Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 4, с. 428–452

О разрешимости первой краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в области с конической точкой на границе

М.В. Борсук

Olsztyn University of Agriculture and Technology,
Poland, 10-957, Olsztyn–Kortowo, ul. Licznerskiego, 4
E-mail: borsuk@art.olsztyn.pl

Статья поступила в редакцию 2 февраля 1995 года

Исследована разрешимость задачи Дирихле для линейных и квазилинейных равномерно эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в ограниченной области, граница которой содержит угловые или конические точки.

Работа посвящена исследованию разрешимости и поведения в окрестности нерегулярной точки границы области решений первой краевой задачи для равномерно эллиптических уравнений второго порядка общего вида

$$\begin{cases} u \quad a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \ x \quad G, \\ u(x) = \varphi(x), \ x \quad \partial G, \end{cases} \tag{Л}$$

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x) = 0, \ x \quad G, \\ u(x) = \varphi(x), \ x \quad \partial G. \end{cases} \tag{КЛ}$$

В работах [1–3] исследована нормальная разрешимость в весовых соболевских пространствах общих линейных эллиптических задач в негладких областях при предположениях достаточной гладкости как поверхности ∂G, так и коэффициентов задачи. Здесь исследована разрешимость задачи Дирихле для линейных уравнений в функциональных пространствах, где она имеет место при *минимальных* требованиях на гладкость коэффициентов и правых частей; также ослаблены требования на гладкость поверхности ∂G.

Что же касается квазилинейных уравнений, то нам известно лишь одно исследование [4] (речь идет о недивергентных уравнениях в негладких областях!), в котором методами теории функций комплексного переменного и интегральных уравнений доказана разрешимость в пространстве $W^{2,2+\varepsilon}(G)$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, $G \quad \mathbb{R}^2$ и содержит угловые точки. Однако, как увидим ниже, требования на данные задачи в этой работе завышены, и число ε не уточнено. Покажем, что

$$0 < \varepsilon < 2\frac{\pi/\omega_0 \quad 1}{2 \quad \pi/\omega_0}, \qquad \text{если} \quad \pi/2 < \omega_0 < \pi$$

(ω_0 – раствор угла в угловой точке), а также что решения задачи (КЛ) обладают такой же регулярностью (в окрестности конической точки), что и решения задачи (Л).

В пункте 1 мы вводим основные обозначения, предположения и формулируем определения. В пункте 2 исследуем однозначную разрешимость линейной задачи на основе оценок, полученных в [5]. Для построения теории разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных уравнений необходимы подходящие априорные оценки решений самой нелинейной задачи. Получению таких оценок посвящены пп. 3–5. Центральным моментом в этих оценках является локальная (вблизи угловой или конической точки) оценка Гёльдера первых производных решений. В [6] исследовано поведение решений задачи (КЛ) вблизи угловой точки границы плоской области. Там, в частности, доказано, что первые производные решения непрерывны по Гёльдеру с показателем $\pi/\omega_0 \quad 1$, если $\pi/2 < \omega_0 < \pi$, и этот показатель – наилучший. Двумерность области была обусловлена спецификой метода Л. Ниренберга, который нами применен для получения оценки

$$u(x) \qquad c_0\, x^{\,1+\gamma} \tag{0.1}$$

с некоторым $\gamma > 0$. В случае конической точки ($n > 2$) этот метод не проходит, так как он сугубо двумерный. Для получения оценки (0.1) в этом случае мы прибегаем к барьерной технике и принципу сравнения (см. [7]). Далее методом слоев Кондратьева, опираясь на результаты [8–11] и на оценку (0.1), устанавливаем оценку

$$u(x) \qquad c_1\, x^{\,\gamma}. \tag{0.2}$$

В пункте 4 с помощью (0.1), (0.2) получены интегральные весовые оценки для вторых обобщенных производных решения задачи (КЛ) с наилучшим показателем веса. Оценки п. 4 позволяют в п. 5 получить точные оценки модуля решения и его градиента в окрестности конической точки, а также весовые L_q-оценки вторых обобщенных производных решений задачи (КЛ) и вывести гельдеровскую непрерывность их первых производных с наилучшим показателем Гёльдера. Результаты пп. 2–5 и теорема Лерэ–Шаудера о неподвижной точке дают возможность в п. 6 обратиться к разрешимости задачи (КЛ).

1. Обозначения, определения, предположения

Пусть $G \quad \mathbb{R}^n$, $n \quad 2$ – ограниченная область с границей ∂G, которая предполагается гладкой поверхностью всюду, кроме точки $\quad \partial G$ – начала прямоугольной системы координат, а вблизи точки она есть коническая поверхность с вершиной в ; (r, ω) – сферические координаты точки $x \quad \mathbb{R}^n$; Ω – область, которая вырезается конусом K на единичной сфере $S^{n \quad 1}$ с центром в , с гладкой $(n \quad 2)$-мерной границей $\partial\Omega$; $G_a^b = G \quad (r, \omega)\ 0 \quad a < r < b; \omega \quad \Omega$ – слой в $\mathbb{R}^n$; $\Gamma_a^b = \partial G \quad (r, \omega)\ 0 \quad a < r < b; \omega \quad \partial\Omega$ – боковая поверхность слоя G_a^b; $G_d = G \quad G_0^d$, $\Gamma_d = \partial G \quad \Gamma_0^d$, $d > 0$; $\Omega_\rho = G_0^d \quad x = \rho$; $0 < \rho < d$; $G^{(k)} \quad G_{2\ (k+1)d}^{2\ kd}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $_{k=0}G^{(k)} = G_0^d$; $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial G \quad)$; (t) – определенная при $t \quad 0$, неотрицательная монотонно возрастающая непрерывная в нуле функция, $(0) = 0$; $\Phi(x)$ – любое продолжение внутрь области G граничной функции $\varphi(x)$ такое, что $\Phi(x) = \varphi(x)$, $x \quad \partial G$. Нам понадобятся следующие функциональные пространства: $C^l(\bar{G})$ – пространство функций, имеющих непрерывные производные в $\bar{G}$ до порядка $l \quad 0$ включительно, если l – целое, и до порядка $[l]$, если l – нецелое; производные порядка $[l]$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $l \quad [l]$; $u_{\ l,G}$ – норма элемента $u \quad C^l(\bar{G})$, $L_p(G)$ – банахово пространство функций $u(x)$, измеримых на G и суммируемых со степенью $p \quad 1$, которые имеют конечную норму $u_{\ p,G} = \left(\iint_G u(x)^{\ p}\, dx\right)^{1/p}$; $W^{k,p}(G)$ – соболевское пространство функций, состоящее из всех элементов $L_p(G)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно, которые суммируются по G со степенью p, и конечную норму

$$u_{\ k,p;G} = \left(\iint_G \sum_{\alpha \quad k} D^\alpha u^{\ p}\, dx\right)^{1/p}, \quad p \quad 1; \quad W^k(G) \quad W^{k,2}(G)\,;$$

$W^2(G \quad)$ – множество функций, для которых конечны интегралы $\iint_{G \quad x > \varepsilon} (u_{xx}^2 + \quad u^{\ 2} + u^2)\, dx \quad \varepsilon > 0$; $V_{p,\alpha}^k(G)$ – весовое соболевское пространство функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$u_{\ V_{p,\alpha}^k(G)} = \left(\iint_G \sum_{\beta\ =0}^{k} r^{p(\ \beta \quad k+\alpha/2)}\, D^\beta u^{\ p}\, dx\right)^{1/p}, \quad p \quad 1; \quad k \quad 0\,;$$

$$\overset{k}{W}_\alpha \quad V_{2,\alpha}^k(G), \quad (k \quad 0)\,;$$

$r_\varepsilon(x)$ – квазирасстояние, т.е. функция, определяемая следующим образом: пусть $\mathbf{l} = \quad l_1, \ldots, l_n$ – единичный радиус-вектор такой, что $\varepsilon\mathbf{l} \quad \bar{G} \quad \varepsilon > 0$, $\mathbf{r}$

– радиус-вектор точки $x \quad \bar{G}$; положим $r_\varepsilon(x) = r \quad \varepsilon l \; = 0 \quad \varepsilon > 0$; отметим следующие свойства: 1) $\quad h > 0$, что $hr \quad r_\varepsilon(x) \quad r + \varepsilon \quad x \quad \bar{G}\;, \;\; \varepsilon > 0$; 2) $r_\varepsilon(x) \quad d \quad x \quad \bar{G}_d\;, \;\; \varepsilon > 0$; 3) $r_\varepsilon(x) \quad r + \varepsilon \quad 2h \;{}^1 r_\varepsilon(x) \quad x \quad \bar{G}, \;\; \varepsilon > 0$; 4) $\lim\limits_{\varepsilon \quad +0} r_\varepsilon(x) = r$.

$X_{loc}(G)$ – локальное пространство функций, принадлежащих $X(G\;)$ для любого компакта $G \qquad G$; $X^{k \;\; 1/p}(\partial G)$ – пространство функций $\varphi(x)$, граничных значений на ∂G функций $\Phi(x) \quad X^k(G)$ с нормой $\;\varphi\; {}_{X^{k \;\; 1/p}(\partial G)} =$ $\inf \;\; \Phi \;{}_{X^k(G)}$, где инфимум берется по всем $\Phi \quad X^k(G)$ таким, что $\Phi(x)$ $\varphi(x)$, $x \quad \partial G$; $\lambda = \lambda(\Omega)$ – наименьшее положительное собственное число задачи

$$\begin{cases} \Delta_\omega \psi + \lambda(\lambda + n \quad 2)\psi = 0, & \omega \quad \Omega \quad S^{n \;\; 1}, \\ \psi(\omega) = 0, & \omega \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3С}$$

Δ_ω – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере $S^{n \;\; 1}$. Известно (см., например, [12, гл. VI]), что первая собственная функция этой задачи $\psi(\omega) > 0$, $\omega \quad \Omega$; $\psi \quad C^2(\bar{\Omega})$, а число $\lambda > 1$, если Ω – область на $S^{n \;\; 1}$, вырезаемая *выпуклым* конусом К.

Нами часто будет использоваться обобщенное неравенство Харди–Виртингера (см., например, [13]): *для всех* $v(x) \quad V = \;\; v \quad W^1(G_0^d)\; v(x) = 0, x$ Γ_0^d *выполняется неравенство*

$$\iint\limits_{G_0^d} r^{\alpha \;\; 4} v^2 \, dx \quad H(\lambda, \alpha, n) \iint\limits_{G_0^d} r^{\alpha \;\; 2} \quad v\;^2 dx, \quad \alpha \quad 4 \quad n\;,$$

$$H(\lambda, \alpha, n) = \Big((4 \quad n \quad \alpha)^2/4 + \lambda(\lambda + n \quad 2) \Big)^{\;\;1}$$

при условии, что интеграл справа конечен.

2. Однозначная разрешимость задачи (Л)

Локальные оценки решений задачи (Л), установленные К. Видманом [14] вблизи ляпуновской поверхности и нами [5] в окрестности конической граничной точки, позволяют с помощью метода продолжения по параметру на основании теоремы о разрешимости задачи для уравнения Пуассона ([15, теорема 1] и теоремы 9.30 в [16] доказать нижеследующие теоремы о разрешимости задачи (Л) в таких функциональных пространствах, в каких она имеет место при *минимальных* требованиях на гладкость коэффициентов и правых частей задачи (Л), а также ослабить требования на гладкость поверхности $\partial G \quad$.

Предположения:

(a) *условие равномерной эллиптичности*
$\nu\xi^2 \quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad \mu\xi^2 \quad\; x \quad \bar{G}, \quad\; \xi \quad \mathbb{R}^n; \quad \nu, \mu = const > 0\;\;$;

(aa) $a^{ij}(0) = \delta_i^j$ – *символ Кронекера* $(i,\, j = 1, \ldots, n)$;

(aaa) $a^{ij}(x) \quad C^0(\bar{G})$, $(i,\, j = 1, \ldots, n)$; $\;a^i(x)$, $a(x)$ – *измеримые в* G *функции, причем* $a^i(x) \quad L_n(G)$; $\;a(x) \quad L_p(G)$, $\;p > n/2$; *для них выполнены неравенства*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \quad a^{ij}(x) \quad a^{ij}(0) \quad {}^2\right)^{1/2} + \; x \; \left(\sum_{i=1}^{n} \quad a^i(x) \quad {}^2\right)^{1/2}$$

$$+ \; x \; {}^2 \; a(x) \qquad A(\; x \;), \qquad x \quad G_0^{r_0};$$

(б) $a(x) \quad 0 \quad x \quad G$;

(в) $f(x) \quad L_p(G) \quad \overset{0}{W}{}_4 \;\, {}_n(G)$;

$\varphi(x) \quad V_{p,0}^{2 \;\; 1/p}(\partial G) \quad \overset{3/2}{W}{}_4 \;\, {}_n(\partial G)$; $\;p \quad n$;

(г) *существуют неотрицательные числа* k_1, k_2 *и* $s > \lambda$ *такие, что*

$$f \;\; {}_{\overset{0}{W}{}_4 \; {}_n(G_0^\rho)} + \; \varphi \;\; {}_{\overset{3/2}{W}{}_4 \; {}_n(\Gamma_0^{\rho/2})} \qquad k_1\rho^s, \quad \rho \quad (0, r_0);$$

$$f \;\; {}_{p, G_{\rho/2}^{\rho}} + \; \varphi \;\; {}_{V_{p,0}^{2 \;\; 1/p}(\Gamma_{\rho/2}^{\rho})} \qquad k_2\rho^{\lambda \;\; 2 + n/p}, \quad \rho \quad (0, r_0).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\Gamma_{r_0} \quad C^{1,1}$ *и выполнены предположения* (a)–(в), *причем либо* $\lambda \quad 2$, $p \quad n$, *либо* $n \quad p < n/(2 \quad \lambda)$, $1 < \lambda < 2$. *Тогда задача (Л) имеет единственное решение* $u(x) \quad V_{p,0}^2(G)$ *и для него справедлива оценка*

$$u \;\; {}_{V_{p,0}^2(G)} \qquad c_1 \left(\; f \;\; {}_{p,G} + \; \varphi \;\; {}_{V_{p,0}^{2 \;\; 1/p}(\partial G)}\right) \tag{2.1}$$

с постоянной c_1, *не зависящей от* u, f, φ *и определяемой лишь величинами* ν, μ, p, n, $\max\limits_{x \;\; \bar{G}} A(\; x \;)$, $\;a \;\; {}_{p,G}$, $\left\|\left(\sum_{i=1}^n \; a^i(x) \; {}^2\right)^{1/2}\right\|_{n,G}$ *и областью* G.

Теорема 2.2. *Пусть заданы числа* $\lambda \quad (1, 2)$, $q \quad n/(2 \quad \lambda)$. *Пусть* $\Gamma_{r_0} \quad C^{1,1}$ *и выполнены предположения* (a)–(aaa), (б)–(г) *при* $p = q$. *Пусть выполнены еще условия:*

(д) $a^{ij}(x)$, $(i,\, j = 1, \ldots, n)$ *непрерывны по Дини в любой точке* $y \quad \partial G$, *т.е.* $\left(\sum_{i,j=1}^n \; a^{ij}(x) \quad a^{ij}(y) \; {}^2\right)^{1/2} \quad A(\; x \quad y \;) \quad x \quad \bar{G}$, $y \quad \partial G$, *причем* $\int_0^{r_0} t \;\; {}^1 A(t)\, dt < \quad$;

(дд) *существует неотрицательное число* k_3 *такое, что выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \; a^i(x) \; {}^2\right)^{1/2} + \; a(x) \; + \; f(x) \; + \; \Phi_{xx}(x) \qquad k_3 d^{\lambda \;\; 2}(x), \quad x \quad G_\varepsilon \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда задача (Л) имеет единственное решение

$$u(x) \quad W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G) \quad V^2_{p,0}(G) \quad C^{\lambda}(\bar{G}) \qquad p \quad [n, n/(2 \quad \lambda))$$

и для него справедливы оценка (2.1), *а также*

$$u_{\ \lambda,\bar{G}} \quad K \tag{2.2}$$

с постоянной K, не зависящей от $u(x)$ и определяемой лишь величинами n, q, ν, μ, λ, s, k_1, k_2, k_3, $f_{\ q,G}$, $\max_{x \ \bar{G}} A(\ x\ )$, $\varphi_{\ V^2_{q,0}\ ^{1/q}(\partial G)}$, $\int_0^{r_0} t \ ^1 A(t)\,dt$, и областью G.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2, кроме требования на гладкость поверхности Γ_{r_0}, которое здесь заменяется на предположение $\Gamma_{r_0} \quad C^{\lambda}$. Тогда задача (Л) имеет единственное решение $u(x)$ $W^{2,q}_{loc}(G) \quad C^{\lambda}(\bar{G})$ и для него справедлива оценка (2.2).*

3. Слабая гладкость решений задачи (КЛ)

Определение 1. *Решением задачи (КЛ) называется функция $u(x)$ $C^0(\bar{G}) \quad W^{2,q}_{loc}(\bar{G} \quad)$, $q \quad n$, удовлетворяющая уравнению задачи для почти всех $x \quad G$ и граничному условию задачи для всех $x \quad \partial G$. Предполагаем известной величину $M_0 \quad \max_{x \ \bar{G}} u(x)$.*

Всюду в дальнейшем предполагаем также выполненным условие:

(C) *в некоторой окрестности точки   область G есть выпуклый конус, т.е. существует $d_0 > 0$ такое, что $G_0^{d_0} \quad x_n \quad 0$, и значит $\lambda > 1$.*

Определим множество $\ = (x, u, z)\ x \quad \bar{G}, u \quad \mathbb{R}, z \quad \mathbb{R}^n$.

Относительно уравнения задачи (КЛ) предполагаем, что на множестве   выполнены следующие условия:

(А) $a_{ij}(x, u, z) \quad C^1(\quad)$, $(i, j = 1, \ldots, n)$; $a(x, u, z) \quad CAR$ (*условие Каратеодори*);

(Б) *равномерной эллиптичности; существуют положительные постоянные ν, μ, не зависящие от u, z, такие что*

$$\nu\xi^2 \quad a_{ij}(x, u, z)\xi_i\xi_j \quad \mu\xi^2$$

для всех $\xi \quad \mathbb{R}^n$;

(В) *существуют число $\beta > \ 1$, неотрицательные числа μ_1, k_1 и функции $b(x)$, $f(x) \quad L_{q,loc}(\bar{G} \quad)$, $q \quad n$, не зависящие от u, z такие, что*

$$a(x, u, z) \quad \mu_1 \ z\ ^2 + b(x)\ z\ + f(x)\ ,$$

причем

$$b(x) + f(x) \quad k_1 \ x^{\ \beta}, \quad x \quad G_0^{d_0}\,; \tag{3.1}$$

(Г) *коэффициенты уравнения в (КЛ) удовлетворяют условиям, гарантирующим существование локальной априорной оценки*

$$u_{\ 1+\kappa, G} \quad M_1, \quad \kappa \quad (0,1) \tag{3.2}$$

для любой гладкой подобласти $G \quad \bar{G}$ *(см., например,* [8–11]).

Теперь установим "слабую" гладкость решения задачи (КЛ) в окрестности конической точки.

Теорема 3. *Пусть* $u(x)$ *– решение задачи (КЛ),* $q > n$, $\varphi(x) \quad 0$ *и выполнены предположения (С), (А)–(Г). Тогда* $u(x) \quad C^{1+\gamma}(\bar{G}_0^d)$ *для некоторого* $d \quad (0, d_0)$ *и* $\gamma \quad (0, \gamma\ ]$, $\gamma\ = \min(\gamma_0; \beta+1; 1 \quad n/q)$, *где* γ_0 *– число, определяемое леммой о барьерной функции* ([7, *лемма* 1]).

Доказательство. Построенная в [7] барьерная функция и принцип сравнения [16] позволяют оценить $u(x)$ в окрестности конической точки, т.е. получить оценку (0.1) (см. теорему 1 в [7]). Затем методом слоев Кондратьева, опираясь на предположение (Г) для гладких областей, оцениваем максимум модуля градиента решения вблизи конической точки и получаем оценку (0.2). Пусть число $d \quad (0, d_0)$ фиксировано так, что выполняются оценки (0.1), (0.2). Рассмотрим в слое $G^1_{1/2}$ функцию $v(x\ ) = \rho^{\ 1 \ \ \gamma} u(\rho x\ )$, считая $u \quad 0$ вне G. Совершим в уравнении (КЛ) замену переменных $x = \rho x\ $. Функция $v(x\ )$ удовлетворяет уравнению

$$a^{ij}(x\ ) v_{x_i} v_{x_j} = F(x\ ), \quad x \quad G^1_{1/2}, \tag{КЛ}$$

где

$$\begin{aligned} a^{ij}(x\ ) &\quad a_{ij}(\rho x\ , \rho^{1+\gamma} v(x\ ), \rho^{\gamma} v_x\ (x\ ))\,, \\ F(x\ ) &\quad \rho^{1 \quad \gamma} a(\rho x\ , \rho^{1+\gamma} v(x\ ), \rho^{\gamma} v_x\ (x\ ))\,. \end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева–Кондрашова [17]

$$\sup_{\substack{x\ , y\ \ G^1_{1/2} \\ x\ = y}} \frac{v(x\ ) \qquad v(y\ )}{x \qquad y^{\ 1 \quad n/q}} \quad c(n,q,G) \ \ v\ _{2,q;G^1_{1/2}}; \quad q > n\,. \tag{3.3}$$

Проверим, что к решению $v(x\ )$ применима локальная шаудеровская L_q-оценка внутри области и вблизи гладкого куска границы (см. [16, 18]). Действительно, в силу предположений (А), (Г) теоремы функции $a_{ij}(x,u,z)$ непрерывны на множестве , т.е. для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta(\varepsilon)$, что

$$a_{ij}(x, u(x), u_x(x)) \quad a_{ij}(y, u(y), u_x(y)) \ < \varepsilon\,,$$

как только

$$x \quad y + u(x) \quad u(y) + u_x(x) \quad u_x(y) < \eta(\varepsilon), \qquad x, y \quad \overline{G^{\rho}_{\rho/2}}, \quad \rho \quad (0, d)\,.$$

Последнее неравенство обеспечивается локальной оценкой (3.2), примененной в области $G^{\rho}_{\rho/2}$ и на гладком куске ее границы $\Gamma^{\rho}_{\rho/2}$. Но тогда функции $a^{ij}(x\ )$ непрерывны в $\overline{G^1_{1/2}}$, а следовательно, и равномерно непрерывны, т.е. для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (вследствие вышеизложенного его следует определять из неравенства $\delta d + M_1(\delta d)^{\kappa} < \eta(\varepsilon)$), что $a^{ij}(x\ ) \quad a^{ij}(y\ ) < \varepsilon$, лишь только $x \quad y < \delta$ для всех $x\ , y \quad \overline{G^1_{1/2}}$. Итак, проверено, что выполнены условия справедливости локальной граничной шаудеровской L_q-оценки, согласно которой получаем

$$v \ {}^{q}_{2,q;G^1_{1/2}} \quad c_3 \iint\limits_{G^2_{1/4}} \Big(v^{\ q} + \rho^{q(1\ \ \gamma)}\ a(\rho x\ , \rho^{1+\gamma} v, \rho^{\gamma} v_x\ )^{\ q} \Big)\, dx \tag{3.4}$$

с постоянной c_3, не зависящей от v и a. Оценка (0.1) дает

$$\iint\limits_{G^2_{1/4}} v^{\ q}\, dx \quad = \quad \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} \rho^{\ \ q(1+\gamma)}\ u(x)^{\ q} \rho^{\ \ n}\, dx$$

$$c_0^q \mathrm{mes}\Omega c_{q,\gamma} \int\limits_{\rho/4}^{2\rho} \frac{dr}{r} \quad c_0^q \mathrm{mes}\Omega c_{q,\gamma} \ln 8\,. \tag{3.5}$$

Аналогичным образом, из предположения (B) и вследствие оценки (0.2) имеем

$$\iint\limits_{G^2_{1/4}} \rho^{q(1\ \ \gamma)}\ a(\rho x\ , \rho^{1+\gamma} v, \rho^{\gamma} v_x\ )^{\ q}\, dx \quad \rho^{q(1\ \ \gamma)\ \ n} \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} (\mu_1 \quad u^{\ 2}$$

$$+ b(x) \quad u\ + f(x))^q\, dx \quad 2^n 3^{q\ \ 1} \rho^{q(1\ \ \gamma)} \mathrm{mes}\Omega \int\limits_{\rho/4}^{2\rho} (\mu_1^q c_1^{2q} r^{2q\gamma\ \ 1}$$

$$+ (k_1 c_1)^q r^{q(\beta+\gamma)\ \ 1} + k_1^q r^{q\beta\ \ 1})\, dr \quad c(n, q, \gamma, \beta, \mu_1, c_1, k_1)\,, \tag{3.6}$$

так как $0 < \gamma \quad 1 + \beta$. Из (3.4)–(3.6) следует

$$v \ {}_{2,q;G^1_{1/2}} \quad c(n, \nu, \mu, \mu_1, \gamma, \beta, k_1, q, M_0, c_0, c_1, c_3)\,. \tag{3.7}$$

Теперь из (3.7) и (3.3) получаем

$$\sup_{\substack{x\ , y \quad G^1_{1/2} \\ x\ = y}} \frac{v(x\ ) \qquad v(y\ )}{x \quad y^{\ 1\ \ n/q}} \quad c_4, \quad q > n\,, \tag{3.8}$$

где $c_4 = c(n,\nu,\mu,\mu_1,\gamma,\beta,k_1,q,M_0,c_0,c_1,c_3,G)$.

Возвращаясь к переменным x, u, имеем неравенство

$$\sup_{\substack{x,y\in G^{\rho}_{\rho/2}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/q}} \le c_4\rho^{\gamma-1+n/q}, \quad q>n, \quad \rho\in(0,d)\,. \tag{3.9}$$

Вспомним теперь, что по условию теоремы $q \ge n/(1-\gamma)$. Положим $\tau = \gamma - 1 + n/q \le 0$, тогда (3.9) дает

$$|u(x)-u(y)| \le c_4\rho^{\tau}|x-y|^{\gamma-\tau} \quad \forall x,y\in G^{\rho}_{\rho/2}, \quad \rho\in(0,d)\,.$$

По определению множества $G^{\rho}_{\rho/2}$ $|x-y| \le 2\rho$ и, следовательно, $|x-y|^{-\tau} \le (2\rho)^{-\tau}$, так как $\tau \le 0$. Поэтому

$$\sup_{\substack{x,y\in G^{\rho}_{\rho/2}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \le 2^{-\tau}c_4, \quad \rho\in(0,d)\,. \tag{3.10}$$

Пусть теперь x, $y\in\overline{G^d_0}$ и $\rho\in(0,d)$. Если x, $y\in G^{\rho}_{\rho/2}$, то выполнено (3.10). Если $|x-y|>\rho=|x|$, то, в силу оценки (0.2), получаем $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \le 2\rho^{-\gamma}|u(x)| \le 2c_1$. Отсюда и из (3.10) заключаем, что $\sup\limits_{\substack{x,y\in G^d_0\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \le$ *const*. Это неравенство вместе с оценками (0.1), (0.2) означает принадлежность $u(x)\in C^{1+\gamma}(\overline{G^d_0})$. Теорема 3 доказана.

4. Интегральные весовые оценки

На основе оценок п. 3 выведем теперь интегральные весовые оценки вторых обобщенных производных решения и установим наилучший показатель веса.

Теорема 4.1. *Пусть $u(x)$ – решение задачи (КЛ), $q>n$, $\varphi(x)\equiv 0$ и выполнены предположения (С), (А)–(Г). Пусть, кроме того,*
(АА) $a_{ij}(0,0,0)=\delta_i^j$ $(i,j=1,\dots,n)$ – символ Кронекера. Тогда существуют положительные числа d, c_2 такие, что если $b(x)$, $f(x)\in V^0_{2,\alpha}(G)$ и

$$4-n-2\lambda<\alpha\le 2\,, \tag{4.1}$$

то $u(x)\in V^2_{2,\alpha}(G_0^{d/2})$ и справедлива оценка

$$\iint\limits_{G_0^{d/2}} (r^{\alpha}u_{xx}^2 + r^{\alpha-2}|\nabla u|^2 + r^{\alpha-4}u^2)\,dx \le c_2\iint\limits_{G_0^{2d}} \Big(u^2+|\nabla u|^2+r^{\alpha}(b^2(x)+f^2(x))\Big)\,dx\,, \tag{4.2}$$

причем d и c_2 определяются лишь величинами n, ν, μ, μ_1, γ, β, k_1, q, d_0, M_0, λ, α, c_0, c_1, c_3 и областью G.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. 2 $\quad$ **n** $\quad \alpha \quad$ **2**.

В этом случае, в силу оценок (0.1), (0.2),

$$\iint\limits_{G_0^d} (r^{\alpha \quad 2} \quad u^{\ 2} + r^{\alpha \quad 4} u^2)\, dx \qquad c(\alpha, n, \gamma) d^{\alpha + n \quad 2 + 2\gamma} . \tag{4.3}$$

Переходим к получению весовой оценки вторых обобщенных производных решения. Зафиксируем $d \quad (0, d_0]$ и рассмотрим множества $G^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Совершим в уравнении задачи (КЛ) замену переменных $x = (2 \ \ ^k d) x$, $u((2 \ \ ^k d) x\ ) = v(x\ )$. В результате область $G^{(k)}$ пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ перейдет в область $G_{1/2}^1$ пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, а уравнение принимает вид

$$a^{ij}(x\ ) v_{x_i x_j} = F(x\ ) ,$$

где

$$a^{ij}(x\ ) = a_{ij}((2 \ \ ^k d) x\ , v(x\ ), d \ \ ^1 2^k v_x\ ) ,$$
$$F(x\ ) = \quad (2 \ \ ^k d)^2 a((2 \ \ ^k d) x\ , v(x\ ), d \ \ ^1 2^k v_x\ ) .$$

К его решению применим шаудеровскую L_2-оценку внутри области и вблизи гладкого куска границы: возможность использования локальной граничной шаудеровской оценки гарантируется предположениями доказываемой теоремы и обоснована при доказательстве теоремы 3. В результате получаем (см. также оценку (3.4))

$$\iint\limits_{G_{1/2}^1} v_{x\ x}^2 \ dx \qquad c_3 \iint\limits_{G_{1/4}^2} (v^2(x\ ) + F^2(x\ ))\, dx \tag{4.4}$$

с постоянной c_3, не зависящей от v и F. В неравенстве (4.4) возвратимся к старым переменным; учитывая определение $G^{(k)}$, получаем

$$\iint\limits_{G^{(k)}} r^\alpha u_{xx}^2\, dx \qquad c_3 \iint\limits_{G^{(k \quad 1)} \quad G^{(k)} \quad G^{(k+1)}} (r^{\alpha \quad 4} u^2 + r^\alpha a^2(x, u, u_x))\, dx\, . \tag{4.5}$$

Просуммируем неравенства (4.5) по $k = 0, 1, \ldots, [\log_2(d/\varepsilon)] \quad \varepsilon \quad (0, d)$. В результате получим

$$\iint\limits_{G_\varepsilon^d} r^\alpha u_{xx}^2\, dx \qquad c_3 \iint\limits_{G_{\varepsilon/4}^{2d}} (r^{\alpha \quad 4} u^2 + r^\alpha a^2(x, u, u_x))\, dx\, . \tag{4.6}$$

В силу предположения (B) и оценки (0.2) из неравенства (4.6) следует

$$\iint\limits_{G_\varepsilon^d} r^\alpha u_{xx}^2\,dx \quad c_4 \iint\limits_{G_0^{2d}} (r^{\alpha\ \ 4}u^2 + r^\alpha f^2(x) + r^\alpha b^2(x) + r^{\alpha\ \ 2} \quad u\ ^2)\,dx \qquad \varepsilon > 0\,, \tag{4.7}$$

где постоянная c_4 не зависит от ε. Поэтому по теореме Фату в неравенстве (4.7) можно совершить предельный переход по $\varepsilon \quad +0$, в результате чего получаем

$$\iint\limits_{G_0^d} r^\alpha u_{xx}^2\,dx \quad c_4 \iint\limits_{G_0^{2d}} (r^{\alpha\ \ 4}u^2 + r^\alpha f^2(x) + r^\alpha b^2(x) + r^{\alpha\ \ 2} \quad u\ ^2)\,dx\,. \tag{4.8}$$

Неравенства (4.8) вместе с (4.3) означают, что $u(x) \quad V_{2,\alpha}^2(G_0^d)$.

Переходим к выводу оценки (4.2). Пусть $\zeta(r)$ – срезающая на отрезке $[0,d]$ функция, т.е. дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $\zeta(r) \quad 1$ для $r \quad [0,d/2], 0 \quad \zeta(r) \quad 1$ для $r \quad [d/2,d]$; $\zeta \quad 0$ для $r > d$; $\zeta(d) = \zeta\ (d) = 0$. Умножим обе части уравнения задачи (КЛ) на $\zeta^2(r)r^{\alpha\ \ 2}u(x)$, и полученное равенство проинтегрируем по области G_0^d. Принимая по внимание условие (AA), дважды интегрируя по частям, в результате получим

$$\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r)r^{\alpha\ \ 2} \quad u\ ^2\,dx + \frac{2\quad\alpha}{2}(n+\alpha \quad 4)\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r)r^{\alpha\ \ 4}u^2(x)\,dx$$

$$= \iint\limits_{G_{d/2}^d} ((n+2\alpha \quad 5)\zeta\zeta\ r^{\alpha\ \ 3} + \zeta\zeta\ \ r^{\alpha\ \ 2} + \zeta\ ^2 r^{\alpha\ \ 2})u^2(x)\,dx$$

$$+ \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r)r^{\alpha\ \ 2}u(x)\Big(\ a_{ij}(x,u,u_x) \quad a_{ij}(0,0,0)\ \ u_{x_ix_j} + a(x,u,u)\Big)\,dx\,. \tag{4.9}$$

По предположениям теоремы $a_{ij}(x,u,z)$ непрерывны в любой точке (x,u,z)

и, в частности, в точке $(0,0,0)$. Последнее означает, что для любого $\delta > 0$ найдется $d_\delta > 0$ такое, что

$$a_{ij}(x,u(x),u_x(x)) \quad a_{ij}(0,0,0)\ < \delta\,, \tag{4.10}$$

как только

$$x\ +\ u(x)\ + \quad u(x)\ < d_\delta\,. \tag{4.11}$$

Из оценок (0.1), (0,2) следует

$$x\ +\ u(x)\ + \quad u(x) \quad d + c_0 d^{1+\gamma} + c_1 d^\gamma \qquad x \quad G_0^d\,. \tag{4.12}$$

Выберем теперь $d > 0$, быть может еще меньшим, чем ранее, так чтобы выполнялось неравенство

$$d + c_0 d^{1+\gamma} + c_1 d^{\gamma} \le d_\delta \,. \tag{4.13}$$

Этим обеспечено выполнение (4.10), и поэтому, с учетом неравенства Коши и неравенства (4.8), получаем

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-2} \left| a_{ij}(x,u,u_x) - a_{ij}(0,0,0) \right| \left| u u_{x_i x_j} \right| dx \\ &\le \delta \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-2} |u| \, |u_{xx}| \, dx \le \frac{\delta}{2} \iint\limits_{G_0^d} (r^\alpha u_{xx}^2 + r^{\alpha-4} u^2) \, dx \\ \le \frac{\delta}{2}(1+c_4) &\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^{\alpha-4} u^2 + r^\alpha f^2(x) + r^\alpha b^2(x) + r^{\alpha-2} |\nabla u|^2) \, dx \quad \forall \delta > 0 \,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Далее, в силу предположения (B), оценок (0.1), (0.2) и неравенства Коши,

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-2} u(x) a(x,u,u_x) \, dx \le \mu_1 c_0 d^{1+\gamma} \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-2} |\nabla u|^2) \, dx \\ + &\ \frac{1}{2}(c_1 d^\gamma + \delta) \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-4} u^2(x) \, dx + \frac{1}{2} c_1 d^\gamma \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^\alpha b^2(x) \, dx \\ + &\ \frac{1}{2\delta} \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^\alpha f^2(x) \, dx \quad \forall \delta > 0 \,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Из (4.9), (4.14), (4.15) теперь получаем

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-2} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{2-\alpha}{2}(n+\alpha-4) \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r^{\alpha-4} u^2 x) \, dx \\ &\le c_6(\delta + d^\gamma) \iint\limits_{G_0^{d/2}} (r^{\alpha-2} |\nabla u|^2 + r^{\alpha-4} u^2) \, dx + c_8 \iint\limits_{G_0^{2d}} r^\alpha (b^2 + f^2) \, dx \\ &\qquad + c_7 \iint\limits_{G_{d/2}^{2d}} (|\nabla u|^2 + u^2) \, dx \quad \forall \delta > 0 \,, \end{aligned}$$

причем

$$c_6 = c(\mu_1, c_0, c_1, c_3), \quad c_7 = c(\mu_1, c_0, c_1, c_3, n, \alpha, \gamma, d), \quad c_8 = c(\delta, \gamma, c_1, c_3, d) \,.$$

Если $n+\alpha \quad 4 \quad 0$, то воспользуемся еще неравенством Харди–Виртингера. В результате получаем

$$C(\lambda,n,\alpha)\iint\limits_{G_0^{d/2}} r^{\alpha \quad 2} \quad u^{\;2}\,dx \quad c_9(\delta+d^\gamma)\iint\limits_{G_0^{d/2}} r^{\alpha \quad 2} \quad u^{\;2}\,dx$$
$$+c_{10}\iint\limits_{G_0^{2d}}(\quad u^{\;2}+u^2+r^\alpha(b^2+f^2))\,dx \quad \delta>0\,, \tag{4.16}$$

где $C(\lambda,n,\alpha)=1 \quad \frac{2\ \alpha}{2}(4 \quad n \quad \alpha)H(\lambda,\alpha,n)>0$ (в силу (4.1)),

$$c_9=c(\mu_1,c_0,c_1,c_3,n,\alpha,\lambda),\quad c_{10}=c(\mu_1,c_0,c_1,c_3,n,\alpha,\gamma,d,\delta)\,.$$

Выберем теперь числа δ и d так:

$$\delta=\frac{1}{4}c_9^{\ 1}C(\lambda,n,\alpha)\,, \tag{4.17}$$

$$c_9 d^\gamma \quad \frac{1}{4}C(\lambda,n,\alpha)\,. \tag{4.18}$$

Тогда из (4.16) окончательно получаем неравенство

$$\iint\limits_{G_0^{d/2}} r^{\alpha \quad 2} \quad u^{\;2}\,dx \quad \frac{2c_{10}}{C(\lambda,\alpha,n)}\iint\limits_{G_0^{2d}}(\quad u^{\;2}+u^2+r^\alpha(b^2+f^2))\,dx\,, \tag{4.19}$$

верное для таких $d \quad (0,d_0)$, для которых выполнены (4.18) и (4.13) с величиной d_δ, определяемой по непрерывности $a_{ij}(x,u,z)$ в точке $(0,0,0)$ для числа δ из равенства (4.17). Неравенство (4.19) вместе с неравенством (4.8) и приводит к искомой оценке (4.2).

2. 4 n $2\lambda<\alpha<2$ n.

В силу (3.1) предположения (B) $b(x),\ f(x) \quad \overset{0}{W}{}_{2\ \ n}(G_0^d)$, следовательно, по доказанному в случае 1 $u(x) \quad \overset{2}{W}{}_{2\ \ n}(G_0^d)$, т.е.

$$\iint\limits_{G_0^d}(r^{2 \quad n}u_{xx}^2+r^{\quad n} \quad u^{\;2})+r^{\quad n \quad 2}u^2)\,dx< \quad . \tag{4.20}$$

Рассмотрим функцию $r_\varepsilon(x)$, определенную в п. 1. Для нее справедливо неравенство (см. свойство 3) этой функции)

$$r_\varepsilon(x) \quad r+\varepsilon \quad 2h^{\ 1}r_\varepsilon(x),\qquad x \quad \bar{G},\qquad \varepsilon>0\,, \tag{4.21}$$

а также остается справедливым неравенство Харди–Виртингера. Вспомним обозначение множеств $G^{(k)}$ и обратимся к неравенству (4.4). Умножим обе части этого неравенства на $(2\ ^{k}d+\varepsilon)^{\alpha\ \ 2}$, $\ \varepsilon>0$, учитывая, что в $G^{(k)}$ $2\ ^{k\ \ 1}d+\varepsilon<r+\varepsilon<2\ ^{k}d+\varepsilon$, и возвращаясь к старым переменным, получаем неравенство

$$\iint\limits_{G^{(k)}} r^2(r+\varepsilon)^{\alpha\ \ 2}u_{xx}^2\,dx$$

$$c_3 \iint\limits_{G^{(k\ \ 1)}\ \ G^{(k)}\ \ G^{(k+1)}} \Big(r\ \ ^2(r+\varepsilon)^{\alpha\ \ 2}u^2+(r+\varepsilon)^{\alpha}a^2(x,u,u_x)\Big)\,dx\,,$$

а отсюда, в силу неравенства (4.21), имеем

$$\iint\limits_{G^{(k)}} r^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u_{xx}^2\,dx\quad c_3\iint\limits_{G^{(k\ \ 1)}\ \ G^{(k)}\ \ G^{(k+1)}}\Big(r\ \ ^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u^2+r_\varepsilon^{\alpha}a^2(x,u,u_x)\Big)\,dx\,.$$

Суммируя эти неравенства по всем $k=0,1,2,\ldots$, получаем оценку

$$\iint\limits_{G_0^d} r^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u_{xx}^2\,dx\quad c_3\iint\limits_{G_0^{2d}}\Big(r\ \ ^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u^2+r_\varepsilon^{\alpha}a^2(x,u,u_x)\Big)\,dx\,. \tag{4.22}$$

Умножим теперь обе части уравнения задачи (КЛ) на $\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u(x)$ и проинтегрируем по области G_0^d, применив дважды формулу интегрирования по частям:

$$\iint\limits_{G_0^d}\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}\ \ \ u\ ^2\,dx=\frac{2\ \ \alpha}{2}(4\ \ \ n\ \ \ \alpha)\iint\limits_{G_0^d}\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 4}u^2(x)\,dx$$

$$+\iint\limits_{G_{d/2}^d}u^2(x)\left(2(\alpha\ \ \ 2)\zeta\zeta\,(x_i\ \ \ \varepsilon l_i)\frac{x_i}{r}r_\varepsilon^{\alpha\ \ 4}+n\zeta\zeta\,r\ \ ^1r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}+\zeta\ ^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}+\zeta\zeta\ \ r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}\right)dx$$

$$+\iint\limits_{G_0^d}\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u(x)\Big(\big(a_{ij}(x,u,u_x)\ \ \ a_{ij}(0,0,0)\big)u_{x_ix_j}+a(x,u,u_x)\Big)\,dx. \tag{4.23}$$

Пусть $d\quad(0,d_0]$ столь мало, чтобы выполнялось (4.13), а следовательно, и (4.10); тогда из неравенства Коши получим

$$\iint\limits_{G_0^d}\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}(a_{ij}(x,u,u_x)\ \ \ a_{ij}(0,0,0))uu_{x_ix_j}\,dx$$

$$\delta\iint\limits_{G_0^d}\zeta^2(r)r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}(r\ u_{xx}\ )(r\ \ ^1\ u\ )\,dx$$

$$\frac{\delta}{2}\iint\limits_{G_0^d}(\zeta^2(r)r^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u_{xx}^2+\zeta^2(r)r\ \ ^2r_\varepsilon^{\alpha\ \ 2}u^2)\,dx,\qquad\delta>0\,. \tag{4.24}$$

Аналогично, по предположению (B), с учетом оценок (0.1), (0.2),

$$\iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r_\varepsilon^{\alpha-2} u(x) a(x,u,u_x)\,dx \le c_0\mu_1 d^{1+\gamma} \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx$$

$$+ \quad \frac{1}{2}(c_1 d^\gamma + \delta) \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\,dx + \frac{1}{2} c_1 d^\gamma \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r_\varepsilon^\alpha b^2(x)\,dx$$

$$+ \quad \frac{1}{2\delta} \iint\limits_{G_0^d} \zeta^2(r) r_\varepsilon^\alpha f^2(x)\,dx, \qquad \delta > 0\,. \tag{4.25}$$

Из неравенств (4.22)–(4.25), с учетом свойств функций $r_\varepsilon(x)$ и $\zeta(r)$, получаем

$$\iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx \le \left(\frac{1}{2}(\delta + c_1 d^\gamma) + (2-\alpha)(4-n-\alpha)\right) \iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\,dx$$

$$+ \quad c_{11}(\mu_1, c_0, c_1, c_3, \gamma) d^{2\gamma} \iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx + \frac{\delta}{2}(1+c_3) \iint\limits_{G_0^{2d}} r^{-2} r_\varepsilon^{\alpha-2} u^2\,dx$$

$$+ \quad c_{12}(\mu_1, c_1, c_3, \gamma, d, \delta, n, \alpha) \iint\limits_{G_{d/2}^d} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx$$

$$+ \quad c_{13}(c_1, c_3, \gamma, d, \delta) \iint\limits_{G_0^{2d}} r_\varepsilon^\alpha(x)(b^2 + f^2)\,dx\,. \tag{4.26}$$

Первый и третий интегралы справа оценим по неравенствам Харди–Виртингера и (13) [5], а для оценки последнего интеграла справа применим свойство 1) функции $r_\varepsilon(x)$ и учтем отрицательность показателя α; в результате из неравенства (4.26) получаем

$$C(\lambda, n, \alpha) \iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx$$

$$\le \left(\frac{1}{2}(\delta + c_1 d^\gamma) H(\lambda, \alpha, n) + c_{11} d^{2\gamma} + \frac{\delta(1+c_4)}{2\lambda(\lambda+n-2)}\right) \iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx$$

$$+ \quad c_{14} \iint\limits_{G_0^{2d}} (u^2 + |\nabla u|^2 + r^\alpha f^2(x) + r^\alpha b^2(x))\,dx, \qquad \delta > 0\,, \tag{4.27}$$

где $C(n, \lambda, \alpha)$ – та же, что и в (4.16). Выберем теперь δ и d следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{2} C(\lambda, \alpha, n) \left(H(\lambda, \alpha, n) + \frac{1+c_4}{\lambda(\lambda+n-2)}\right)^{-1}, \tag{4.28}$$

$$\frac{1}{2}c_1 d^{\gamma} H(\lambda,\alpha,n) + c_{11} d^{2\gamma} \quad \frac{1}{4}C(\lambda,\alpha,n)\,. \tag{4.29}$$

Тогда из (4.27) окончательно получаем неравенство

$$\iint\limits_{G_0^{d/2}} r_\varepsilon^{\alpha \quad 2} \quad u^{\ 2}\,dx$$

$$\frac{2c_{14}}{C(\lambda,\alpha,n)} \iint\limits_{G_0^{2d}} (u^2 + \quad u^{\ 2} + r^{\alpha} f^2(x) + r^{\alpha} b^2(x))\,dx, \qquad \varepsilon > 0\,. \tag{4.30}$$

Наконец, из неравенств (4.22), (13) [5], с учетом предположения (B) и оценок (0.1), (0.2), на основании неравенства (4.30) имеем

$$\iint\limits_{G_0^{d/2}} (r^2 r_\varepsilon^{\alpha \quad 2} u_{xx}^2 + r_\varepsilon^{\alpha \quad 2} \quad u^{\ 2} + r_\varepsilon^{\alpha \quad 4} u^2)\,dx$$

$$c_2 \iint\limits_{G_0^{2d}} (u^2 + \quad u^{\ 2} + r^{\alpha} f^2(x) + r^{\alpha} b^2(x))\,dx, \qquad \varepsilon > 0\,, \tag{4.31}$$

$c_2 = c(n,\lambda,\alpha,\nu,\mu,\mu_1,\gamma,\beta,k_1,q,M_0,d_0,c_0,c_1,c_3)$ и не зависит от ε. Неравенство (4.31) справедливо для таких $d \quad (0,d_0]$, для которых выполнены неравенства (4.29), а также (4.13) с величиной d_δ, определяемой по непрерывности $a_{ij}(x,u,z)$ в точке $(0,0,0)$ для числа δ, которое определено равенством (4.28). Совершая в неравенстве (4.31) предельный переход по $\varepsilon \quad +0$ на основании теоремы Фату, приходим к искомой оценке (4.2). Этим доказательство теоремы 4.1 завершено.

З а м е ч а н и е. В силу непрерывности старших коэффициентов уравнения в точке $(0,0,0)$ и доказанных оценок (0.1), (0.2) условие (AA) теоремы 4.1 не является ограничительным, так как существует ортогональное преобразование координат, переводящее эллиптическое уравнение с замороженными в точке старшими коэффициентами к каноническому виду, главная часть которого определяется лапласианом.

Теорема 4.2. *Пусть $u(x)$ – решение задачи (КЛ), $q > n$, $\varphi(x) \quad 0$ и выполнены предположения (C), (AA), (A)–(Г). Пусть число β из (3.1) удовлетворяет неравенству $\beta > \lambda \quad 2$. Тогда существуют положительные числа d и c_{15}, определяемые лишь величинами из предположений (A)–(Г) и областью G, такие, что $u(x) \quad \overset{2}{W}_{4 \quad n}(G_0^{d/2})$, и выполняется оценка*

$$u \ {}_{V^2_{2,4 \quad n}(G_0^{\rho})} \quad c_{15}\rho^{\lambda}, \quad \rho \quad (0,\frac{d}{2})\,. \tag{4.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принадлежность $u(x)$ пространству $\overset{2}{W}_{4\ \ n}(G_0^{d/2})$ следует из теоремы 4.1, так что требуется доказать лишь оценку (4.32). Обозначим

$$V(\rho) \quad \iint\limits_{G_0^\rho} r^{2\ \ n} \quad u\ ^2\,dx\,. \tag{4.33}$$

Умножим обе части уравнения задачи (КЛ) на $r^{2\ \ n}u(x)$ и проинтегрируем по области G_0^ρ, $\rho \quad (0,\frac{d}{2})$:

$$V(\rho) = \int\limits_\Omega \left(\rho u(\rho,\omega)\frac{\partial u}{\partial r}\ {}_{r=\rho} + \frac{n\quad 2}{2}u^2(\rho,\omega)\right)d\omega$$

$$+\iint\limits_{G_0^\rho} u(x)r^{2\ \ n}\Big(\ \ a_{ij}(x,u,u_x) \quad a_{ij}(0,0,0)\ \ u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x)\Big)\,dx\,,$$

$$\rho \quad (0,\frac{d}{2})\,. \tag{4.34}$$

Оценим сверху каждый интеграл справа. Первый интеграл оценивается по неравенству (42) [5]. Далее, в силу предположения (В) по неравенству Коши с $\delta = \rho^\varepsilon \quad \varepsilon > 0$ и учетом оценок (0.1), (0.2), имеем

$$\iint\limits_{G_0^\rho} r^{2\ \ n}u(x)a(x,u,u_x)\,dx \quad \mu_1 c_0\rho^{1+\gamma}V(\rho)$$

$$+\frac{1}{2}c_1\rho^\gamma \iint\limits_{G_0^\rho}\Big(r\ \ ^n u^2 + r^{4\ \ n}b^2(x)\Big)\,dx + \frac{1}{2}\iint\limits_{G_0^\rho}\Big(\rho^\varepsilon r\ \ ^n u^2 + \rho\ \ ^\varepsilon r^{4\ \ n}f^2(x)\Big)\,dx\,.$$

Применим еще неравенство Харди–Виртингера с $\alpha = 4 \quad n$ и неравенство (3.1):

$$\iint\limits_{G_0^\rho} r^{2\ \ n}u(x)a(x,u,u_x)\,dx \quad \Big(\mu_1 c_0\rho^{1+\gamma} + \frac{1}{2}H(\lambda,n,4\quad n)(\rho^\varepsilon + c_1\rho^\gamma)\Big)V(\rho)$$

$$+\,(4\lambda)\ \ ^1(1+c_1)k_1^2\mathrm{mes}\Omega\rho^{2s\ \ \varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0, \quad s = \beta + 2 > \lambda\,. \tag{4.35}$$

Далее, из предположений (А), (Г) на основании оценок (0.1), (0.2) нетрудно вывести, что

$$\left(\sum_{i,j=1}^n\ \ a_{ij}(x,u(x),u_x(x)) \quad a_{ij}(0,0,0)\ \ ^2\right)^{1/2} \quad \delta(\rho), \quad\ \ x\ \ < \rho\,,$$

$$\delta(\rho) = c(n, c_0, c_1, \gamma, d)\rho^{\gamma}, \quad \rho \in (0, \frac{d}{2}); \quad 0 < \gamma \le \gamma^* = \min(\gamma_0; 1 + \beta; 1 - \frac{n}{q}) .$$

Поэтому, применяя неравенства Коши, (4.8) и Харди–Виртингера с $\alpha = 4 - n$, а также (3.1), получаем

$$\iint\limits_{G_0^\rho} r^{4-n} u(x) \left(a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0,0,0)\right) u_{x_i x_j}\, dx$$
$$\le \frac{1}{2}\delta(\rho) \iint\limits_{G_0^\rho} (r^{4-n} u_{xx}^2 + r^{-n} u^2)\, dx \le \frac{1}{2} H(\lambda, n, 4-n)\delta(\rho) V(\rho)$$
$$+ \frac{c_3}{2}\left(H(\lambda, n, 4-n) + 1\right)\delta(\rho) V(2\rho) + \frac{k_1^2 c_3}{4\lambda} \mathrm{mes}\Omega\, \delta(\rho) (2\rho)^{2s}. \tag{4.36}$$

Из (4.34) на основании неравенств (42) [5], (4.35) и (4.36) заключаем, что функция $V(\rho)$ является решением задачи Коши для дифференциального неравенства (2.14) [6] с

$$\psi(\rho) = \mu_1 c_0 \rho^{1+\gamma} + \frac{1}{2} H(\lambda, n, 4-n)(\rho^{\varepsilon} + c_1\rho^{\gamma} + \delta(\rho)) ;$$

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{2} c_3 (H(\lambda, n, 4-n) + 1)\delta(\rho) ; k = (4\lambda)^{-1}(1 + c_1 + c_3 4^s d^{\varepsilon}\delta(d)) k_1^2 \mathrm{mes}\Omega ,$$

$$\varepsilon \in (0, 2(s-\lambda)), \quad s > \lambda; \quad V_0 = \iint\limits_{G_0^d} r^{4-n} |u|^2\, dx \le \frac{c_1 \mathrm{mes}\Omega}{2(2+\gamma)} d^{2(\gamma+2)} ,$$

и при этом выполнены все условия леммы 2.4 из [6], согласно которой справедлива оценка $V(\rho) \le c\rho^{2\lambda}$. Эта оценка вместе с неравенствами (4.8), Харди–Виртингера и (3.1) дает искомую оценку (4.32). Теорема 4.2 доказана.

5. L_q-оценка вторых производных решения. Точные оценки модулей решения и его градиента

Теперь уточним показатель γ в оценках (0.1), (0.2) и показатель гельдеровости первых производных решения в окрестности конической точки $\mathcal{O}$.

Теорема 5.1. *Пусть $u(x)$ – решение задачи (КЛ), $q > n$, $\varphi(x) \equiv 0$, известна величина $M_0 = \max_{x \in \bar{G}} |u(x)|$. Пусть выполнены предположения (С), (АА), (А)–(Г), причем неравенство (3.1) из (В) – с $\beta > \lambda - 2 > -1$. Тогда существуют положительные числа $d \le d_0$ и $\bar{c}_0$, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, определяемые лишь величинами n, λ, ν, μ, μ_1, β, k_1, q, M_0, d_0, c_0, c_1, c_3 и областью G, такие, что справедливы следующие утверждения:*

1. $|u(x)| \le \bar{c}_0 |x|^{\lambda}$; $\quad |\nabla u(x)| \le \bar{c}_1 |x|^{\lambda - 1}$, $\quad x \in G_0^{d/2}$;

2. $u(x)$ $\overset{2}{W}{}_{4\ \ n}(G_0^{d/2})$ *и при этом* u ${}_{\overset{2}{W}{}_{4\ \ n}(G_0^{\rho})}$ $\bar{c}_2\rho^{\lambda}$, $0<\rho<d/2$;

3. *если либо* λ 2, q n, *либо* n $q<\frac{n}{2\ \ \lambda}$, $1<\lambda<2$, *то* $u(x)$ $V^2_{q,0}(G_0^{d/2})$, *и при этом* u ${}_{V^2_{q,0}(G_0^{\rho})}$ $\bar{c}_3\rho^{\lambda\ \ 2+n/q}$;

4. *если* $1<\lambda<2$, q $\frac{n}{2\ \ \lambda}$, *то* $u(x)$ $C^{\lambda}(\overline{G_0^{d/2}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 2 доказано в теореме 4.2. Для доказательства остальных утверждений рассмотрим множества $G^{\rho}_{\rho/2}$ и $G^{2\rho}_{\rho/4}$ $G^{\rho}_{\rho/2}$. В уравнении задачи (КЛ) совершим преобразование координат $x=\rho x$. Функция $v(x)=\rho\ \ {}^{\lambda}u(\rho x)$ удовлетворяет в $G^2_{1/4}$ уравнению (КЛ) при $\gamma=\lambda\ \ 1$. К решению $v(x)$ применима локальная граничная шаудеровская оценка (обоснование возможности ее использования – см. доказательство теоремы 3):

$$v\ {}^{q}_{2,q;G^1_{1/2}}\quad c_3^q\iint\limits_{G^2_{1/4}}\Big(\ v\ {}^{q}+\rho^{(2\ \ \lambda)q}\ a(\rho x,\rho^{\lambda}v,\rho^{\lambda\ \ 1}v_x)\ {}^{q}\Big)\,dx\ , \tag{5.1}$$

$q>1$ с постоянной c_3, не зависящей от v и a. Пусть вначале 2 $n<4$. В силу оценки (4.32) теоремы 4.2 имеем

$$v\ {}^{2}_{2,2;G^1_{1/2}}\quad c(n)\rho\ \ 2\lambda\iint\limits_{G^{\rho}_{\rho/2}}(r^{4\ \ n}u^2_{xx}+r^{2\ \ n}\ \ u\ {}^2+r\ \ {}^{n}u^2)\,dx\quad c(n)c^2_{15}\,.$$

Поэтому из теоремы вложения Соболева [17] следует $\sup\limits_{x\ \ G^1_{1/2}}\ v(x)$ $c(n,q)c_{15}$ $=\bar{c}_0$ или $u(x)$ $\bar{c}_0\rho^{\lambda}$, x $G^{\rho}_{\rho/2}$. Полагая $x=\frac{3}{4}\rho$, получаем первую оценку утверждения 1 теоремы. Вторая оценка этого утверждения следует из первой путем применения метода слоев Кондратьева.

Пусть теперь n 4. В этом случае воспользуемся локальным принципом максимума [16]:

$$\sup\limits_{x\ \ G^1_{1/2}}\ v(x)$$

$$c(n,\nu\ \ {}^1,\mu)\left(\ v\ {}_{2,G^2_{1/4}}+\rho^{2\ \ \lambda}\ a(\rho x,\rho^{\lambda}v,\rho^{\lambda\ \ 1}v_x)\ {}_{n,G^2_{1/4}}\right)\,. \tag{5.2}$$

Оценим сверху слагаемые правой части (5.2). Первое слагаемое оценивается, как и выше, по неравенству (4.32) теоремы 4.2:

$$v\ {}^{2}_{2,G^2_{1/4}}\quad 2^n\rho\ \ {}^{2\lambda}\iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}}r\ \ {}^{n}u^2\,dx\quad 2^nc^2_{15}\,. \tag{5.3}$$

По предположению (B), с учетом (0.2),

$$\iint\limits_{G^2_{1/4}} |a(\rho x, \rho^\lambda v, \rho^{\lambda-1} v_x)|^n \, dx$$

$$\le \frac{1}{3} 6^n \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} \Big(\mu_1^n |\nabla u|^{2n} + b^n(x) |\nabla u|^n + f^n(x)\Big) r^{-n} \, dx$$

$$\le \frac{1}{3} 6^n \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} \Big(\mu_1^n (r^{2-n} |\nabla u|^2)(r^{-2} |\nabla u|^{2n-2})$$

$$+ (r^{2-n} |\nabla u|^2)(k_1^n r^{\beta n - 2} |\nabla u|^{n-2}) + k_1^n r^{\beta n - n}\Big) \, dx$$

$$\le \frac{1}{3} 6^n \Big(\mu_1^n c_1^{2n-2} \rho^{2\gamma(n-1)-2} + k_1^n c_1^{n-2} \rho^{\gamma(n-2)+\beta n - 2}\Big) \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} r^{2-n} |\nabla u|^2 \, dx$$

$$+ (3\beta n)^{-1} (6k)^n \mathrm{mes}\Omega (2^{\beta n} - 2^{-2\beta n}) \rho^{\beta n}, \quad \forall \rho \in (0, \frac{d}{2}). \tag{5.4}$$

Отсюда, на основании оценки (4.32), получаем

$$\rho^{2-\lambda} \| a(\rho x, \rho^\lambda v, \rho^{\lambda-1} v_x) \|_{n, G^2_{1/4}} \le c_{16} \rho^{2-\lambda+2(\lambda-1)/n+2\gamma(n-1)/n}$$

$$+ c_{17} \rho^{(2-\lambda+\beta)+2(\lambda-1)/n+\gamma(n-2)/n} + c_{18} \rho^{\beta+2-\lambda} \quad \forall \rho \in (0, \frac{d}{2}). \tag{5.5}$$

Из (5.2), (5.3) и (5.5), с учетом неравенства $\beta > \lambda - 2$, получаем

$$\sup_{x \in G^1_{1/2}} |v(x)| \le c_{19} + c_{20} \rho^{2-\lambda+2(\lambda-1)/n+2\gamma(n-1)/n}. \tag{5.6}$$

Напомним, что $\lambda > 1$, а $\gamma > 0$ и определяется теоремой 3.

Так же, как и в случае $2 \le n < 4$, для справедливости утверждения 1 теоремы достаточно получить оценку

$$\sup_{x \in G^1_{1/2}} |v(x)| \le M_0 = const. \tag{5.7}$$

Покажем, что, повторяя процедуру получения оценки (5.6) с различными показателями γ конечное число раз, можно прийти к оценке (5.7). Итак, пусть показатель степени ρ в (5.6) отрицателен (в противном случае (5.6) означает наличие (5.7)). Из (5.6) имеем

$$|u(x)| \le c_{21} |x|^{2+2(\lambda-1)/n}, \tag{5.8}$$

а отсюда для

$$\gamma_1 = 1 + \frac{2}{n}(\lambda \quad 1) \tag{5.9$_1$}$$

получаем и неравенство

$$u(x) \qquad c_{22}\ x^{\ \gamma_1}\,. \tag{5.10$_1$}$$

Повторим процедуру получения неравенств (5.4), (5.5), применив вместо оценки (0.2) неравенство $(5.10)_1$ (т.е. заменяя γ на γ_1); в результате получим

$$\sup_{x \quad G^1_{1/2}} \ v(x\ ) \qquad c_{19} + c_{20}\rho^{2 \quad \lambda+2(\lambda \quad 1)/n+2\gamma_1(n \quad 1)/n}\,. \tag{5.6$_1$}$$

Если показатель степени ρ в этом неравенстве отрицателен, то, полагая

$$\gamma_2 = 1 + \frac{2}{n}(\lambda \quad 1) + \frac{2(n \quad 1)}{n}\gamma_1\,, \tag{5.9$_2$}$$

сначала получим неравенство

$$u(x) \qquad c_{22}\ x^{\ \gamma_2}\,, \tag{5.10$_2$}$$

а затем, повторяя вышеуказанную процедуру, и оценку

$$\sup_{x \quad G^1_{1/2}} \ v(x\ ) \qquad c_{19} + c_{20}\rho^{2 \quad \lambda+2(\lambda \quad 1)/n+2\gamma_2(n \quad 1)/n}\,. \tag{5.6$_2$}$$

Положим

$$t = \frac{2(n \quad 1)}{n} \qquad \frac{3}{2}, \qquad n \quad 4 \tag{5.11}$$

и рассмотрим числовую последовательность $\ \gamma_k\ $: γ_1 определяется равенством $(5.9)_1$; $\gamma_2 = \gamma_1(1+t)$; $\gamma_3 = \gamma_2(1+t+t^2)$;

$$\gamma_{k+1} = \gamma_1(1+t+\ldots+t^k) = \gamma_1\frac{t^{k+1} \quad 1}{t \quad 1}; k = 0, 1, \ldots\ . \tag{5.9$_k$}$$

Повторяя изложенный процесс k раз, получим оценку

$$\sup_{x \quad G^1_{1/2}} \ v(x\ ) \qquad c_{19} + c_{20}\rho^{1 \quad \lambda+\gamma_{k+1}}, \quad \rho \quad (0, \frac{d}{2})\,. \tag{5.6$_k$}$$

Покажем, что для $\ n \quad 4$ найдется такое целое k, что

$$1 \quad \lambda + \gamma_{k+1} \quad 0\,. \tag{5.12}$$

Из $(5.9)_k$ и $(5.9)_1$ имеем

$$1 \quad \lambda + \gamma_{k+1} = \frac{t^{k+1} \quad 1}{t \quad 1} + \frac{\lambda \quad 1}{n(t \quad 1)}(2t^{k+1} \quad 2 \quad nt + n)\,.$$

Первое слагаемое справа положительно. Для второго слагаемого из (5.11) следует

$$2t^{k+1} \quad 2 \quad nt + n = 2^{k+2}(1 \quad 1/n)^{k+1} \quad n \quad 0\,,$$

если $(2n \quad 2)/n \;\; ^{k+1} \quad n/2$ или $k{+}1 \quad \ln\frac{n}{2} \; \ln 2(n \quad 1)/n \quad ^{1}$. Отсюда получаем, что (5.12) справедливо для $k = \left[\frac{\ln n/2}{\ln(2n \quad 2)/n}\right]$, $n \quad 4$, где $[a]$ – целая часть a. Этим утверждение 1 теоремы доказано.

Обратимся к доказательству утверждения 3 теоремы. Возвращаясь к переменным x, u, перепишем неравенство (5.1), заменяя ρ на $2 \;\; ^{k}\rho$, а затем просуммируем все неравенства по $k = 0, 1, \ldots$. В результате получаем неравенство

$$u \;\; {}^{q}_{V^2_{q,0}(G^\rho_0)} \quad c_3 \iint\limits_{G^{2\rho}_0} \Big(\; a(x,u,u_x) \;\; ^{q} + r \quad ^{2q} \; u \;\; ^{q} \Big) \, dx, \qquad q > 1\,.$$

Учитывая предположение (В) и доказанные оценки утверждения 1, получаем

$$u \;\; _{V^2_{q,0}(G^\rho_0)} \quad \bar c_3(c_3, \bar c_0, \bar c_1, \mu_1, k_1, q, \lambda)\rho^{\lambda \quad 2+n/q}\,, \tag{5.13}$$

если $n + (\lambda \quad 2)q > 0$ (здесь учтено также, что по условию теоремы $\beta > \lambda \quad 2 > \quad 1$). Из (5.13) следует утверждение 3 теоремы.

Наконец, из неравенства (3.3) на основании оценок утверждений 1 и 3 получаем неравенство (3.9) при $\gamma = \lambda \quad 1$. Дословно повторяя доказательство теоремы 3, получаем справедливость утверждения 4. Этим доказательство теоремы 5.1 закончено.

6. Разрешимость задачи (КЛ)

Включим задачу (КЛ) в однопараметрическое семейство задач

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + ta(x,u,u_x) = 0, \;\; x \quad G, \\ u(x) = t\varphi(x), \quad t \quad [0,1], \;\; x \quad \partial G. \end{cases} \tag{КЛ$_t$}$$

Относительно задачи (КЛ) предполагаем, что выполнены условия (С), (АА), (А)–(Г). Кроме того, будем еще предполагать:

(Д) *для всякого решения $u_t(x)$ задачи* (КЛ)$_t$ *известна величина* $M_0 = \sup_{x \;\; \bar G} \; u_t(x) \quad t \quad [0,1]$;

(ВВ) *существует неотрицательное число k_2 такое, что*

$$b(x) + f(x) + \;\; \Phi_{xx}(x) \quad k_2 d^{\lambda \quad 2}(x), \quad x \quad G_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0\,;$$

(Е) *существуют неотрицательные числа k_3, k_4 и $s > \lambda$ такие, что*

$$\varphi \;\; _{W_2^{3/2} \;\; n(\Gamma^\rho_0)} \quad k_3\rho^s, \quad \rho \quad (0, r_0)\,;$$

$$\varphi \quad {}_{V^{2\quad 1/q}_{q,0}(\Gamma^{\rho}_{\rho/2})} \quad k_4\rho^{\lambda \quad 2+n/q}, \quad \rho \quad (0, r_0)\,.$$

Теорема 6.1. *Пусть* Γ_{r_0} $W^{2,p}$, $\varphi(x)$ $V^{2\quad 1/p}_{p,0}(\partial G)$, $p > n$, *и выполнены предположения (С), (АА), (А)–(Д) при* $q = p$. *Тогда, если либо* λ 2, *либо* $1 < \lambda < 2$, $n < p < \frac{n}{2\quad\lambda}$, *то задача* $(\text{КЛ})_t$ *имеет по крайней мере одно решение* $u_t(x)$ $V^2_{p,0}(G)$ *при любом* t $[0,1]$.

Теорема 6.2. *Пусть заданы числа* λ $(1,2)$, p $(n, n/(2 \quad \lambda))$, $\beta > \lambda \quad 2$, q $\frac{n}{2\quad\lambda}$. *Пусть* Γ_{r_0} $W^{2,p}$, $\varphi(x)$ $W^{3/2}_{2\quad n}(\partial G)$ $V^{2\quad 1/q}_{q,0}(\partial G)$ *и выполнены предположения (С), (АА), (А)–(Е), (ВВ). Тогда задача* $(\text{КЛ})_t$ *имеет по крайней мере одно решение* $u_t(x)$ $W^{2,q}_{loc}(G)$ $V^2_{p,0}(G)$ $C^{\lambda}(\bar G)$ *при любом* t $[0,1]$.

Доказательство теорем 6.1, 6.2. Вначале устанавливаем, что для некоторого γ $(0,1)$ и всех t $[0,1]$ любое решение $u_t(x)$ $W^{2,q}_{loc}(G)$ $C^0(\bar G)$, удовлетворяет неравенству

$$u_t(x) \quad {}_{1+\gamma,\bar G} < K \tag{6.1}$$

с постоянной K, не зависящей от t. Представим $G = G_0^{r_0}$ G_{r_0} с некоторым достаточно малым положительным r_0. Из теоремы 3 следует, что при сделанных нами предположениях существуют такие положительные числа r_0 и γ_0, что $u_t(x)$ $C^{1+\gamma}(\overline{G_0^{r_0}})$, и в $\overline{G_0^{r_0}}$ выполняется оценка (6.1) с γ $(0,\gamma\ ]$, $\gamma\ = \min(\gamma_0; \beta+1; 1 \quad n/q)$. Принадлежность $u_t(x)$ $C^{1+\gamma}(\overline{G_{r_0}})$ и соответствующая априорная оценка следуют из локальных оценок вблизи гладкого куска границы, установленных в [8–11] при сделанных нами предположениях. Гладкость решения строго внутри области G следует из теоремы Соболева–Кондрашова. Таким образом, устанавливается принадлежность $u_t(x)$ $C^{1+\gamma}(\bar G)$ и априорная оценка (6.1). Наличие оценки (6.1) позволяет применить теорему Лерэ–Шаудера о неподвижной точке. Для этого зафиксируем γ $(0,\gamma\ ]$ и рассмотрим банахово пространство $= C^{1+\gamma}(\bar G)$ (для теоремы 6.1) или $C_0^{1+\gamma}(\bar G) =$ v $C^{1+\gamma}(\bar G)$ $v(0) =$ $v(0) = 0$ (для теоремы 6.2). Определим оператор , полагая $u_t = t$ v как единственное решение в пространстве $V^2_{p,0}(G)$ (теорема 6.1) или в пространстве $W^{2,q}_{loc}(G)$ $V^2_{p,0}(G)$ $C^{\lambda}(\bar G)$ (теорема 6.2) для любой v линейной задачи

$$\begin{cases} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} = A_t(x), & x \quad G, \\ u(x) = t\varphi(x), & x \quad \partial G, \end{cases} \tag{Л$_t$}$$

где $a^{ij}(x) = a_{ij}(x, v(x), v_x(x))$; $A_t(x) = \quad ta(x, v(x), v_x(x))$. Это решение существует согласно теореме 2.1 (соответственно теореме 2.2). Нетрудно проверить, что все условия этих теорем выполнены. Ясно, что разрешимость задачи $(\text{КЛ})_t$ в соответствующем пространстве эквивалентна разрешимости уравнения $u_t = t\ \ v$ в банаховом пространстве . Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что выполнены все условия теоремы Лерэ–Шаудера, обеспечивающие существование неподвижной точки отображения .

Список литературы

[1] *В.А. Кондратьев*, Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. мат. о-ва (1967), т. 16, с. 209–292.

[2] *В.А. Кондратьев, О.А. Олейник*, Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. — Успехи мат. наук (1983), т. 38, № 2, с. 4–76.

[3] *С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский*, Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. Наука, Москва (1991).

[4] *И.И. Данилюк*, Задача Дирихле для двумерного квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа. — Докл. АН УССР. Сер. А (1987), № 12, с. 3–7.

[5] *М.В. Борсук*, Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы. — Мат. сб. (1991), т. 182, № 10, с. 1446–1462.

[6] *М.В. Борсук*, Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки. — Алгебра и анализ (1991), т. 3, № 6, с. 85–107.

[7] *М.В. Борсук*, Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы. — Дифф. уравнения (1994), т. 30, № 1, с. 104–108.

[8] *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева*, Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова (1988), т. 179. Краевые задачи математической физики, вып. 13, с. 102–125.

[9] *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева*, Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго поряллка, имеющих неограниченные особенности. — Успехи мат. наук (1986), т. 41, № 5, с. 59–83.

[10] *H.O. Cordes*, Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differential – gleichungen zweiter Ordung in mehr als zwei Variablen. — Math. Ann. (1956), Bd. 131, S. 278–312. (Х.О. Кордес, Математика, Сб. переводов, т. 3, № 2 (1959), с. 75–107.)

[11] *G.M. Lieberman*, The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continiously differentiable boyndary data. — Comm. Partial Diff. Equations (1986), v. 11, No. 2, p. 167–229.

[12] *Р. Курант, Д. Гильберт*, Методы математической физики. Гостехиздат, Москва–Ленинград (1933).

[13] *М.В. Борсук*, Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки. — Сиб. мат. журн. (1990), т. 31, № 6, с. 25–38.

[14] *К.О. Видман (K.O. Widman)*, Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. — Math. Scand. (1967) , v. 21, No. 2, p. 17–37.

[15] *Г.М. Вержбинский, В.Г. Мазья*, О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками. — Изв. вузов. Математика (1974), № 6, с. 8–19.

[16] *Д. Гилбарг, Н. Трудингер*, Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, Москва (1989).

[17] *В.Г. Мазья*, Пространства С.Л. Соболева. Изд-во ЛГУ, Ленинград (1985).

[18] *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг*, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. Изд-во Иностр. лит., Москва (1962).

On the solvability of the first value problem for elliptic second order equations in a domain with a conical point on the boundary

M.V. Borsuk

It have investigated solvability of the Dirichlet problem for second order linear and qyasilinear uniformly elliptic nondivergent equations in a bounded domain whose boundary contains angular or conical points.

Про розв'язність першої крайової задачі для еліптичних рівнянь другого порядку в області з конічною точкою на межі

М.В. Борсук

Досліджено розв'язність задачі Діріхле для лінійних та квазілінійних рівномірно еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку в обмеженій області, межа якої містить кутові або конічні точки.