1$.

Представим систему (C_Y, A, B) в каноническом виде (1.1) и введем в нее обратную связь K_1 таким образом, чтобы в матрице $A + BK_1C_Y$ блоки A_{im} стали нулевыми, $i = 1, \ldots, m-1$. Кроме того, с помощью подходящего невырожденного преобразования $P \in \mathbb{R}^{(p+l)\times(p+1)}$ сделаем в первой строке c_1 матрицы PC_Y элементы c_{1i} равными нулю; $i = (m-1)(p+l)+1, \ldots, n$. Тогда в системе (C_Y, A, B) выделяется подсистема (c_1, A_1, B_1), где $c_1 \in \mathbb{R}^{1\times(n-\nu_m)}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-\nu_m)\times(n-\nu_m)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-\nu_m)\times(m-1)}$ полиномиальное представление которой имеет вид

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{1,m-1}(\lambda) \\ \vdots & \vdots \\ f_{m,1}(\lambda) & f_{m,m-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(\lambda) \\ \vdots \\ s_m(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(Здесь полиномы f_{ii} имеют степень $p+l$, а полиномы f_{ij} $(i \neq j)$ – степени $p+l-1$; $s_i(\lambda) = (f_{i1}(\lambda), \ldots, f_{i,m-1}(\lambda))$, $i = 1, \ldots, m$).

Покажем, что для системы (c_1, A_1, B_1) координаты поливектора $\Lambda^{m-1}D_1(\lambda) = (T^{(1)}(\lambda), \ldots, T^{(m)}(\lambda))^T$ – линейно независимы. Итак, пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ – такие числа, не все равные нулю, что $a_1T^{(1)}(\lambda) + \ldots + a_mT^{(m)}(\lambda) = 0$. Тогда из неравенства $\deg T^{(1)}(\lambda) > \deg T^{(i)}(\lambda)$ $(i = 2, \ldots, m)$ следует, что либо $a_1 = 0$, либо $T^{(1)}(\lambda) = 0$. Однако, в силу того, что $\deg f_{ii}(\lambda) > \deg f_{ij}(\lambda)$ $(i \neq j)$, второй вариант невозможен. Таким образом,

$$a_2T^{(2)}(\lambda) + \ldots + a_mT^{(m)}(\lambda) = 0\,, \tag{2.5}$$

где не все $a_i = 0$, $i = 2, \ldots, m$. Используя свойства определителей, равенство (2.5) можно записать в виде $\det(g_1(\lambda), \ldots, g_{m-2}(\lambda), s_m^T(\lambda)) = 0$, где столбцы $g_1(\lambda), \ldots, g_{m-2}(\lambda)$ представляют собой линейные комбинации столбцов $s_1^T(\lambda), \ldots, s_{m-1}^T(\lambda)$. Опять же имеются две возможности: либо $\Lambda^{m-2}(g_1(\lambda), \ldots, g_{m-2}(\lambda)) = 0$, либо $s_m(\lambda) = 0$. В первом случае получаем линейную зависимость между строками $s_1(\lambda), \ldots, s_{m-1}(\lambda)$, что невозможно из-за неравенства $\deg f_{ii}(\lambda) > \deg f_{ij}(\lambda)$; во втором – $c_1 = 0$ и, значит, $\operatorname{rang} C_Y < p+l$, что противоречит лемме 2.2. Таким образом, осталось признать линейную независимость полиномов $T^{(1)}(\lambda), \ldots, T^{(m)}(\lambda)$, а в силу того, что рассматривается локальная задача синтеза, и полиномов $T^{(1)}(\lambda), \ldots, \lambda^{p-1}T^{(m)}(\lambda)$. Последнего, согласно лемме 2.1, достаточно для разрешимости задачи синтеза для (C_Y, A, B). ■

З а м е ч а н и е. Для использования алгоритма [6] необходимо, чтобы в последнем столбце матрицы полиномиального представления системы (C_Y, A, B) было бы ровно $p + l$ линейно независимых координат. В противном случае упомянутый алгоритм не работает. Таким образом, первый шаг метода спуска должен привести от тройки (C_l, A_l, B_l) к тройке (C_Y, A, B), в которой пара (A, B) была бы представлена матрицами общего вида (т.е. была бы элементом некоторого открытого подмножества в $\mathbb{R}^{n^2+nm}$).

3. О компенсаторах минимального порядка

Ясно, что порядок l компенсатора, описанного в предыдущем пункте, не будем минимальным. (Этот минимум может быть найден, исходя из вычисления ранга функциональной матрицы (2.9) [6]. Однако желательно было бы получить явный результат только в терминах чисел n, m и p).

Разобьем матрицу $D(\lambda)$ полиномиального представления системы типа (p, n, m) на две подматрицы $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ размеров, соответственно, $m \quad m$ и $p \quad m$ так, что $D(\lambda) = (D_1^T(\lambda), D_2^T(\lambda))^T$. Введем еще в рассмотрение матрицу $(E_{m+l}\ K_l) \quad \mathbb{R}^{(m+l) \quad (m+p+2l)}$. Тогда уравнения задачи синтеза динамического компенсатора могут быть записаны в следующей полиномиальной форме:

$$\Lambda^{m+l}(E_{m+l}\ K_l) \quad \Lambda^{m+l}\begin{pmatrix} D_1(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & \lambda E_l \\ \hline D_2(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & E_l \end{pmatrix} = \lambda^{n+l} + d_1\lambda^{n+l \quad 1} + \ldots + d_{n+1}\,, \quad (3.1)$$

где, как всегда, символ E_r означает единичную матрицу порядка r, а символ $\Lambda^q G$ – q-ю внешнюю степень соответствующей матрицы G.

Предположим, что $m \quad l$ и введем в рассмотрение $(m + l) \quad (m + p + 2l)$-матрицу

$$S_l = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c} h_{11} & & h_{1m} & E_l & h_{1,m+1} & & h_{1,m+p} & O_l \\ \vdots & & \vdots & \overline{O_l} & \vdots & & \vdots & \overline{E_l} \\ h_{m+l,1} & & h_{m+l,m} & \overline{O} & h_{m+l,m+1} & & h_{m+l,m+p} & \overline{O} \end{array}\right),$$

все элементы h_{ij} которой – неизвестные величины.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \quad \mathbb{R}$ – любые различные числа. Воспользовавшись уравнением (3.1), запишем уравнения задачи синтеза в окончательной форме [6]

$$\Lambda^{m+l} S_l \quad G_1 = 0\,, \quad (3.2)$$

где

$$G_1 = \left(G \quad \begin{pmatrix} (1, d_1, \ldots, d_{n+l}) & U \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

– вещественная $(\mathrm{C}^{m+l}_{m+p+2l} \quad (n+l))$-матрица; $D_l(\lambda) = ((D_1(\lambda)\dot{+}\lambda E_l)^T \ (D_2(\lambda) \dot{+}\lambda E_l)^T)^T$; $G = (\Lambda^{m+l}(D_l(\lambda_1)), \ldots, \Lambda^{m+l}(D_l(\lambda_{n+1})))$ – известная матрица тех же размеров, что и G_1, а

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+l} & \lambda_{n+l}^{n+l} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_{n+l} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

– $(n+l+1) \quad (n+l)$-матрица ранга $n+l$. (Отметим, что для эквивалентности систем (3.1) и (3.2) первый минор матрицы S_l не должен быть равен нулю.)

Обозначим через $h_1, \ldots, h_{m+l} \quad \mathbb{R}^{p+m}$ вектор-строки матрицы $\bar{S}_l$, полученной из S_l после выбрасывания всех единичных столбцов. Тогда уравнение (3.2) запишется относительно неизвестных векторов $h_1, \ldots, h_{m+l}$ в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^{r} \Lambda^{m \quad l} H_{m \quad l} \Lambda(h_{i_1}\Lambda \ldots \Lambda h_{i_l}) \quad W_{i_l \ldots i_l} = 0\,, \tag{3.3}$$

где $r = 2^l$; $H_{m \quad l}$ – неизвестная матрица, составленная из $m \quad l$ последних строк матрицы $\bar{S}_l$, $2j \quad 1 \quad i_j \quad 2j$; $i_l < \ldots < i_l$; $W_{i_l \ldots i_l}$ – известные матрицы размеров $\mathrm{C}^m_{m+p} \quad (n+l)$; $j = 1, \ldots, l$. Полученная система выгодно отличается от уравнения (3.1) тем, что степени уравнений, входящих в (3.3), равны m, а не $m+l$. Кроме того, структура (3.3) лучше приспособлена для численного анализа, нежели структура уравнения (3.1).

Перейдем сначала к исследованию компенсаторов I-го порядка. Для этой цели перепишем систему (3.3) в виде

$$(\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \delta_1, \ldots, \delta_r)V = 0\,, \tag{3.4}$$

где Δ_i, δ_i – неизвестные грассмановы координаты [6] матриц $(h_1^T, h_3^T, \ldots, h_{m+1}^T)^T \quad \mathbb{R}^{m \quad (m+p)}$, $(h_2^T, h_3^T, \ldots, h_{m+1}^T)^T \quad \mathbb{R}^{m \quad (m+p)}$; $r = \mathrm{C}^m_{m+p}$; $V \quad \mathbb{R}^{2r \quad (n+2)}$ – известная матрица; $i = 1, \ldots, r$.

Очевидно, что к уравнениям (3.4) необходимо добавить ограничения на переменные Δ_i, δ_i, учитывающие то, что это грассмановы координаты линейных пространств, которые натянуты, соответственно, на строки h_1, $h_3, \ldots, h_{m+1}$ и $h_2, h_3, \ldots, h_{m+1}$. Используя результаты, приведенные в [7], легко показать, что таких ограничений для каждой группы переменных (Δ_i и δ_i)

будет ровно по $\mathrm{C}^m_{m+p} \quad mp \quad 1$ штук. Кроме того, еще имеются ограничения, связывающие координаты Δ_i и δ_i между собой. Для установления числа этих ограничений рассмотрим произвольную матрицу $W \quad \mathbb{R}^{2m \quad (m+p)}$. Необходимо выяснить условия существования таких неособых матриц $G \quad \mathbb{R}^{(m+p) \quad (m+p)}$ и T_1, $T_2 \quad \mathbb{R}^{m \quad m}$, что

$$(h_1^T, h_3^T, \dots, h_{m+1}^T, h_2^T, h_3^T, \dots, h_{m+1}^T)^T = (T_1 \quad T_2)WG\,. \tag{3.5}$$

(Отсюда, в частности, вытекает, что $\mathrm{rang} W = m+1$).

Ясно, что с помощью матрицы G матрицу, стоящую в правой части равенства (3.5), можно привести к виду

$$\begin{array}{c} m\left\{\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right. \\ m\left\{\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{array}}\right. \end{array}
\left(\begin{array}{cccccc}
 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & 0 & 0 & & 0 \\
 & & \multicolumn{2}{|c|}{} & & 0 \\
\vdots & \vdots & \multicolumn{2}{|c|}{\vdots \quad \vdots} & & \vdots \\
 & & \multicolumn{2}{|c|}{} & & 0 \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\quad}_{m}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\quad}_{p \quad 1}} & &
\end{array}\right)
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{array}}\right\} m \quad 1\,.$$

Тогда для существования матриц T_1 и T_2, удовлетворяющих (3.5), необходимо, чтобы матрица, выделенная пунктиром, была бы нулевой. Это дает еще $(m \quad 1)(p \quad 1)$ ограничений на координаты Δ_i и δ_i.

Таким образом, для разрешимости системы (3.4) имеем $2\mathrm{C}^m_{m+p} \quad 1$ неизвестных и $n+1+2(\mathrm{C}^m_{m+p} \quad mp \quad 1)+(m \quad 1)(p \quad 1)$ ограничений. Тогда максимальный порядок системы управления, допускающей компенсатор первого порядка, определяется условием $2\mathrm{C}^m_{m+p} = n+2+2(\mathrm{C}^m_{m+p} \quad mp \quad 1)+(m \quad 1)(p \quad 1)$, из которого следует, что $n = mp+m+p \quad 1$.

Итак, максимальный порядок n системы управления, допускающей компенсатор порядка $l=0$, определяется соотношением $n = mp$; при $l = 1$ это соотношение переходит в $n+1 = mp+m+p$. Следовательно, увеличение порядка компенсатора на 1 приводит к росту размерности пространства состояний также на 1 и добавляет $m+p$ независимых уравнений к уже имеющимся mp уравнениям, определяющим решение задачи синтеза. Индукция по l очевидна: для компенсатора l-го порядка максимальная размерность n пространства состояний находится из уравнения

$$n+l = mp+l(m+p); \quad l = 0,1,2\dots\,. \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) позволяет теперь легко получить условие существования компенсатора минимального порядка $l_{\min}$ для системы типа (p,n,m):

$$mp+(l_{\min} \quad 1)(m+p \quad 1) < n \quad mp+l_{\min}(m+p \quad 1); \quad l = 0,1,2\dots\,.$$

Последнее же неравенство приводит к такому результату

Теорема 3.1. *Пусть $n \geq mp$ и целое число $l_{\min} \geq 0$ удовлетворяет ограничению*

$$1 + (n - mp)/(m + p - 1) > l_{\min} \geq (n - mp)/(m + p - 1)\,.$$

Тогда для общих матриц A, B и C системы (0.1) минимальный порядок компенсатора, решающего задачу синтеза, совпадает с числом $l_{\min}$.

Отметим, что этот результат значительно проще, нежели общая теорема 3, приведенная в [6].

Согласно теореме 2.1, максимальная размерность пространства состояний, которая может быть реализована с помощью компенсатора порядка l, определяется по формуле $n = mp + l(m + p - \min(m,p)) - 1$. Пусть, как и выше, число $l_{\min}$ обозначает минимальный порядок компенсатора, который допускает система типа (p, n, m). Тогда, сравнивая последнюю формулу для n с формулой (3.6), в которой положено $l = l_{\min}$, получим такой результат.

Теорема 3.2. *Для общей системы (0.1) типа (p, n, m) порядок l компенсатора, рассчитанного согласно теореме 2.1, связан с числом $l_{\min} > 0$ неравенством*

$$l_{\min} + 1 \leq l \leq 2l_{\min}\,.$$

Таким образом, при $l_{\min} = 1$, например, задача синтеза для общей системы управления всегда может быть решена с помощью компенсатора порядка 2 независимо от чисел n, m и p.

Пусть, например, система (0.1) имеет тип (3, 20, 3). Тогда, согласно [1, 4], можно построить компенсатор порядка $l = 6$. Если же использовать алгоритм, приведенный выше, то будем иметь $l = 4$. Минимальный порядок компенсатора в этом случае равен 2. В случае же системы типа (10, 119, 10) имеем, соответственно: согласно [1] – 11, по теореме 2.1 – 2 и $l_{\min} = 1$.

4. Синтез компенсаторов в случае $\min(m,p) = 2$ и $l = 1$ или 2

Пусть $l = 1$. Для определенности будем считать, что $m = 2$. Тогда, согласно (3.6), $n = 3p+1$ и система (3.3) запишется относительно неизвестных векторов h_1, h_2 и h_3, в следующем виде:

$$(h_3 \Lambda h_1)W_1 + (h_3 \Lambda h_2)W_2 = 0\,, \tag{4.1}$$

где W_i – известные вещественные $C^2_{p+2} \times (3p+2)$-матрицы; $i = 1, 2$. (В силу теоремы 3.1, уравнения (4.1) алгебраически независимы). Так как h_3 входит в соотношения (4.1) линейно, то последнее может быть переписано в в форме

$$h_3 \; (F(h_1)W_1 + F(h_2)W_2) = 0\,, \tag{4.2}$$

где $F(h_i)$ – вещественная $(p+2) \quad \mathrm{C}^2_{p+2}$-матрица; $i = 1, 2$.

Для дальнейшего необходимо выписать явный вид матрицы $F(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ – r-мерная вектор-строка. (Заметим, что в этой ситуации F имеет размеры $r \quad \mathrm{C}^2_r$). Тогда, учитывая, что $\delta \quad F(\xi) = \xi \Lambda \delta$ для некоторой r-мерной вектор-строки δ, получим

$$F(\xi) = (I_1, I_2, \ldots, I_{r \quad 1})\,,$$

где

$$I_j = \left(\begin{array}{c} 0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0 \ldots\ldots 0 \\ \hline \xi_{j+1} \cdots \quad \xi_r \\ \hline \xi_j E_{r \quad j} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} j \quad 1 \\ \mathbb{R}^{r \quad (r \quad j)}; \quad j = 1, \ldots, r \quad 1\,. \end{array}$$

Известно, что для разрешимости системы (4.2) необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{rang}(F(h_1)W_1 + F(h_2)W_2) = p+1$. Ясно, что последнее условие всегда может быть удовлетворено, если миноры порядка $p+2$ матрицы $F(h_1)W_1 + F(h_2)W_2$, расположенные в столбцах с номерами $(1, \ldots, p+1, p+2)$, $(1, \ldots, p+1, p+3), \ldots$ $(1, \ldots, p+1, 3p+2)$ равны нулю. Отметим важную особенность матриц этих миноров: строки любой из них линейно зависят от координат векторов h_1 и h_2, причем j-я строка любой матрицы не содержит координат h_{1j} и h_{2j}; $j = 1, \ldots, p+2$.

Для упрощения изложения введем обозначения $h_{1i} = x_i$, $h_{2i} = x_{i+p+2}$; $i = 1, \ldots, p+2$. Принимая теперь во внимание замечание предыдущего абзаца, а также структуру матрицы $F(\xi)$, получим, после соответствующих алгебраических преобразований упомянутых выше миноров, систему $2p+1$ нелинейных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} x_i^{p+1 \quad k} x_{i+p+2}^{k} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j=i, j=i+p+2}}^{2p+4} \gamma_j x_j \right) + \varphi(x_1, \ldots, x_{2p+4}) = 0\,, \tag{4.3}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_{2p+4})$ – однородный многочлен степени $p+2$ такой, что $\partial\varphi(0, \ldots, 0)/\partial x_j = 0$, $j = 1, \ldots, 2p+4$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2p+4}$ – известные вещественные числа, свои для каждого из уравнений (4.3).

Положим теперь $x_1 = \alpha$ и $x_{p+3} = \beta$, где α и β – любые ненулевые константы. Введем еще обозначения: $x_2 = z_1, \ldots, x_{p+2} = z_{p+1}, \ldots, x_{p+4} = z_{p+2}, \ldots, x_{2p+4} = z_{2p+2}$. Тогда система (4.3) представится в форме

$$Nz + f(z) = 0\,, \tag{4.4}$$

где $N \quad \mathbb{R}^{(2p+1) \quad (2p+2)}$ – известная матрица; $z = (z_1, \dots, z_{2p+2})^T$; $f(z) = (f_1(z), \dots, f_{2p+1}(z))^T$ и начальные формы многочленов $f_i(z)$ имеют степени не ниже второй.

Очевидно, что для существования нетривиального решения (4.4) достаточно, чтобы $\mathrm{rang} N = 2p+1$. (Если $\mathrm{rang} N < 2p+1$, то вместо пары (x_1, x_{p+3}) в (4.3) следует положить равными ненулевым константам другую пару неизвестных (x_i, x_{i+p+2}). В силу алгебраической независимости уравнений (4.1) и, в частности, того, что $\mathrm{rang} F(h_i) = p+1$, таковая всегда найдется.)

Считая последнее условие выполненным, положим, например, $z_{2p+2} = \varepsilon = 0$. Тогда, выбирая ε достаточно малым, легко организовать итерационный процесс (например типа Ньютона), сходящийся к нетривиальному решению системы (4.4). После того как найден вектор z (а значит, и векторы h_1 и h_2), неизвестный вектор h_3 определяется уже из системы линейных уравнений (4.2). Переход же от матрицы S_1 к искомой матрице K_1 обратной связи (в исходных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^{p+1}$) осуществляется очевидным образом.

Для конструктивной реализации предложенной процедуры осталось только определить матрицу N. Не вдаваясь в технические детали, приведем ее окончательный вид:

$$N = \begin{pmatrix} \det\left(\frac{v_{11}^{(1)}}{D_1}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{p+1,1}^{(1)}}{D_1}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{11}^{(2)}}{D_1}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{p+1,1}^{(2)}}{D_1}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \det\left(\frac{v_{1,2p+1}^{(1)}}{D_{2p+1}}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{p+1,2p+1}^{(1)}}{D_{2p+1}}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{1,2p+1}^{(2)}}{D_{2p+1}}\right), \dots, \det\left(\frac{v_{p+1,2p+1}^{(2)}}{D_{2p+1}}\right) \end{pmatrix},$$

где $v_{ik}^{(q)} = (w_{i1}^{(q)}, \dots, w_{i,p+1}^{(q)}, w_{ij}^{(q)}) \quad \mathbb{R}^{p+2}$, $q = 1, 2$; $w_{ij}^{(1)}$ и $w_{ij}^{(2)}$ – элементы матриц W_1 и W_2, соответственно; $i = 1, \dots, p+1$; $j = p+2, \dots, 3p+2$;

$$D_k = \alpha \begin{pmatrix} v_{1,k}^{(1)} \\ \vdots \\ v_{p+1,k}^{(1)} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_{1,k}^{(2)} \\ \vdots \\ v_{p+1,k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{(p+1) \quad (p+2)},$$

$k = j \quad (p+1)$; $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ – произвольные действительные числа.

Пусть теперь $l = 2$. Положим $n = 4p+1$. Тогда система (3.3) запишется следующим образом:

$$(h_1 \Lambda h_3) W_{13} + (h_1 \Lambda h_4) W_{14} + (h_2 \Lambda h_3) W_{23} + (h_2 \Lambda h_4) W_{24} = 0\,, \tag{4.5}$$

где W_{ij} – вещественные $\mathrm{C}_{p+2}^2 \quad (4p+3)$ матрицы; $i, j = 1, 2$.

Перепишем уравнение (4.5) в виде (4.2). Тогда получим

$$(h_3, h_4) \quad \begin{pmatrix} \dfrac{F(h_1)W_{13} + F(h_2)W_{23}}{F(h_1)W_{14} + F(h_2)W_{24}} \end{pmatrix} = (h_3, h_4) \quad Q(h_1, h_2) = 0\,. \tag{4.6}$$

Отметим, что структура уравнения (4.6) отличается от структуры (4.2) тем, что в (4.6) любой элемент уже двух строк (а не одной строки) с номерами i и $p+2+i$ зависит от одних и тех же $p+1$ (но не $p+2$) координат векторов h_1 и h_2; $i = 1, \ldots, p+2$. Последнее означает, что прямое перенесение методики решения (4.2) на уравнение (4.6) приведет к тому, что при $l = 2$ в уравнениях типа (4.3) в круглых скобках будут находиться не линейные, а квадратичные формы соответствующих переменных. Поэтому способ решения (4.6) будет отличаться от процедуры решения (4.2). Это отличие заключается в том, что одну из координат векторов h_3 или h_4 следует положить равной нулю (например $h_{3i} = 0$). Тогда уравнение (4.6) примет форму

$$(\bar{h}_3, h_4) \quad \bar{Q}(h_1, h_2) = 0\,, \tag{4.7}$$

где $\bar{h}_3 = (h_{31}, \ldots, h_{3,i\ \ 1} h_{3,i+1}, \ldots, h_{3,p+2})$, $\bar{Q}(h_1, h_2) \quad \mathbb{R}^{(2p+3)\ \ (4p+3)}$.

Если теперь применить к (4.7) алгоритм решения (4.2), то получим систему из $(2p+1)$-го уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{p+1} x_i^{2p+2\ \ k} x_{i+p+2}^{k} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j=i, j=i+p+2}}^{2p+4} \delta_j x_j \right) + \eta(x_1, \ldots, x_{2p+4}) = 0\,, \tag{4.8}$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в (4.3); $\deg \eta(x_1, \ldots, x_{2p+4}) = 2p+3$; $\partial\eta(0, \ldots, 0)/\partial x_j = 0$, $j = 1, \ldots, 2p+4$, причем $j = i$ и $j = i+p+2$. Полагая, как и ранее, $i = 1$, $x_1 = \alpha$, $x_{p+3} = \beta$, решаем систему (4.8); дальнейший же ход синтеза дословно повторяет алгоритм случая $l = 1$. (Если в (4.4) $\mathrm{rang} N < 2p+1$, то необходимо принять равной нулю какую-либо другую из координат векторов h_3 или h_4 и повторить процедуру синтеза.)

Таким образом, для $m = p = 2$ остался нерешенным только один случай: $n = 4p+2$. Отметим, что для его исследования необходимо использовать другую систему уравнений, решение которой и будет определять параметры искомого компенсатора.

Так же, как и ранее, придадим переменной λ $n+l = n+2$ различных вещественных значения. Тогда система (3.3) представится в форме

$$(\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \delta_1, \ldots, \delta_r, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)V = 0\,, \tag{4.9}$$

где Δ_i, δ_i и ε_i – неизвестные грассмановы координаты бивекторов $\Delta = \Lambda^2(h_3, h_4)$, $\delta = \Lambda^2(h_1, h_2)$ и $\varepsilon = \Lambda^2(h_1, h_4) + \Lambda^2(h_2, h_3)$ [7,8]; $V \quad \mathbb{R}^{(n+3)\ \ 3r}$ – известная матрица общего вида; $r = \mathrm{C}_{p+2}^2$; $i = 1, \ldots, r$.

Определим теперь число ограничений, которым должны удовлетворять координаты бивекторов Δ, δ и ε. Так как Δ должен быть простым [7], то это дает $C^2_{p+2} - 2p - 1$ условий, связывающих координаты Δ_i (аналогично для бивектора δ); $i = 1, \ldots, r$. Далее, бивектор ε должен иметь ранг 4 (т.е. представляться в виде суммы двух простых бивекторов: $\varepsilon = \mu + \nu$, где μ и ν определяются по бивектору ε ранга 4 без дополнительных ограничений [8]). Это условие вытекает из ограничений на координаты специального поливектора (называемого пффафовым агрегатом [8, с. 371]), которые дают еще C^2_{p-2} уравнений для координат бивектора ε.

Наконец, определим число ограничений, связывающих попарно координаты бивекторов Δ и μ, Δ и ν, δ и μ и δ и ν. Прежде всего отметим, что любому бивектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = (w_{ij})$, $1 \le i < j \le p+2$ можно однозначно сопоставить кососимметрическую матрицу

$$Z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & & & w_{1,p+2} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} & & \vdots \\ \vdots & -w_{23} & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & w_{p+1,p+2} \\ -w_{1,p+2} & & & -w_{p+1,p+2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+2)\times(p+2)},$$

которая называется матрицей бивектора ε. Известно [8], что ранг ε совпадает с числом $\mathrm{rang} Z(\varepsilon)$. Так что, если $\mathrm{rang} Z(\varepsilon) = 4$, то и $\mathrm{rang}\varepsilon = 4$. Выберем числовые векторы a, $b \in \mathbb{R}^{p+2}$ таким образом, чтобы $\omega = bZa^T \neq 0$. Тогда векторы ν и μ вычисляются по формулам [8, с. 366]: $\nu = h_2 \Lambda h_3 = (aZ^T \Lambda bZ^T)/\omega$, $\mu = h_1 \Lambda h_4 = \varepsilon - (aZ^T \Lambda bZ^T)/\omega$. Далее легко проверить, что для переменных Δ, δ и ε имеют место три векторных соотношения

$$\Delta \Lambda \varepsilon = 0, \quad \delta \Lambda \varepsilon = 0, \quad 2(\Delta \Lambda \delta) = \varepsilon \Lambda \varepsilon\,. \tag{4.10}$$

Предположим теперь, что бивекторы Δ и δ – простые, а $\mathrm{rang}\varepsilon = 4$. Тогда $\Delta = h_3 \Lambda h_4$, $\delta = h_1 \Lambda h_2$ и $\varepsilon = \eta_1 \Lambda \eta_4 + \eta_2 \Lambda \eta_3$ для векторов $h_1, \ldots, h_4$, $\eta_1, \ldots, \eta_4 \in \mathbb{R}^{p+2}$ таких, $h_1 \Lambda h_2 \Lambda h_3 \Lambda h_4 = 0$ и $\eta_1 \Lambda \eta_4 \Lambda \eta_2 \Lambda \eta_3 = 0$ [8].

Покажем, что из соотношений (4.10) вытекает (возможно, после переобозначений) $\eta_i = h_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Положим $\eta_1 = a_1 Z^T/\omega_1$, $\eta_4 = b_1 Z^T$, где a_1, b_1 – такие векторы из $\mathbb{R}^{p+2}$, что $\omega_1 = a_1 Z^T b_1^T = 0$. Так как $\mathrm{rang} Z(\varepsilon) = 4$, то вектор η_1 определяется с точностью до 4-х свободных параметров, которыми можно считать, например, 4 различные координаты вектора η_1 (аналогично для вектора η_4, где свободными будут тогда 4 координаты с теми же номерами, что и у η_1). Это означает, что 4 координаты η_1 могут быть назначены произвольно; оставшиеся же $(p + 2) - 4 = p - 2$ координаты пока не определены (аналогично для вектора η_4). Поэтому положим $\eta_{1i} = h_{1i}$ и $\eta_{4i} = h_{4i}$,

$i = 1, \ldots, 4$. Тогда векторы η_1 и η_4 задаются $2(p-2)$-мя соотношениями. Вспоминая, что $\eta_2 \Lambda \eta_3 = \varepsilon - \eta_1 \Lambda \eta_4$, получим, что векторы η_2 и η_3 также описываются $2(p-2)$-мя условиями, являющимися функциями от предыдущих, и для их определения новых ограничений не потребуется.

Рассмотрим уравнение $2(\Delta \Lambda \delta) = \varepsilon \Lambda \varepsilon$. Его левая часть представляет собой известный квадривектор, а среди C^4_{p+2} координат квадривектора $\varepsilon \Lambda \varepsilon$ независимыми будут $2(p-2)+1 = 2p-3$. При этом из $2(p-2)$-х уравнений $2(p-2)$ неизвестные координаты определяются с точностью до умножения на некоторую величину α. Поэтому, расписывая уравнение $2(\Delta \Lambda \delta) = \varepsilon \Lambda \varepsilon$ в координатной форме, убеждаемся, что $\eta_1 = \alpha h_1$ и $\eta_4 = \alpha h_4$. (Проще всего это проверить, если выбрать базис в $\mathbb{R}^{p+2}$ таким образом, чтобы $h_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, h_{i5}, \ldots, h_{i,p+2})$, где 1 стоит на месте с номером $i = 1, \ldots, 4$.) Неизвестная же константа α находится из последнего $2(p-3)$-го уравнения, входящего в соотношение $2(\delta \Lambda \delta) = \varepsilon \Lambda \varepsilon$.

Далее, с учетом последних соображений и равенств $\Delta \Lambda \varepsilon = 0$, $\delta \Lambda \varepsilon = 0$, легко получить, что $h_1 \Lambda h_2 \Lambda \eta_2 \Lambda \eta_3 = 0$, $h_3 \Lambda h_4 \Lambda \eta_2 \Lambda \eta_3 = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4 = \beta_2 \eta_2 + \beta_3 \eta_3$ и $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 = \gamma_2 \eta_2 + \gamma_3 \eta_3$ для некоторых констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, β_2, β_3, γ_2 и γ_3. К тому же доказательство теоремы 3.1 показывает, что векторное равенство $h_3 \Lambda h_4 \Lambda \eta_2 \Lambda \eta_3 = 0$ (а значит, и равенство $h_1 \Lambda h_2 \Lambda \eta_2 \Lambda \eta_3 = 0$) задается с помощью $p-1$ скалярных. Если теперь ввести новые векторы h_2, h_3, η_2, η_3 по формулам $h_2 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$, $h_3 = \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4$, $\eta_2 = \gamma_2 \eta_2 + \gamma_3 \eta_3$, $\eta_3 = \beta_2 \eta_2 + \beta_3 \eta_3$, то получим $h_2 = \eta_2$ и $h_3 = \eta_3$. Для завершения доказательства осталось положить $h_2 = h_2$, $h_3 = h_3$, $\eta_2 = \eta_2$ и $\eta_3 = \eta_3$. В итоге для определения максимального n получается соотношение

$$3\mathrm{C}^2_{p+2} - 1 = 2(\mathrm{C}^2_{p+2} - 2p - 1) + \mathrm{C}^2_{p-2} + 2p - 3 + 2(p-1) + n + 2\,,$$

где слева записано общее число неизвестных координат бивекторов Δ, δ и ε, а справа – число уравнений для этих координат. Отсюда вытекает равенство $n = 4p + 2$, которое совпадает с (3.6) при $m = l = 2$.

Опишем конкретный состав уравнений синтеза в координатной форме на примере $m = p = l = 2$. В этом случае имеем $3\mathrm{C}^2_4 = 18$ неизвестных координат $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \delta_1, \ldots, \delta_6, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6$ в системе, состоящей из: $2(\mathrm{C}^2_{p+2} - 2p - 1) = 2-x$ уравнений $\Delta_1\Delta_6 - \Delta_2\Delta_5 + \Delta_3\Delta_4 = 0$, $\delta_1\delta_6 - \delta_2\delta_5 + \delta_3\delta_4 = 0$; $2p-3 = 1$-го уравнения $\Delta_1\delta_6 - \Delta_2\delta_5 + \Delta_3\delta_4 + \Delta_4\delta_3 - \Delta_5\delta_2 + \Delta_6\delta_1 = \varepsilon_1\varepsilon_6 - \varepsilon_2\varepsilon_5 + \varepsilon_3\varepsilon_4$; $2p-2 = 2$-х уравнений $\Delta_1\varepsilon_6 - \Delta_2\varepsilon_5 + \Delta_3\varepsilon_4 + \Delta_4\varepsilon_3 - \Delta_5\varepsilon_2 + \Delta_6\varepsilon_1 = 0$, $\delta_1\varepsilon_6 - \delta_2\varepsilon_5 + \delta_3\varepsilon_4 + \delta_4\varepsilon_3 - \delta_5\varepsilon_2 + \delta_6\varepsilon_1 = 0$ и, наконец, $n+2$ – 12 линейных уравнений (4.9) (уравнения, определяющие бивектор ε ранга 4, здесь отсутствуют).

В заключение отметим, что пффафов агрегат появится в уравнениях задачи синтеза, начиная с $p = 4$. При $p = 4$ он будет состоять из одной координаты, равенство нулю которой и дает бивектор ранга 4. Соответствующее уравнение для координат бивектора $\varepsilon \quad \mathbb{R}^{15}$ имеет вид $\varepsilon_1\varepsilon_{10}\varepsilon_{15} \quad \varepsilon_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{14} + \varepsilon_1\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_2\varepsilon_7\varepsilon_{15} + \varepsilon_2\varepsilon_8\varepsilon_{14} \quad \varepsilon_2\varepsilon_9\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_{15} \quad \varepsilon_3\varepsilon_8\varepsilon_{12} + \varepsilon_3\varepsilon_9\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_4\varepsilon_6\varepsilon_{14} + \varepsilon_4\varepsilon_7\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_4\varepsilon_9\varepsilon_{10} + \varepsilon_5\varepsilon_6\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_5\varepsilon_7\varepsilon_{11} + \varepsilon_5\varepsilon_8\varepsilon_{10} = 0$.

5. Пример

Рассмотрим систему (C, A, B) типа (2, 5, 2), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $mp + m + p \quad \min(m, p) = 6 > n = 5$, то, согласно теореме 2.1, данная система допускает компенсатор 1-го порядка. Итак, пусть $l = 1$. Предположим, что спектр $(6 \quad 6)$-матрицы $A_1 + B_1K_1C_1$ замкнутой системы должен состоять из чисел $(\;\; 1.0, \;\; 2.0, \;\; 1.0{+}1.0i, \;\; 1.0 \;\; 1.0i, \;\; 2.0{+}1.0i, \;\; 2.0 \;\; 1.0i)$. Согласно пункту 1 алгоритма синтеза, положим $F = \;\; 1.0$. Тогда, приняв матрицу X равной $(1.0, 0.0)$ и решив уравнение (2.1), получим, что $Y = (3.0, 0.0, 0.0, \;\; 2.0, 2.0)$. Во втором пункте алгоритма необходимо решить задачу синтеза статической обратной связи для системы $((C^T\,Y^T)^T, A, B)$ типа $(3, 5, 2)$. Теорема 2.1 утверждает, что полученная система допускает применение итерационно-параметрического метода [6].

Зададим точность вычисления $\delta = 0.0001$. Тогда в зависимости от величины возмущения ε получим такие матричные параметры динамического регулятора:

$$K(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 470.8 & 873.5 \\ 3566.1 & 6615.8 \end{pmatrix}, \quad G(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 69.7 \end{pmatrix},$$

$$H(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 11911.4 & 22095.8 \end{pmatrix}, \quad D(\varepsilon = 0.025) = \;\; 233.8;$$

$$K(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 584.7 & 1084.8 \\ 4431.3 & 8222.2 \end{pmatrix}, \quad G(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 11.5 \\ 87.1 \end{pmatrix},$$

$$H(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 14802.7 & 27464.8 \end{pmatrix}, \quad D(\varepsilon = 0.020) = \;\; 291.9.$$

(С целью экономии места здесь оставлен один знак после запятой).

Предположим теперь, что спектр замкнутой системы должен состоять из чисел $(\;\; 1.0, \;\; 2.0, \;\; 1.0 + 1.0i, \;\; 1.0 \;\; 1.0i, \;\; 0.5 + 1.0i, \;\; 0.5 \;\; 1.0i)$. Оставив прежнюю точность вычислений и величины возмущений, будем иметь для этого случая

$$K(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 43.6740 & 80.6373 \\ 328.4154 & 606.6379 \end{pmatrix}, \quad G(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 0.8787 \\ 6.3929 \end{pmatrix},$$

$$H(\varepsilon = 0.025) = \begin{pmatrix} 1096.2916 & 2023.3651 \end{pmatrix}, \quad D(\varepsilon = 0.025) = 22.1881;$$

$$K(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 54.1098 & 100.0142 \\ 407.7277 & 753.9002 \end{pmatrix}, \quad G(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 1.0888 \\ 7.9893 \end{pmatrix},$$

$$H(\varepsilon = 0.020) = \begin{pmatrix} 1361.3618 & 2515.5298 \end{pmatrix}, \quad D(\varepsilon = 0.020) = 27.5132.$$

Список литературы

[1] *М. Уонэм*, Линейные многомерные системы управления, Наука, Москва (1980).

[2] *J.F. Magni and C. Champetier*, A geometric framework for pole assignment algorithms. — IEEE Trans. Autom. Control (1991), v. 36, № 9, p. 1105–1111.

[3] *J. Rosenthal*, On dynamic feedback compensation and compactification of system. — SIAM J. Control and Optimization (1994), v. 32, № 1, p. 279–296.

[4] *V.L. Syrmos and F.L. Lewis*, Coupled and constrained Sylvester equation. — Circuits System Signal Process (1994), v. 13, № 5, p. 663–694.

[5] *В.Е. Белозеров*, Об одном алгоритме синтеза линейной обратной связи по выходу для линейных систем управления. — Изв. РАН, сер. Техн. кибернетика (1994), № 4, с. 91–101.

[6] *В.Е. Белозеров*, Итерационно-параметрический метод решения проблемы синтеза обратной связи. — Изв. РАН, сер. Теория и системы управления (1995), № 1, с. 72–83.

[7] *В.Е. Белозеров*, Об одном подходе к решению проблемы синтеза статической и динамической обратной связи для линейных систем управления. — Изв. РАН, сер. Техническая кибернетика (1992), № 2, с. 67–76.

[8] *Г.Б. Гуревич*, Основы теории алгебраических инвариантов. ГИТТЛ, Москва–Ленинград (1948).

A geometric approach to dynamic feedback design

V.Ye. Belozyorov

Let dimensions of a spaces states n, inputs m, and outputs p of a generic linear control system and also integer $l \geq 0$ satisfy the restriction $n < mp + l(m + p - \min(m, p))$. An algorithm dynamic compensator design of degree l is suggested. It is shown if $n \geq mp$ a minimal order $l_{\min}$ of the compensator being assumed the control system is determined by correlation $1 + (n - mp)/(m + p - 1) > l_{\min} \geq (n - mp)/(m + p - 1)$ (in case $n < mp$, $l_{\min} = 0$). Besides, for the control systems with two inputs or putputs, the procedure completely solving the compensators design problem of the first and, partially, the second powers is elaborated. An example is given.

Геометричний метод синтезу динамічного зворотнього зв'язку

В.Є. Білозьоров

Нехай вимірності просторів станів n, входів m та виходів p загальної лінійної системи керування, а також ціле число $l \geq 0$ задовольняють обмеженню $n < mp + l(m + p - \min(m, p))$. Запропоновано алгоритм синтезу динамічного компенсатора порядка l. Показано, що якщо $n \geq mp$, то мінімальний порядок $l_{\min}$ компенсатора, який дозволяє така система керування, визначається співвідношенням $1 + (n - mp)/(m + p - 1) > l_{\min} \geq (n - mp)/(m + p - 1)$ (у випадку $n < mp$, $l_{\min} = 0$). Окрім цього, для систем із двома входами або виходами розроблена процедура, що повністю розв'язує проблему синтезу компенсаторів 1-го та, частково, 2-го порядків. Наводиться приклад.