Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 4, с. 472–490

CR-функции и голоморфные почти периодические функции с целым конечным базисом

Л.И. Ронкин

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: ronkin@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 23 декабря 1996 года

Для голоморфной почти периодической функции многих переменных с целым конечным базисом вводится понятие порождающей функции. Показано, что множество порождающих функций, отвечающих фиксированному базису, совпадает с множеством всех непрерывных CR-функций на некотором поликруговом CR-многообразии, которое зависит лишь от выбора базиса. Получено аналитическое представление CR-функций на этом многообразии.

В [1, 2] для почти периодических функций (п.п.ф.) на оси было введено понятие пространственного расширения. Это понятие оказалось весьма полезным, особенно при исследовании голоморфных п.п.ф. (см. [3, 4]).В настоящей статье вводится понятие пространственного расширения для п.п.ф. многих переменных, имеющих целый конечный базис. Показано,что каждой такой функции отвечает некоторое поликруговое CR-многообрзие G и непрерывная на нем функция Q, в определенном смысле, порождающая пространственное расширение исходной функции $f(z)$. При этом обнаружено отличие случая функций многих переменных от случая функий одного переменного. Установлена связь между голоморфностью п.п.ф. $f(z)$ и принадлежностью порождающей функции классу CR-функций на G. Полученные в этом направлении результаты использованы для построения так называемого аналитического представления CR-функций на G.

1. Введем необходимые понятия и обозначения. Прежде всего условимся о некоторых сокращениях при работе с векторами.

О CR-многообразиях и CR-функциях см., например, [5, 6].

Если $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, то мы полагаем: $ab = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, $a/b = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $|a| = (|a_1|, \ldots, |a_n|)$, $\|a\| = \max\{|a_j| : j = 1, \ldots, n\}$, $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, $e^a = \exp\{a\} = (e^{a_1}, \ldots, e^{a_n})$, $\ln a = (\ln a_1, \ldots, \ln a_n)$, $a^b = a_1^{b_1}, \ldots, a_n^{b_n}$. Отметим, что в зависимости от ситуации фигурирующие в работе векторы могут рассматриваться и как вектор-строки, и как вектор-столбцы.

Напомним определение п.п.ф. в трубчатой области (см.[7, 8] в случае $n = 1$ и [9, 10] при $n > 1$).

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ и $T_S = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in S\}$. Всюду далее B – выпуклая область, а S – компактное подмножество в B. Для $f \in C(T_B)$ положим

$$\|f\|_S = \sup\{|f(z)| : z \in T_S\}.$$

Обозначим

$$E_\varepsilon(f, S) = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \|f(z+\tau) - f(z)\|_S < \varepsilon\}.$$

Определение 1. *Функция $f \in C(T_B)$ называется п.п.ф. на T_S, если множество $E_\varepsilon(f, S)$ при любом $\varepsilon > 0$ относительно плотно в $\mathbb{R}^n$, т.е. удовлетворяет условию*

$$\exists L > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \{|x - x_0| < L\} \cap E_\varepsilon(f, S) \neq \emptyset, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 2. *Функция $f \in C(T_B)$ называется п.п.ф. в области T_B, если она почти периодична на T_S, $\forall S \Subset B$.*

Для каждой п.п.ф. $f(z)$ в T_B существует предел

$$M(y : f) = \lim_{l \to \infty} \int_{|x| < l} f(z)\, dx .$$

Этот предел является непрерывной функцией от y. Множество Λ_f тех $\lambda \in \mathbb{R}^n$, для которых функция

$$a_\lambda(y; f) := M(y : f(z) e^{-i\langle \lambda, x\rangle}) \not\equiv 0 ,$$

не более чем счетно. Это множество называется спектром функции $f(z)$. Каждой п.п.ф. $f(z)$ отвечает ее ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a_\lambda(y) e^{i\langle \lambda, z\rangle} .$$

Говорят, что $f(z)$ (или Λ_f) имеет целый конечный базис, если существуют векторы $\mu_1 \in \mathbb{R}^n$, ... $\mu_n \in \mathbb{R}^n$, которые линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$ и таковы, что любой вектор $\lambda \in \Lambda_f$ представим в виде

$$\lambda = k_1 \mu_1 + \ldots + k_N \mu_N, \quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, N .$$

Обозначив через μ матрицу со строками $\mu_1, \ldots, \mu_N$, перепишем последнее равенство в виде $\lambda = k\mu$.

2. Спектру Λ_f с целым конечным базисом $\mu_1, \ldots, \mu_N$ поставим в соответствие некоторое специальное многообразие, которое, на наш взгляд, представляется вполне естественным и позволяет дать новую трактовку понятия пространственного расширения п.п.ф. .

Положим $G_\mu = \quad w \quad \mathbb{C}^N : \ln \; w \; = \quad \mu y, y \quad B$, где матрица μ та же, что и прежде. Положим также $G_{\mu,B} = \quad w \quad \mathbb{C}^n : \ln \; w \; = \quad \mu y, y \quad B$. Ввиду линейной независимости над $\mathbb{Q}$, или,что то же самое, над $\mathbb{Z}$ векторов $\mu_1, \ldots, \mu_N$, образ области T_B при отображении $w = e^{i\mu z}$, как следует из многомерного варианта теоремы Кронекера о намотке тора, плотен на $G_{\mu,B}$.

Пусть $\Omega \quad \mathbb{C}^N$. Обозначим

$$\Omega \; = \; r \quad \mathbb{R}^N_+ : r = \; w \; , w \quad \Omega \; , \quad \ln \; w \; = \; t \quad \mathbb{R}^N ; t = \ln \; w \; , w \quad \Omega$$

(напомним, что согласно принятым обозначениям $w \; = (\; w_1 \; , \ldots , \; w_N \;))$.

Назовем отображение $\ln \; w \; = \quad \mu y, \; y \quad B$, представляющим многообразие $\ln \; G_{\mu,B}$ в $\mathbb{R}^N$, или, что эквивалентно, многообразие $G_{\mu,B}$ в $\mathbb{C}^N$. Заметим, что это отображение в $\mathbb{R}^N$ при $n > 1$ может не быть биекцией, поскольку матрица μ не обязана быть матрицей максимального ранга. Это создает определенные неудобства, которые легко преодолеваются следующим образом .

Пусть κ – ранг матрицы μ и пусть $\kappa < n$, что, конечно, предполагает $n > 1$. Не нарушая, общности можно считать, что первые κ столбцов матрицы μ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Тогда оставшиеся $n \quad \kappa$ столбцов будут их линейными комбинациями. Обозначим матрицу, образованную первыми κ столбцами, через μ , а оставшимися – через μ . Тогда $\mu \quad = \mu \, \Gamma$, где Γ – вещественная $\kappa \quad (n \quad \kappa)$-матрица. Положим, далее, $y = (y_1, \ldots, y_\kappa)$ и $y \; = (y_{\kappa+1}, \ldots, y_N)$. Тогда $\mu y = \mu \, y \; + \mu \; y \; = \mu \, (y \; + \Gamma y \;)$ и, таким образом,

$$t \quad \mathbb{R}^N : t = \mu y, y \quad B \; = \; t \quad \mathbb{R}^N : t = \mu \, \xi, \xi \quad B \quad ,$$

где

$$B \; = \; \xi \quad \mathbb{R}^\kappa : \xi = y \; + \Gamma y \; , y \quad B \; .$$

Соответственно,

$$G_{\mu,B} = G_{\mu \;, B} \; = \; w \quad \mathbb{C}^N : \ln \; w \; = \quad \mu \, \xi, \xi \quad B \quad , \tag{1}$$

причем соответствие $B \quad \xi \qquad \mu \, \xi = \ln \; w \quad \ln \; G_{\mu,B} \; = \ln \; G_{\mu \;, B}$ является биекцией. Полученное таким образом представление $\ln \; G_{\mu,B}$ (многообразия $G_{\mu,B}$) будем называть приведенным. Оно удобно тем,что с его помощью можно совершить такую биголоморфную замену переменных, что локально $G_{\mu,B}$ представится как прямое произведение области в $\mathbb{C}^\kappa$ на область в

$(N \quad \kappa)$-мерном торе из пространства $\mathbb{C}^{N \quad \kappa}$. Чтобы убедиться в этом, матрицу, образованную первыми κ строками матрицы μ , обозначим через μ_1, а матрицу, образованную остальными N-κ строками обозначим через μ_2.

Не нарушая общности, предполагаем $\det \mu_1 = 0$. Рассмотрим затем какую-либо точку $w_0 \quad G_{\mu,B}$ и какую-либо ее шаровую окрестность $\omega \quad (\mathbb{C} \quad 0\ )^N$. Произвольную точку $w \quad \omega$ представим в виде $w = (w\ , w\ )$, где $w \quad \mathbb{C}^\kappa$, $w \quad \mathbb{C}^{N \quad \kappa}$. Положим $w\ = e^{i\mu_1 z}\ , z \quad \mathbb{C}^\kappa$, $w\ = e^{i\mu_2 z}\,\zeta, \zeta \quad \mathbb{C}^{N \quad \kappa}$. Ввиду сказанного о матрицах μ_1, μ_2 и окрестности ω отображение $\alpha_{w_0} \colon (z\ , \zeta) \quad (w\ , w\ )$ является биголоморфным в каждой достаточно малой окрестности ω каждой точки (z_0, ζ_0), удовлетворяющей условию $\alpha_{w_0}(z_0, \zeta_0) = w^0$. Обратное отображение $\alpha \quad ^1$ задается равенствами

$$z\ = \frac{1}{i}(\mu_1) \quad ^1 \ln w\ , \quad \zeta = \frac{w}{\exp \quad \mu_2(\mu_1) \quad ^1 \ln w} \,, \tag{2}$$

где однозначные ветви $\ln w_j$ определяются выбором точки (z_0, ζ_0). Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_{w_0}(\omega\ ) = \omega$. Положим $\Delta = \quad \zeta \quad \mathbb{C}^{N \quad \kappa} :$ $\zeta_1 \quad = 1, \ldots, \zeta_{N \quad \kappa} \quad = 1$. Из соотношений (2) и определения многообразий $G_{\mu,B}$, T_B , Δ следует, что

$$\alpha_{w_0}^{\quad 1}(\omega \quad G_{\mu,B}) = \quad (z\ , \zeta) : (z\ , \zeta) \quad \alpha_{w_0}^{\quad 1}(\omega\ ), z \quad T_B\ , \zeta \quad \Delta \quad .$$

Переходя к диаграмме Рейнхардта, получаем

$$\ln G_{\mu,B} \;=\; r = (r\ , r\ ) \quad \mathbb{R}^\kappa \quad \mathbb{R}^{N \quad \kappa} : \ln r \quad (\quad \mu_1 B\ ), \ln r\ = \mu_2(\mu_1) \quad ^1 \ln r \quad .$$

В дальнейшем для упрощения записи всюду, специально того не оговаривая, предполагаем, что $\kappa = n$, т.е. что матрица μ имеет максимальный ранг и, стало быть, $\mu\ = \mu$, $B\ = B$. Из сказанного выше о существовании приведенного представления любого многообразия $G_{\mu,B}$ следует, что это предположение не нарушает общности.

3. Введем понятие пространственного расширения и порождающей его функции.

Вначале рассмотрим случай произвольной, т.е., вообще говоря, не голоморфной п.п.ф. $f(z)$ в трубчатой области T_B. Для каждой такой функции $f(z)$ найдется [9] последовательность конечных экспоненциальных сумм (квазиполиномов) вида

$$P^{(j)}(z) = \sum_\lambda a_\lambda(y; f)\alpha_\lambda^{(j)} e^{i \quad \lambda, x} \,, \quad \lambda \quad \Lambda_f, \quad \alpha_\lambda^{(j)} \quad \mathbb{C}, \tag{3}$$

таких, что

$$\lim_{j} \quad P^{(j)}(z) \quad f(z) \quad _S = 0, \qquad S \qquad B\,.$$

При этом конечные (по λ) наборы чисел $\alpha_\lambda^{(j)}$ зависят только от спектра функции f (см. [9]). Если, как прежде, $\mu_1, \ldots, \mu_N$ – целый базис Λ_f и, стало быть, каждая точка $\lambda \quad \Lambda_f$ единственным образом представима в виде $\lambda = k\mu$, $k \quad \mathbb{Z}^N$, то

$$P^{(j)}(z) = \sum_k \alpha_\lambda^{(j)} a_\lambda(y : f) e^{i \ k;\mu x} \ = F^{(j)}(y,t) \ {}_{t=\mu x}\,,$$

где

$$F^{(j)}(y,t) = \sum_{\substack{k \quad \mathbb{Z}^N \\ k \ < d_j}} c_k^{(j)}(y) e^{i \ k,t} \ , \quad t \quad \mathbb{R}^N, \quad y \quad B\,,$$

коэффициенты $c_k^{(j)}(y)$ равны либо $\alpha_\lambda^{(j)} a_\lambda(y; f)$ с соответствущим λ, либо нулю, $d_j := \max \quad k \ : c_k^{(j)}(y) = 0$. Ясно, что равномерная сходимость на T_S функций $P^{(j)}(z)$ влечет равномерную сходимость функций $F^{(j)}(y,t)$ на множестве $Y = \ (y,t) : y \quad B, t = \mu x, x \quad \mathbb{R}^N$. Функции $F_j(y,t)$ равномерно непрерывны на компактных подмножествах области $B \quad \mathbb{R}^N$ и периодичны с периодом 2π по каждой из координат t_j вектора $t = (t_1, \ldots, t_N)$. Поэтому из их равномерной сходимости на множестве Y следует равномерная сходимость этих функций на замыканиях множеств вида $(y,t) : y \quad B^0, t = \mu x, x \quad \mathbb{R}^N$, $B^0 \qquad B$. По упомянутой ранее теореме Кронекера такими замыканиями являются, соответственно, множества $B^0 \quad \mathbb{R}^N$. Следовательно,

$$\lim_j \ F^{(j)}(y,t) = \Phi_{\mu,f}(y,t), \qquad y \quad B, \quad t \quad \mathbb{R}^N.$$

Полученная таким образом функция $\Phi_{\mu,f}(y,t)$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $\Phi_{\mu,f}(y,t) \quad C(B \quad \mathbb{R}^N)$;

2) функция $\Phi_{\mu,f}(y,t)$ периодична с периодом 2π по каждой координате t_j;

3) $\Phi_{\mu,f}(y, \mu x) = f(z)$

Очевидно также, что указанными свойствами функция $\Phi_{\mu,f}$ единственным образом определяется по функции $f(z)$ и матрице μ. В случае п.п.ф. на оси такая функция была введена в [1] (см. также [2, 3]) и названа пространственным расширением исходной функции $f(x)$, $x \quad \mathbb{R}$. Подобным же образом в [3] было введено понятие пространственного расширения голоморфной п.п.ф. в полосе. Заметим, однако, что и в одномерном случае понятие пространственного расширения допускает новую трактовку, существенно использующую введенное выше многообразие $G_{\mu,B}$. Чтобы дать эту трактовку (для произвольного n), прежде всего укажем на следующее свойство коэффициентов Фурье $a_\lambda(y; f)$ в случае голоморфности функции $f(z)$, $z \quad T_B$.

Предложение 1. *Для того чтобы в области T_B п.п.ф. $f(z)$ была голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы величина*

$$c_\lambda(f) := a_\lambda(y; f)e^{\ \lambda,y} \tag{4}$$

не зависела от y.

В части необходимости это утверждение получается путем стандартного использования интегрирования по границе прямоугольника (по каждой переменной в отдельности) с последующим устремлением к бесконечности соответствующих его сторон. Достаточность следует из того, что предположение (4) влечет за собой голоморфность аппроксимирующих полиномов $P^{(j)}(z)$ (см.(3)), а значит, и самой функции $f(z)$.

Соотношение (4) и предполагаемое наличие базиса $\mu_1, \dots, \mu_N$ позволяет записать квазиполиномы $P^{(j)}(z)$ в виде

$$P^{(j)}(z) = \sum_\lambda \alpha_\lambda^{(j)} c_\lambda(f) e^{\ \lambda,z}$$

$$= \sum_{k \ \ < d_j} c_{k,j}(f) e^{i \ \lambda,\mu z} \ ,$$

где $c_{k,j}(f)$ – соответствующие константы.

Обозначим

$$Q^{(j)}(w) = \sum_{k \ \ \mathbb{Z}^n, \ k \ \ < d_j} c_{k,j}(f) w^k \,.$$

Тогда

$$P^{(j)}(z) = Q^{(j)}(w) \ _{w=e^{i\mu z}} \,.$$

Поскольку, как уже отмечалось, множество $w \quad \mathbb{C}^N : w = e^{i\mu z}, z \quad T_B$ плотно на $G_{\mu B}$, то из сходимости квазиполиномов $P^{(j)}(z)$ следует сходимость функций $Q^{(j)}(w)$ к некоторой непрерывной функции $Q(w) = Q_{\mu,B}(w)$. Ясно, что $Q(w) \ _{w=e^{i\mu z}} = f(z)$. Положим

$$F_{\mu,f}(z,t) = Q_{\mu,f}(e^{i(\mu z + t)}) \,.$$

Эту функцию, следуя [3], где рассматривался случай $n = 1$, а сама функция $F_{\mu,f}$ вводилась, минуя $Q_{\mu,f}$ и $G_{\mu,B}$, мы называем пространственным расширением исходной голоморфной п.п.ф. $f(z)$. Очевидно, что функция $F_{\mu,f}$ обладает свойствами, близкими свойствам ранее введенной функции $\Phi_{\mu,f}(y,t)$ для неголоморфного случая. Именно, функция $F_{\mu,f}(z,t)$ непрерывна по $z \quad T_B$ и $t \quad \mathbb{R}^N$, периодична с периодом 2π по каждой из координат t_j вектора t, голоморфна по z при каждом фиксированном t, $F_{\mu,f}(z,0) = f(z)$ и

$F_{\mu,f}(z+\tau,t) = F_{\mu,f}(z,t+\mu\tau)$. Этими свойствами функция $F_{\mu,f}(z,t)$ однозначно определяется по функции f и матрице μ. Функцию $Q_{\mu,f}$, фигурирующую в определении функции $F_{\mu,f}$, назовем порождающей функцию $F_{\mu,f}$ (или функцию $f(z)$).

З а м е ч а н и е. Если $Q(w)$ – произвольная непрерывная функция на $G_{\mu,B}$, а функция $F(z,t)$ определена равенством

$$F(z,t) = Q(e^{i(\mu z+t)})\,,$$

то такая функция непрерывна на $T_B \quad \mathbb{R}^N$, периодична по каждой из координат t_j, почти периодична по z в T_B при каждом фиксированном t и $F(z+\tau,t) = F(z,t+\mu\tau)$. Следовательно, для того чтобы непрерывная на $G_{\mu,B}$ функция $Q(w)$ была порождающей функцией какой-либо голоморфной п.п.ф., необходимо и достаточно, чтобы функция $Q(e^{i(\mu z+t)})$ была голоморфной функцией от $z \quad T_B$ при любом фиксированном $t \quad \mathbb{R}^N$.

4. Укажем теперь на связь пространственного расширения п.п.ф. с ее определением, восходящим к Бохнеру. Согласно этому определению ([7, 8]), которое эквивалентно определению 2, функция $f \quad C(T_B)$ называется п.п.ф. в T_B, если из любой последовательности $f(z+\tau^{(j)})$, $\tau^{(j)} \quad \mathbb{R}^N$, $j = 1, 2, \ldots$, можно выбрать подпоследовательность $f(z+\tau^{(j_l)})$, равномерно сходящуюся в каждой области T_{B^0}, $B^0 \qquad B$. Обозначим через $(t\ )$ такую точку из куба $K = \ \xi \quad \mathbb{R}^N: \ \ \pi \quad \xi_j < \pi, j = 1,\ldots,N$, что $t_j \quad (t\ ) \quad 0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Пусть $\tau^{(j)}$ – какая-то последовательность точек из $\mathbb{R}$. Каждая точка $(\mu\tau^{(j)})$ лежит в кубе K и, следовательно, существует такая последовательность j_l и такая точка $t^0 \quad \bar{K}$, что $\lim_l \quad (\mu\tau^{(j)}) \ = t^0$. В этой ситуации ввиду указанных выше свойств функции $\Phi_{\mu,f}$ имеем

$$\lim_l f(z+\tau^{(j_l)}) = \lim_l \Phi_{\mu,f}(y,\mu x + (\mu\tau^{(j_l)}) \ ) = \Phi_{\mu,f}(y,\mu x + t^0)\,,$$

причем сходимость здесь равномерная на областях T_{B^0}, $B^0 \qquad B$. Тем самым доказано, что множество всех функций, предельных для семейства $f(z+\tau)_{\tau \ \mathbb{R}^N}$, совпадает с множеством $\Phi_{\mu,f}(z,t)_{t \ K}$. Те же рассуждения, проведенные в случае голоморфной п.п.ф. $f(z)$, показывают, что соответствующее множество предельных функций совпадает с множеством $F_{\mu,f}(z,t) \ _{t \ K}$.

5. Дадим внутреннее описание порождающих функций.

Теорема 1. *Пусть $G_{\mu,f}$ – многообразие в $\mathbb{C}^N$, построенное указанным выше способом по матрице μ и выпуклой области $B \quad \mathbb{R}^N$. Далее, пусть $Q(w)$ – функция, непрерывная на $G_{\mu,f}$. Тогда для того, чтобы эта функция была порождающей для какой-либо голоморфной п.п.ф. в T_B с той же матрицей базиса μ, необходимо и достаточно, чтобы она была CR-функцией.*

Доказательство. Напомним, что непрерывная на CR-многообразии M функция $\Phi(w)$ называется CR-функцией, если она удовлетворяет условию

$$\int\limits_{M} \Phi(w)\overline{\partial}\psi = 0, \qquad \psi \quad D_{p,q\ \ 1}(\Omega)\,, \tag{5}$$

где $q = \dim_{CR} M$, $p = \dim_{\mathbb{R}} M \quad q$, а Ω – произвольная область в $\mathbb{C}^N$, не пересекающаяся с $\bar{M}\ \ M$. Отметим еще, что свойство функции быть CR-функцией локально инвариантно относительно биголоморфных преобразований. Поэтому для доказательства того, что некоторая функция $Q_{\mu,f}$ является CR-функцией достаточно проверить, что построенные по функции $Q_{\mu,f}$ и биголоморфным отображениям $\alpha_{w_0}^{\ \ 1}(z,\zeta)$ функции $\Phi_{w_0}(z,\zeta) := Q_{\mu,f}\alpha_{w_0}(z,\zeta)$ являются CR-функциями на $T_B \quad \Delta$. Поскольку при указанных отображениях достаточно малые окрестности в $\mathbb{C}^N$ переходят в произвольно малые окрестности произведения $T_B \quad \Delta$, то ввиду (5) функции $\Phi_{w_0}(z,\zeta)$ будут СR-функциями тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\omega\ \ (T_B\ \ \Delta)} \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,\overline{\partial}\psi = 0, \qquad \psi \quad D_{N,n\ \ 1}(\omega)\,, \tag{6}$$

где $\omega = \omega \quad \omega$, ω и ω – достаточно малые окрестности, соответственно, в $\mathbb{C}^n_{(z)}$ и $\mathbb{C}^{N\ \ n}_{(\zeta)}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\omega\ \ (T_B\ \ \Delta)} \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,\overline{\partial}\psi = \int\limits_{\omega} \ \int\limits_{\Delta\ \ \omega} \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,\overline{\partial}\psi\,. \tag{7}$$

Из этого равенства следует, что относительно переменных z и $\bar{z}$ форма $\overline{\partial}\psi$ принадлежит пространству $D_{n,n}(\omega\ )$, а относительно переменных ζ и $\bar{\zeta}$ принадлежит объединению $\ \ _{p+q=N\ \ n}D_{p,q}(\omega\ )$. В то же время, как отмечалось выше, относительно совокупности переменных (z,ζ) и $(\bar{z},\bar{\zeta})$ форма $\psi \quad D_{N,n\ \ 1}$. Отсюда следует, что каждое слагаемое формы ψ содержит все n дифференциалов $dz_1,\ldots,dz_n$ и все $N \quad n$ дифференциалов $d\zeta_1,\ldots,d\zeta_{N\ \ n}$. В свою очередь, из этого вытекает, что $\overline{\partial}\psi$ не содержит ни одного из дифференциалов $d\bar{\zeta}_1,\ldots,d\bar{\zeta}_{N\ \ n}$, и значит, форма ψ представима в виде

$$\psi = dz_1 \quad \ldots \quad dz_n \quad d\zeta_1 \quad \ldots \quad d\zeta_{N\ \ n}\psi_1\,,$$

$\dim_{CR} M$ – комплексная размерность комплексного касательного пространства к M, которая согласно определению CR-многообразия не зависит от точки касания.

Напомним, что после введения понятия приведенного представления многообразия $G_{\mu,f}$ мы условились считать, что матрица имеет максимальный ранг. Поэтому здесь $z \ = z$, $\mu \ = \mu$ и т.д.

где форма ψ_1 такова, что $\overline{\partial}_\zeta\psi_1 = 0$, а $\overline{\partial}_z\psi_1 = \gamma(z,\zeta)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, $\gamma(z,\zeta) \in C(\omega)$, $\operatorname{supp}\gamma \Subset \omega$.

Таким образом, $\overline{\partial}_{(z,\zeta)}\psi = \overline{\partial}_z\psi$. Учитывая еще, что $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \overline{\partial}_z\psi_1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_\omega \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,\overline{\partial}\psi &= \int\limits_\omega \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,\overline{\partial}_z\psi = \int\limits_\omega \Phi_{w_0}(z,\zeta)\,d_z\psi \\ &= \int\limits_\omega d_z(\Phi_{w_0}\psi) - \int\limits_\omega \psi d_z\Phi_{w_0} = I_1 - I_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $\operatorname{supp}\gamma \Subset \omega$, то

$$I_1 = \int\limits_\omega d_z(\Phi_{w_0}\psi) = \int\limits_{\partial\omega} \Phi_{w_0}\psi = 0\,. \tag{9}$$

Далее, поскольку функция $\Phi_{w_0}(z,\zeta)$ голоморфна по z, а форма ψ относительно z имеет максимальный тип n, то $\psi d_z\Phi_{w_0} = \psi\overline{\partial}_z\Phi_{w_0} = 0$. Следовательно, $I_2 = 0$. Отсюда и из (7)–(9) следует выполнение условия (5), что как было отмечено, означает принадлежность функции $Q_{\mu,f}$ классу непрерывных CR-функций на $G_{\mu,f}$. Тем самым в части необходимости теорема 1 доказана.

Для доказательства достаточности заметим, что если функция $Q(w)$ является непрерывной CR-функцией на $G_{\mu,f}$, то соответствующие функции $\Phi_{w_0}(z,\zeta)$ также являются CR-функциями и, значит, удовлетворяют условию (5). Возьмем в этом условии в качестве ψ форму вида

$$\psi = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{N-n} \wedge \gamma(z)\kappa(\zeta)\,,$$

где $\gamma \in D_{n,n-1}(\omega')$, $\kappa \in C(\omega''))$. Тогда равенство (5) примет вид

$$\int\limits_{\omega'} \tilde{\Phi}_\kappa(z)\overline{\partial}_z\gamma = 0\,, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\Phi}_\kappa(z) = \int\limits_{\omega''\times\Delta} \Phi_{w_0}(z,\zeta)\kappa(\zeta)\,d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{N-n}\,. \tag{11}$$

Учитывая, что $\gamma \in D_{n,n-1}(\omega')$, преобразуем равенство (10) следующим образом

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\omega'} \tilde{\Phi}_\kappa(z,\zeta)\overline{\partial}_z\gamma = \int\limits_{\omega'} \tilde{\Phi}_\kappa(z,\zeta)\,d_z\gamma \\ &= \int\limits_{\omega'} d_z(\tilde{\Phi}_\kappa\gamma) - \int\limits_{\omega'} \gamma\,d_z\tilde{\Phi}_\kappa = \int\limits_{\omega'} \gamma\overline{\partial}_z\tilde{\Phi}_\kappa\,. \end{aligned}$$

Из полученного таким образом равенства

$$\int\limits_{\omega} \gamma \overline{\partial}_z \tilde{\Phi}_\kappa = 0$$

ввиду произвольности формы $\gamma \quad D_{n,n\ 1}(\omega\ )$ следует, что $\overline{\partial}_z \tilde{\Phi}_\kappa = 0$. В свою очередь, отсюда, согласно определению функции $\tilde{\Phi}_\kappa$, вытекает, что

$$\int\limits_{\omega \quad \Delta} (\overline{\partial}_z \Phi_{w_0}(z,\zeta))\kappa(\zeta)\, d\zeta_1 \quad \ldots \quad d\zeta_{N\ \ n} = 0, \qquad \kappa \quad C(\omega\ )\,.$$

Ввиду произвольности функции $\kappa(\zeta)$ это означает, что $\overline{\partial}_z \Phi_{w_0}(z,\zeta) = 0$, ζ $\omega \quad \Delta$. Вспоминая теперь, что $\Phi_{w_0} = Q \quad \alpha_{w_0}$, и учитывая при этом определение биголоморфного отображения α_{w_0}, заключаем, что функция $F(z,t) := Q(e^{i(\mu z+t)})$ при любом $t \quad \mathbb{R}^N$ голоморфна по z в T_B. Этого, как было указано в Замечании 1, достаточно для того, чтобы функция $F(z,t)$, построенная указанным способом по непрерывной на $G_{\mu,B}$ функции Q, была пространственным расширением голоморфной п.п.ф. $f(z) = F(z,0)$ в T_B. Иными словами, рассматриваемая здесь функция $Q(w)$ является порождающей. Теорема доказана.

6. Из теоремы 1 как следствие получается описание CR-функций на многообразии $G_{\mu,B}$ в терминах их коэффициентов Фурье. Для точной формулировки этого описания введем необходимые обозначения.

Пусть $Q(w)$ – непрерывная функция на $G_{\mu,\ B}$. Очевидно, что ее можно рассматривать как функцию $Q(r,\theta)$ от $r \quad \alpha G_{\mu,\ B}$ и $\theta \quad \mathbb{R}^N$ $(r = (\ w_1\ , \ldots, \ w_N\ ),\ \theta = (\mathrm{Arg} w_1, \ldots, \mathrm{Arg} w_N))$. При любом фиксированном r функции $Q(r,\theta)$ отвечает ее ряд Фурье

$$Q(r,\theta) \qquad \sum_{k \quad \mathbb{R}^N} c_k(r) e^{i\ \ k,\theta\ } \ . \tag{12}$$

Теорема 2. *Непрерывная на $G_{\mu,B}$ функция $Q(w)$ будет* CR*-функцией тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье $c_k(r)$ имеют вид $c_k(r) = \tilde{c}_k r^k$, $r \quad G_{\mu,B}$, где $\tilde{c}_k$ – последовательность коэффициентов Фурье какой-либо голоморфной п.п. в T_B функции $f(z)$ с целым конечным базисом $\mu_1, \ldots, \mu_N$.*

Прежде чем дать доказательство этой теоремы, отметим, что ее можно рассматривать и как описание тех последовательностей c_k , которые являются последовательностями коэффициентов Фурье голоморфных п.п.ф. с целым конечным базисом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим связь между коэффициентами Фурье $c_k(r)$ функции $Q(r,\theta)$ и коэффициентами Фурье $a_\lambda(y; f)$ п.п.ф.

$$f(z) = Q(e^{i\mu z})\,. \tag{13}$$

Согласно правилам вычисления этих коффициентов имеем

$$c_k(r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} Q(r,\theta) e^{\ \ i\ \ k,\theta} \ d\theta \,,$$

$$a_\lambda(y; f) = \lim_{l} \left(\frac{1}{2l}\right)^n \int_{\ x\ \ <l} f(x+iy) e^{\ \ i\ \ k,\theta} \ dx \,. \tag{14}$$

Так как $r \quad G_{\mu,\ B} \qquad r = e^{\ \ \mu y}$, $y \quad B$, а точки λ спектра функции $f(z)$, определенной равенством (13), имеют вид $\lambda = k\mu$, то

$$a_\lambda(y; f) = \lim_{l} \left(\frac{1}{2l}\right)^n \int_{\ x\ \ <l} Q(e^{\ \ \mu y + i\mu x}) e^{\ \ i\ \ \lambda,x} \ dx$$

$$= \lim_{l} \left(\frac{1}{2l}\right)^n \int_{\ x\ \ <l} Q(r, \mu x) e^{\ \ i\ \ k,\mu x} \ dx \,. \tag{15}$$

Воспользуемся теперь многомерным аналогом известной леммы Вейля. Этот аналог формулируется следующим образом.

Предложение 2. *Пусть $\mu_1, \dots, \mu_N$, μ – те же, что и прежде, и пусть $\Phi(\theta)$ – фунция, непрерывная на $\mathbb{R}^N$ и периодическая с периодом 2π по каждой из переменных $\theta_1, \dots, \theta_N$. Тогда*

$$\lim_{l} \left(\frac{1}{2l}\right)^n \int_{\ x\ \ <l} \Phi(\mu x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta \,. \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что

$$a_\lambda(y; f) = c_k(r) \,. \tag{17}$$

Здесь $\lambda = k\mu$, $r = e^{\ \ \mu y}$. Предположим теперь, что функция $Q(w)$ является CR-функцией на $G_{\mu,B}$. Тогда, согласно теореме 1, функция $f(z)$ голоморфна, и, значит, (см. Предложение 1)

$$a_\lambda(y; f) = c_\lambda(f) e^{\ \ \ \lambda,y\ \ } \,.$$

Следовательно, при указанном предположении

$$c_k(r) = c_\lambda(f) e^{\ \ \ \lambda,y\ \ } = c_\lambda(f) e^{\ \ \ k,\mu y\ \ } = c_\lambda(f) r^k = \tilde{c}_k r^k \,,$$

и при этом числа $\tilde{c}_k := c_\lambda(f)$ являются коэффициентами Фурье голоморфной п.п.ф. $f(z)$. Наоборот, пусть выполнено соотношение $c_k(r) = \tilde{c}_k r^k$, $\tilde{c}_k \quad \mathbb{C}$. Тогда, ввиду (17),

$$a_\lambda(y; f) = \tilde{c}_k r^k = \tilde{c}_k e^{\ \ \ k,\mu y\ \ } = \tilde{c}_k e^{\ \ \ \lambda,y\ \ } \,,$$

откуда, согласно Предложению 1, следует, что функция $f(z)$ – голоморфная п.п.ф. в T_B. Это означает, что $Q(w)$ – порождающая функция для функции $f(z)$. Вновь используя теорему 1, заключаем, что $Q(w)$ является CR-функцией. Теорема доказана.

7. С помощью теоремы 2 нетрудно получить аналитическое представление непрерывной CR-функции на $G_{\mu,B}$, т.е. представление ее в виде суммы предельных значений аналитических функций.

Пусть $J = J^N$ – некоторая, возможно, пустая выборка из чисел $1, \dots, N$. Обозначим

$$U_J^N(r^0) = \{ z \in \mathbb{C}^N : 0 \le |z_j| < r_j^0,\ j \in J;\ r_j^0 < r_j < \infty,\ j \notin J \}$$

и

$$\mathbb{Z}_J^N(r^0) = \{ k \in \mathbb{Z}^N : k_j \ge 0,\ j \in J;\ k_j > 0,\ j \notin J \}.$$

Кратно-круговую область $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ назовем J-полной, если справедлива импликация

$$z^0 \in \Omega \Rightarrow U_J^N(r^0) \subset \Omega .$$

Пусть f – голоморфная функция в J-полной области Ω и пусть

$$\|f\|_r := \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_N})|^2 \, d\theta_1 \dots d\theta_N \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Пусть, далее, K – какое-либо ограниченное множество на $\ln|\partial\Omega|$ и пусть

$$\Omega_J(K) = \bigcup_{\ln r^0 \in K} U_J^N(r^0) .$$

Обозначим

$$\|f\|_K = \sup \{ \|f\|_r : r \in \Omega_J(K) \} .$$

Пространство голоморфных в Ω функций $f(z)$ с нормами $\|f\|_K < \infty$, $\forall K$, обозначим через $H^2(\Omega)$. В случае, когда $\Omega = U^N := \{ z \in \mathbb{C}^N : |z| < 1 \}$, такое пространство рассматривалось многими авторами, соответствующая теория изложена в [11]. В одномерном случае пространство $H^2(U^1)$ – это классическое пространство Харди.

Наряду с пространством $H^2(\Omega)$, где Ω – кратно-круговая область, рассмотрим пространство $H^2(G_{\mu,B})$ функций $f(w)$, определенных на $G_{\mu,B}$ и таких, что

$$\|f\|^K := \sup \{ \|f\|_r : r \in K \} < \infty, \quad \forall K \Subset G_{\mu,B} .$$

Каждая такая функция для любого фиксированного $r \quad G_{\mu,B}$ принадлежит пространству $L^2(\ w : \ w \ = r \ )$ и, значит, ей отвечает ряд Фурье

$$f \quad \sum_k c_k(r) e^{i \ k,\theta} \ .$$

Ясно, что

$$f \ {}^2_r = \sum_k \ c_k(r) \ {}^2 ,$$

и поэтому для принадлежности функции пространству $H^2 G_{\mu,B}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{r \quad K} \sum_k \ c_k(r) \ {}^2 < \quad , \qquad K \qquad G_{\mu,B} \ . \tag{18}$$

Покажем вначале, что утверждение о наличии аналитического представления имеет место для функции $f \quad H^2 G_{\mu,B}$ со специальным видом коэффициентов $c_k(r)$. Для этого проведем некоторый предварительный анализ.

Пусть f – функция, голоморфная в J-полной кратно-круговой области $\Omega \quad \mathbb{C}^N$. Тогда

$$f(w) = \sum_{k \quad \mathbb{Z}^N_J} a_k w^k , \quad w \quad \Omega \, . \tag{19}$$

Обозначим через $l^{(\varepsilon)}$ вектор с координатами $l^{(\varepsilon)}_j = 1 \quad \varepsilon, \ \ j \quad J$, $l^{(\varepsilon)}_j = 1 + \varepsilon$, $j \quad J$, и рассмотрим функцию $f(l^{(\varepsilon)}_j w)$. Из результатов в [11], относящихся к функциям из $H^2(U^N)$, следует, что для любой функции $f \quad H^2(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \quad 0} \ f(l^{(\varepsilon)}_j w) \ {}^2_r = \sum_{k \quad \mathbb{Z}^N_J} \ a_k \ {}^2 r^{2k} , \quad r \quad \partial \ \Omega \ . \tag{20}$$

Кроме того, при любом $r \quad \partial\Omega$ для почти всех $\theta \quad \mathbb{R}^N$ существует

$$\lim_{\varepsilon \quad 0} f(l^{(\varepsilon)} r e^{i\theta}) := f \ (r e^{i\theta}) \, .$$

Из (20) и определения класса $H^2(\Omega)$ следует, что

$$\sup \sum_{k \quad \mathbb{Z}^N_J} \ a_k \ {}^2 r^{2k} : \ln r \quad K \ < \tag{21}$$

для любого ограниченного множества $K \quad \ln \ \partial\Omega$. Заметим, что верно и обратное, т.е. выполнения условия (21) достаточно для того, чтобы функция f, определенная равенством (19), была функцией из класса $H^2(\Omega)$. Действительно, из условия

$$\sum_{k \quad \mathbb{Z}^N_J} \ a_k \ {}^2 r^{2k} < \quad , \qquad r \quad \Omega \ ,$$

следует, очевидно, что

$$\sum_{k\ \mathbb{Z}_J^N} a_k\ {}^2\xi^k < \quad , \qquad \xi \quad \mathbb{R}_+^N : \xi_j \quad r_j, \quad j \quad J; \quad \xi_j \quad r_j, \quad j \quad J\,.$$

Таким образом, ряд (19) сходится в области Ω, и поскольку

$$f\ {}_r^2 = \sum_{k\ \mathbb{Z}_J^N} a_k\ {}^2 r^{2k}\,,$$

то выполнение условия (19) влечет за собой неравенство $f\ {}_K <\quad ,\quad K$, т.е. принадлежность функции $f(z)$ классу $H^2(\Omega)$.

Обозначим через $\tilde{J}$ совокупность всех выборок J. Обозначим также

$$\Omega_{\mu,B,J} = \bigcup_{r\ G_{\mu,B}} U_J^N(r)\,.$$

Ясно, что область $\Omega_{\mu,B,J}$ является J-полной и что ее границей Шилова служит замыкание многообразия $G_{\mu,B}$.

Теорема 3. *Пусть $f \quad H^2(G_{\mu,B})$, и пусть коэффициенты Фурье $c_k(r)$ функции $f(w)$ имеют вид $c_k(r) = \tilde{c}_k r^k$, $\tilde{c}_k \quad \mathbb{C}$. Тогда существуют такие функции $f_J \quad H^2(\Omega_{\mu,B,J})$, $J \quad \tilde{J}$, что на $G_{\mu,B}$ имеет место равенство*

$$f = \sum_{J\ \tilde{J}} f_J\,.$$

Доказательство. Поскольку $f \quad H^2(G_{\mu,B})$, то выполнено условие (18), которое для рассматриваемой функции имеет вид

$$\sup_{r\ K} \sum_{k\ \mathbb{Z}^N} \tilde{c}_k\ {}^2 r^{2k} < \quad , \qquad K \qquad G_{\mu,B}$$

или,что эквивалентно,

$$\sup_{r\ \ G_{\mu,B}} \sum_{k\ \mathbb{Z}^N} \tilde{c}_k\ {}^2 r^{2k} < \quad , \qquad B \qquad B\,.$$

Следовательно, для любой выборки $J \quad \tilde{J}$ выполняется неравенство

$$\sup \sum_{k\ \mathbb{Z}_J^N} \tilde{c}_k\ {}^2 r^{2k} : r \quad G_{\mu,B} \quad < \quad , \qquad B \qquad B\,. \tag{22}$$

Обозначим через $p = p(k)$ число равных нулю координат k_j в $k = (k_1, \ldots, k_N)$ и положим затем $\hat{c}_k = 2\ {}^p\tilde{c}_k$. Ясно, что условие (22) выполняется и при замене в нем чисел $\tilde{c}_k$ числами $\hat{c}_k$. Таким образом, для функции

$$f_J = \sum_{k\ \mathbb{Z}_J^N} \hat{c}_k w^k$$

выполнено условие (21) с $a_k = \hat{c}_k$, $\Omega = \Omega_{\mu,B,J}$, $K = \ G_{\mu,B}\ $. Следовательно, $f_J \quad H^2(G_{\mu,B,J})$. Сравнивая коэффициенты Фурье функций f_J с коэффициентами Фурье функции f, получаем, что $f = \sum_{J \quad \tilde{J}} f_J$ Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 как очевидное следствие вытекает

Теорема 4. *Пусть f – непрерывная CR-функция на $G_{\mu,B}$. Тогда существуют такие функции $f_J \quad H^2(G_{\mu,B,J})$, что на каждом торе $\Delta(r) := \quad w$ $\mathbb{C}^N : \ w\ = r\ ,\ r \quad G_{\mu,B}\ $, почти всюду выполняется равенство*

$$f = \sum_{J \quad \tilde{J}} f_J \,.$$

8. Рассмотрим CR-функции на $G_{\mu,B}$, которые, вообще говоря, не являются непрерывными. В этом случае утверждение типа теоремы 2 имеет место, но доказывается иначе.

Теорема 5. *Пусть функция $f \quad H^2(G_{\mu,B})$. Тогда для того чтобы она была CR-функцией, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье $c_k(r)$ удовлетворяли условию*

$$c_k(r) = \tilde{c}_k r^k, \quad \tilde{c}_k \quad \mathbb{C}, \qquad k \quad \mathbb{Z}^N, \quad r \quad G_{\mu,B}\ . \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем утверждение теоремы в части необходимости. Пусть f – CR-функция из $H^2(G_{\mu,B})$. Тогда, согласно определению CR-функции для f, выполняется условие (5) с $p = N$, $q = n$. Для удобства записи примем, что матрица, образованная векторами $\mu_1, \ldots, \mu_n$, является единичной (это предположение не нарушает общности). В такой ситуации естественно также через μ обозначать не исходную матрицу, а матрицу со строками $\mu_{n+1}, \ldots, \mu_N$. Соответственно, многообразие $G_{\mu,B}$ задастся равенством $\ln r\ \ = \mu \ln r\ ,\ \ln r \quad (\ \ B)$, или, что то же самое, равенствами

$$r_j = (r\ )^{\mu_j}, \quad r \quad e^{\ \ B}, \quad j = n+1, \ldots, N\,. \tag{24}$$

Положим

$$\varphi_k = u(\ w\ )v(\ w\ )\left(\frac{\bar{w}}{w}\right)^k d_N w \quad d_{n\ \ 1}\bar{w}\,,$$

где $d_N w = dw_1 \quad \ldots \quad dw_N$; $d_{n\ \ 1}\bar{w} = d\bar{w}_1 \quad \ldots \quad d\bar{w}_{n\ \ 1}$; $u(r\ )$ – какая-либо бесконечно дифференцируемая функция с носителем на $e^{\ \ B}$; $v(r\ )$ – бесконечно дифференцируемая функция с носителем на многообразии $\ r\ : \ln r\ = \mu \ln r\ , \ln r \quad \mathbb{R}^N$ и такая, что $v(r\ ) = 1$, если $\ln r\ = \mu \ln r\ ,\ r \quad \operatorname{supp} u$.

Согласно правилам действий с формами имеем

$$\overline{\partial}\varphi_k = \left(\frac{\bar{w}}{w}\right)^k \frac{\partial u}{\partial \bar{w}_n} d\bar{w}_n \quad d_N w \quad d_{n\ \ 1}\bar{w}$$

$$+\, u \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \left(\frac{\bar{w}^k}{w^k} \right) d\bar{w}_j \quad d_N w \quad d_{n\ 1} \bar{w} \,. \tag{25}$$

Используя это равенство, вычислим сужение формы φ_k на многообразие $G_{\mu,B}$ в координатах $r_j = \ w_j\ $, $\theta = \arg w_j$, $j = 1, \dots, N$. Для удобства записи положим

$$I = (\underbrace{1, \dots, 1}_{N}), \quad I_p = (\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N\ p}), \quad I_p = (\underbrace{0, \dots, 0}_{p\ 1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{N\ p+1}) \,.$$

Учитывая, что $d\bar{w}_j = e^{\ i\theta_j}(dr_j \quad ir_j d\theta_j)$, $d\bar{w}_j = e^{i\theta_j}(dr_j + ir_j d\theta_j)$, $dw_j \quad d\bar{w}_j = 2ir_j dr_j \quad d\theta_j$, получаем

$$d\bar{w}_j \quad d_N w \quad d_{n\ 1} \bar{w}$$
$$= A r^I d_{n\ 1} r \quad dr_j \quad d_N \theta \exp \ \theta_n + \ldots + \theta_{\hat{j}} + \ldots + \theta_N \ , \quad j \quad n \,,$$

где постоянная A зависит только от N и n, а символ $\hat{j}$ означает пропуск слагаемого с индексом j в соответствующей сумме.

Заметим далее, что

$$\left(\frac{\bar{w}}{w} \right)^k = e^{\ i\ k,\theta}$$

и что

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{w}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r_j} e^{i\theta_j}, \qquad \frac{\partial}{\partial r_n}(e^{\ ik_j\theta_j}) = \frac{k_j}{2r_j} e^{\ i(k_j\ 1)\theta_j} \,.$$

Поэтому из (25) следует

$$\overline{\partial} \varphi_k = \frac{1}{2} A r^I (\exp \quad i\ k \quad I_n, \theta \quad) \left\{ \frac{\partial u}{\partial r_n} + u \sum_{j=n} \frac{k_j}{r_j} d_{n\ 1} r \quad dr_j \right\} d_N \theta \,.$$

Ввиду соотношений (24), определяющих многообразие $G_{\mu,B}$, на нем выполняется равенство

$$d_{n\ 1} r \quad dr_j = \mu_{j,n} r_j / r_n d_n r, \quad j \quad n \,.$$

Следовательно,

$$\overline{\partial} \varphi_k \ {}_{G_{\mu,B}} = \frac{1}{2} A r^I e^{\ i\ k\ \ I_n, \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r_n} + \frac{u}{r_n} \sum_{j=n}^{N} k_j \mu_{j,n} \right\} d_n r \quad d_N \theta \,.$$

Соответственно условие (5) для формы φ_k принимает вид

$$\int_{e\ \ B} \left(\frac{\partial u}{\partial r_n} + \frac{u}{r_n} \sum_{j=n}^{N} k_j \mu_{j,n} \right) r^I \, d_n r \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} e^{\ i\ k\ \ I_n, \theta} f(re^{i\theta}) \, d_N \theta = 0 \tag{26}$$

Внутренний интеграл здесь – это с точностью до множителя коффициент Фурье $c_{k\ \ I_n} = c_{k\ \ I_n}(r\ , e^{\mu \ln r}\ )$ функции f. Поэтому условие (26) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_{e\quad B} \left(\frac{\partial u}{\partial r_n} + \frac{u}{r_n} \sum_{j=n}^{N} k_j \mu_{j,n} \right) r^I c_{k\ \ I_n}\, d_n r = 0, \qquad k\,.$$

Это равенство имеет место для любой формы $u \quad D(\mathbb{R}^n_+)$. Следовательно, оно эквивалентно следующему равенству в обобщенных функциях:

$$\frac{\partial U}{\partial r_n} + \frac{U}{r_n} \sum_{j=n}^{N} k_j \mu_{j,n} = 0\,,$$

где $U = r^I c_{k\ \ I_n}$. Рассматривая это равенство как уравнение относительно $c_{k\ \ I_n}$, заключаем, что при любом $k \quad \mathbb{Z}^N$ регулярная обобщенная функция $c_{k\ \ I_n}$ имеет вид

$$c_{k\ \ I_n} = r_n^{k_n\ \ 1+\sum_{j=n+1}^{N} \mu_{j,n} k_j}\, \hat{c}_{k\ \ I_n,n}\,, \tag{27}$$

где функции $\hat{c}_{k\ \ I_n,n}$ зависят лишь от $r_1, \ldots, r_{n\ \ 1}$. Аналогично получаем

$$c_{k\ \ I_n} = r_p^{k_p\ \ 1+\sum_{j=n+1}^{N} \mu_{j,p} k_j}\, \hat{c}_{k\ \ I_n,p}\,, \tag{28}$$

где функции $\hat{c}_{k\ \ I_n,p}$ не зависят от r_p, $p = 1, \ldots, n \quad 1$. Из соотношений (27), (28) очевидно следует, что

$$c_{k\ \ I_n} = \tilde{c}_{k\ \ I_n} \prod_{p=1}^{n} (r_p)^{\left(k_p\ \ 1+\sum_{j=n+1}^{N} \mu_{j,p} k_j\right)}, \quad \tilde{c}_{k\ \ I_n} \quad \mathbb{C},$$

или, что то же самое,

$$c_k = \tilde{c}_k \prod_{p=1}^{n} (r_p)^{\left(k_p\ \ 1+\sum_{j=n+1}^{N} \mu_{j,p} k_j\right)} = \tilde{c}_k r^{k\ \ \ G_{\mu,B}}\,.$$

Тем самым для CR-функций $f \quad H^2(G_{\mu,B})$ доказано соотношение (23), т.е. доказано утверждение теоремы 5 в части необходимости.

Для доказательства теоремы в части достаточности сошлемся на теорему 3 и тот очевидный факт, что предельное значение функции, голоморфной в области $\Omega_{\mu,B,J}$, является CR-функцией на $G_{\mu,B}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *H. Bohr*, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. — Acta math. (1925), Bd. 46, S. 101–214.

[2] *S. Bochner*, Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. — Math. Ann. (1926,) Bd. 96, S. 119–147.

[3] *B. Jessen and H. Tornehave*, Mean motions and zeros of almost periodic functions. — Acta math. (1945), v. 77, p. 137–277.

[4] *H. Tornehave*, System of zeros of holomorphic almost periodic functions. Preprint Math. Inst. Copenhagen University (1988), № 30, 37 p.

[5] *Б.В. Шабат*, Введение в комплексный анализ. II. Наука, Москва (1985), 464 с.

[6] *Г.М. Хенкин*, Метод интегральных представлений в комплексном анализе. — Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ, Москва (1985), т. 7, с. 23–124.

[7] *Г. Бор*, Почти периодические функции. Гос. тех.-теор. издат., Москва–Ленинград (1934), 128 с.

[8] *Л.И. Ронкин*, Теоремы Иессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях. — Сиб. мат. журн. (1987), т. 28, № 8, с. 199–204.

[9] *Л.И. Ронкин*, Почти периодические обобщенные функции в трубчатых областях. — Зап. науч. сем. ЛОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций (в печати).

[10] *У. Рудин*, Теория функций в полидиске. Мир, Москва (1974), 160 с.

CR-functions and holomorphic almost periodic functions with entire finite basis

L.I. Ronkin

A notion of generating function for an almost periodic function with entire finite basis is introduced. It is proved that the set of all generating functions corresponding to a fixed basis coincides with the set of all continuous CR-functions on some Reinhardt CR-manifold G that depends only on the basis. An analitic representation of CR-functions on G is obtained, too.

CR-функції та голоморфні майже періодичні функції з цілим скінченним базисом

Л.І. Ронкін

Для голоморфної майже періодичної функції введено поняття породної функції. Доведено, що множина усіх породних функцій, які відповідають фіксованому базису, збігається з множиною усіх неперервних CR-функцій на певному полікруговому многовиді, що залежить лише від вибору базису. Одержано аналітичне зображення CR-функцій на такому многовиді.