Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 4, с. 453–457

Спектральные разложения корреляционных функций некоторых случайных полей

С.М. Загороднюк

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 10 августа 1995 года,
после переработки – 21 января 1996 года

Получены спектральные представления для корреляционных функций двумерных случайных полей, порождаемых алгеброй Ли линейных операторов A_1, A_2 $([A_1, A_2] = iA_2)$.

Известно, что стационарные кривые и поля имеют разложение по экспонентам – элементарным гармоникам, порождаемое алгеброй коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$x(t_1, \ldots, t_k) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{k} A_j t_j\right) x_0 \, .$$

Продифференцировав по t_j, $j = \overline{1,k}$, придем к системе дифференциальных уравнений, которой определяется $x(t)$:

$$\begin{aligned} &\partial x/\partial t_1 = iA_1 x \, , \\ &\ldots \\ &\partial x/\partial t_k = iA_k x \, . \end{aligned}$$

В работе рассмотрен случай двумерного поля, в том случае, когда операторы A_1, A_2 не являются перестановочными, а образуют алгебру Ли: $[A_1, A_2] = iA_2$. Получено спектральное разложение такого поля по элементарным составляющим. Указаны некоторые свойства таких полей, в частности, сохранение нормы вдоль поля, стационарность сужений на прямые $t_2 = kt_1$ и др.

1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим кривую $x(t)$ в H, допускающую следующее представление:

$$x(t) = e^{itA}x_0, \quad x_0 \in H\,, \tag{1}$$

где A – линейный, плотно заданный оператор в H, $t \in R$.

Определение. *Функцию* $K(t,s) = \langle x(t), x(s)\rangle$ *назовем корреляционной функцией кривой* (1).

Условие (1), как легко видеть, эквивалентно следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

где производная $\dot{x}(t)$ понимается в смысле сильной топологии.

Предположим, что корреляционная функция кривой (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) K(t,s) = 0\,, \tag{3}$$

тогда можно показать, что $A = A^*$. В этом случае для $K(t,s)$ имеется спектральное разложение, которое принято называть теоремой Бохнера–Хинчина:

$$K(t,s) = \int\limits_R e^{i\lambda(t-s)}\langle dE_\lambda x_0, x_0\rangle\,,$$

где E_λ – ортогональное разложение единицы оператора A.

2. Перейдем к рассмотрению функции двух переменных (далее называемой полем) $x(t_1,t_2) \in H$, $t_k \in D_k$, D_k – открытое множество в R, $k = 1,2$. Будем считать, что поле $x(t_1,t_2)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \partial_1(t)x(t_1,t_2) = iA_1x(t_1,t_2), \\ \partial_2(t)x(t_1,t_2) = iA_2x(t_1,t_2), \end{cases} \tag{4}$$

где $\partial_k(t)$ – дифференциальные операторы 1-го порядка с гладкими коэффициентами, т.е. $\partial_k(t) = a_k(t)\partial_{t_1} + b_k(t)\partial_{t_2}$, где $a_k(t)$, $b_k(t) \in C^1(D_1 \times D_2)$, $k = 1,2$, $t = (t_1,t_2)$, A_k – линейные, плотно заданные операторы в H.

Система (4) является аналогом условий (1), (2).

По аналогии, корреляционную функцию поля $x(t)$ определим равенством $K(t,s) = \langle x(t), x(s)\rangle$, $t = (t_1,t_2)$, $s = (s_1,s_2)$. Далее будем налагать на корреляционную функцию поля (4) следующие условия в терминах дифференциальных уравнений в частных производных (аналог (3)):

$$(\partial_1(t) + \partial_1(s))K(t,s) = 0, \quad (\partial_2(t) + \partial_2(s))K(t,s) = 0\,. \tag{5}$$

Используя это обстоятельство, обеспечивающее самосопряженность A_i, $i = \overline{1,2}$, получим спектральное представление для $K(t,s)$.

Следующую теорему будем называть теоремой Бохнера–Хинчина для двумерных полей:

Теорема. *Пусть поле* $x(t_1,t_2)$ *удовлетворяет системе (4), где* $\partial_k(t) = \partial_{t_k}$, $t_k \quad R$, $k = 1,2$; $x(0,0) = x_0$. *Если корреляционная функция поля* $K(t,s)$ *такова, что*

$$[\partial_{t_k} + \partial_{s_k}]\, K(t,s) = 0, \quad k = 1,2\,,$$

тогда $A_k = A_k$, $k = 1,2$, *а поле* $x(t)$ *и корреляционная функция имеют вид*

$$x(t_1,t_2) = \iint_{R^2} e^{i(t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2)} dE_{\lambda_1} dE_{\lambda_2} x_0\,,$$

$$K(t,s) = \iint_{R^2} e^{((t_1 \quad s_1)\lambda_1 + (t_2 \quad s_2)\lambda_2)}\ dE_{\lambda_1} dE_{\lambda_2} x_0, x_0 \quad ,$$

где E_{λ_k}, $k = 1,2$ – *ортогональные разложения единицы операторов* A_k.

Заметим, что совместность системы (4) в этом случае влечет перестановочность операторов A_k, $k = 1,2$ (в смысле перестановочности резольвент). Условие совместности (4) можно также записать в форме дифференциальных уравнений для $K(t,s)$:

$$[\partial_{t_1}, \partial_{t_2}]K(t,s) = 0, [\partial_{s_1}, \partial_{s_2}]K(t,s) = 0\,.$$

3. Основным результатом данной работы является следующая теорема, которая обобщает результат п. 2 на случай, когда A_k , $k = 1,2$, образуют алгебру Ли с коммутационным соотношением $[A_1, A_2] = iA_2$ (в каком смысле понимается коммутатор, см., например, [1]).

Теорема. *Пусть поле* $x(t_1,t_2)$ *удовлетворяет системе (4), где* $\partial_1(t) = t_2\partial_{t_2}$, $\partial_2(t) = t_2\partial_{t_1}$, $t_1 \quad R$, $t_2 > 0$; $x(0,1) = x_0$. *Если корреляционная функция поля* $K(t,s)$ *такова, что*

$$[t_2\partial_{t_2} + s_2\partial_{s_2}]K(t,s) = 0, \quad [t_2\partial_{t_1} + s_2\partial_{s_1}]K(t,s) = 0\,,$$

тогда $A_k = A_k$, $k = 1,2$, *а поле* $x(t)$ *и корреляционная функция могут быть представлены как*

$$x(t_1,t_2) = \int_R e^{\quad i\lambda \ln t_2} dE_\lambda \tilde{x}_1 + e^{it_1\lambda}\tilde{x}_2(t_2\lambda)\,,$$

$$K(t,s) = \int_R e^{\quad i\lambda \ln(s_2/t_2)}\ dE_\lambda \tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \ + \ e^{i\lambda(t_1 \quad s_1)/s_2}\tilde{x}_2(t_2\lambda/s_2), \tilde{x}_2 \quad ,$$

здесь $Ux_0 = \tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. *Оператор* U *унитарно отображает* H *в модельное пространство* $\tilde{H} = R \quad M$, *где* $R = \mathrm{Ker} A_2 = \quad h \quad H : A_2 h = 0 \ $, $M = l^2 \quad L^2_R(d\lambda/\ \lambda\ )$, $\tilde{x}_1 \quad R$, $\tilde{x}_2 \quad M$, E_λ – *ортогональное разложение единицы оператора* A_1.

З а м е ч а н и е. Выбор дифференциальных операторов $\partial_k(t)$ обусловлен тем, что векторные поля $\partial_k(t)$ образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли линейных операторов $\ A_1, A_2\ $.

Следствие. *Для поля, указанного в условии теоремы* $\ x(t)\ = \mathrm{const}$, $t = (t_1, t_2)$, $t_1 \quad R$, $t_2 > 0$.

Доказательство теоремы основано на следующих двух свойствах алгебры Ли операторов $[A_1, A_2] = iA_2$:

$$e^{i(A_1+nA_2)y} = e^{iA_2(1 \quad e \quad y)n} \quad e^{iA_1 y}, \qquad n, y \quad R,$$

$$e^{iA_2 t_1} \quad e^{\quad iA_1 t_2} = e^{\quad (A_1+t_1A_2)t_2} \quad e^{iA_2 t_1}, \qquad t_1, t_2 \quad R,$$

с помощью которых строится унитарное представление группы линейных преобразований прямой [2]. Используя вид унитарного представления, который известен из работы Гельфанда, Наймарка [3], получаем модели для A_k, $k = 1, 2$, соответствующих однопараметрических полугрупп и корреляционной функции $K(t, s)$.

Если положить $t_1 = t$, $t_2 = \ \vec{r}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$, то поле, описанное в последней теореме, есть нестационарное изотропное поле $u(t_1, t_2) = u(t, \ \vec{r}\ )$, которое следует изучать методами теории поля [4]. К примеру, можно попытаться найти плотность функции Лагранжа $L(t, \ \vec{r}\ )$ этого бесконечномерного поля. (За исключением случая нильпотентности оператора A_1, необходимо $\dim H = \quad$.)

С другой стороны, заметим, что если разрешить дифференциальные уравнения для $K(t, s)$, указанные в последней теореме, получим

$$K(t_1, t_2, s_1, s_2) = K\left(t_1 \quad \frac{t_2 s_1}{s_2}, \frac{t_2}{s_2}\right)$$

или, после выбора параметризации $t_2 = e^{\hat{t}_2}$, $s_2 = e^{\hat{s}_2}$, $t_1 = \hat{t}_1$, $s_1 = \hat{s}_1$:

$$K(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{s}_1, \hat{s}_2) = K\left(\hat{t}_1 \quad e^{\hat{t}_2 \quad \hat{s}_2}, \hat{t}_2 \quad \hat{s}_2\right). \qquad (\ )$$

Таким образом, указанная теорема дает ответ на вопрос об общем виде положительно определенного ядра $K(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{s}_1, \hat{s}_2)$, обладающего свойством (*).

Список литературы

[1] *В.А. Золотарев*, Схема рассеяния Лакса–Филлипса на группах и функциональная модель алгебры Ли. — Мат. сб. (1992), т. 183, № 5, с. 119–120.

[2] *Н.Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представления групп. Москва, Наука (1991).

[3] *И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк*, Унитарные представления группы линейных преобразований прямой. — ДАН СССР (1947), т. 55, с. 571–574.

[4] *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей. Москва, Наука (1984).

Spectral resolutions for correlation functions of some stochastic fields

S.M. Zagorodnyuk

The spectral resolutions for correlation functions of 2-dimensional stochastic fields, corresponding to the Lie algebra of the linear operators A_1, A_2 $([A_1, A_2] = iA_2)$ are obtained.

Спектральні розкладання корреляційних функцій деяких випадкових полів

С.М. Загороднюк

Одержано спектральні представлення для корреляційних функцій двомірних випадкових полів, які породжені алгеброю Лі лінійних операторів A_1, A_2 $([A_1, A_2] = iA_2)$.