Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 1/2, с. 95–113

Вполне омбилические подмногообразия в G(2, n). IV

Ю.А. Николаевский

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

Статья продолжает серию работ по полной классификации вполне омбилических подмногообразий в многообразиях Грассмана $G(2,n)$. Рассмотрены двумерные существенно вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$ с $n > 5$.

Статья является продолжением работ [1–3] и содержит часть доказательства классификационной теоремы из [3]. Кратко представим основные формулировки.

Подмногообразие N в римановом пространстве M называется вполне омбилическим, если его вторая квадратичная форма h пропорциональна первой: $h(X,Y) = g(X,Y)H$ для любых векторных полей X и Y, касательных к N; H – вектор средней кривизны. Если $H \equiv 0$ ($h \equiv 0$), то N – вполне геодезично; если $H \not\equiv 0$, но $DH \equiv 0$ (вектор средней кривизны параллелен в нормальной связности), то N назовем внешней сферой. В остальных случаях будем называть N существенно вполне омбилическим.

Для двумерного вполне омбилического подмногообразия $F^2 \subset M$ уравнения Гаусса–Кодацци и Риччи соответственно имеют вид:

$$\tilde{R}(X,Y)Y = (k-\alpha^2)X + D_X H\,, \tag{1}$$

$$\tilde{R}(X,Y,\xi,\eta) = g(D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi, \eta)\,, \tag{2}$$

где X, Y – касательные, ξ, η – нормальные к F векторные поля (в (1) X и Y ортонормированы); $\tilde{R}$ – тензор кривизны пространства M; D – ковариантная производная в нормальной связности подмногообразия F; g – метрика на M (и индуцированная на F); k – гауссова кривизна F^2; $\alpha = \|H\|$ – средняя кривизна. В частности, в случае $M = G(2,n)$ из (1) следует, что $k > 0$, если F^2 не вполне геодезично, так как кривизна $G(2,n)$ неотрицательна [4].

Кроме того, если $F^2 \subset M$ существенно вполне омбилично, то двумерное подпространство $T_Q F^2 = \mathrm{Span}\,(X,Y)$ не может быть тройной системой Ли. Это также следует из (1).

Установлено [3, лемма 1], что если пространство M симметрическое, $F^2 \subset M$ вполне омбилично и X, Y – ортонормированный касательный к F^2 базис векторных полей, то выполнена серия равенств:

$$k - 2\alpha^2 = \beta = \mathrm{const}\,, \tag{3}$$

$$\tilde{R}(X,Y)H = \xi X - \zeta Y\,, \tag{4}$$

$$\tilde{R}(H,X)H + \tilde{R}(X,Y)(\tilde{R}(X,Y)X + kY) = \rho Y + \tau X + \zeta H\,, \tag{5}$$

$$\tilde{R}(H,Y)H + \tilde{R}(Y,X)(\tilde{R}(Y,X)Y + kX) = \rho X + \sigma Y + \xi H\,, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\tilde{R}(H,Y)(\tilde{R}(X,Y)Y - k/2X) + \zeta\tilde{R}(Y,X)X \\ = \frac{1}{4}(X\sigma - 2\rho\psi - 2k\zeta)Y + \frac{1}{4}(X\rho + (\sigma-\tau)\psi + \xi k)X + \frac{\rho}{2}H\,,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\psi = g(\nabla_X Y, X)$, ∇ – связность на F^2; $\xi = Yk/4$, $\zeta = Xk/4$, $\rho = \frac{1}{4}(XY - \nabla_X Y)k$, $\tau = \frac{1}{4}(-YY + \nabla_Y Y)k$, $\sigma = \frac{1}{4}(-XX + \nabla_X X)k$ – функции на F.

Многообразие Грассмана $G(2,n)$ – это множество двумерных подпространств в евклидовом пространстве E^n, наделенное очевидной структурой гладкого многообразия и стандартной римановой метрикой, которая превращает его в глобально симметрическое риманово пространство $O(n)/O(2) \times O(n-2)$ [4].

При специальном выборе координат можно отождествить касательное пространство $\mathfrak{M}$ к $G(2,n)$ в некоторой точке с пространством прямоугольных $2 \times (n-2)$-матриц. При этом для X, Y, $Z \in \mathfrak{M}$ скалярное произведение $g(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(XY')$; тензор кривизны $\tilde{R}(X,Y)Z = (XY' - YX')Z - Z(X'Y - Y'X)$. В $\mathfrak{M}$ определено действие группы изотропии $O(n-2) \times O(2)$ по формуле $\mathrm{Ad}_{U\times V} X = VXU'$, где $U \in O(n-2)$, $V \in O(2)$, $X \in \mathfrak{M}$. Оно сохраняет g и $\tilde{R}$.

В работе [3] сформулирована следующая классификационная

Теорема. *Пусть $F^2 \subset G(2,n)$ – вполне омбилическое подмногообразие. Тогда оно либо*

1) вполне геодезично [5],

либо

2) является внешней сферой [3],

либо

3) существенно вполне омбилично и является

a) вполне омбилической поверхностью в $S^2 \times S^1 \subset S^2 \times S^2 = G(2,n)$ или в $S^2 \times S^1 \subset G(2,5)$

или

б) вполне омбилической сферой постоянной средней кривизны в $S^3 \times S^3 \subset G(2,8)$.

(Здесь все включения вполне геодезичны; подробности см. в [3].)

Кроме того, в [3] классифицированы вполне омбилические двумерные подмногообразия в $G(2,4)$ и внешние сферы в $G(2,n)$ для всех $n \geq 4$ (при $n = 3$ $G(2,3)$ изометрично $\mathbb{R}P^2$). При этом использованы результаты работы [5] о вполне геодезических подмногообразиях в $G(2,n)$. Здесь рассмотрим существенно вполне омбилические подмногообразия $F^2 \subset G(2,n)$ с $n > 5$. Нашей основной целью является доказательство леммы 4 о существенно вполне омбилическом подмногообразии постоянной кривизны в $S^3 \times S^3 \subset G(2,8)$ и леммы 9, которая утверждает, что всякое существенно омбилическое подмногообразие в $G(2,7)$ и $G(2,6)$ фактически существенно вполне омбилично в многообразии Грассмана $G(2,5)$, вполне геодезически вложенном в $G(2,n)$.

Описание существенно вполне омбилических двумерных подмногообразий в $G(2,5)$, а также доказательство утверждения в) из [3] будут приведены в последней статье этой серии и завершат классификацию вполне омбилических подмногообразий произвольной размерности в многообразиях Грассмана $G(2,n)$.

Нумерация глав продолжает нумерацию из работ [1–3], нумерация формул и лемм – из работы [3]; нумерация литературных ссылок является самостоятельной.

8. Существенно вполне омбилические двумерные подмногообразия в $G(2,n)$ с $n > 5$

Воспользуемся утверждением 1 из работы [6]:

Утверждение. *Пусть M – риманово пространство, $Q \in M$, L – l-мерное подпространство в касательном пространстве $T_Q M$, H' – вектор из $T_Q M$, ортогональный к L. Тогда:*

1) Существует не более одного вполне омбилического подмногообразия $N^l \subset M^n$ такого, что $Q \in N$, $T_Q N = L$, и вектор средней кривизны к N в точке Q равен H'.

2) Если такое подмногообразие существует, то оно вполне омбилично в любом вполне геодезическом подмногообразии $\tilde{M}$, проходящем через Q и таком, что $T_Q \tilde{M} \supset T_Q N \oplus H'$.

Первый пункт дает возможность рассматривать подмногообразие F^2 локально. Более того, будем изучать F^2 в точке O общего положения. В частности, это означает, что если $\nabla \alpha|_0 = 0$ (т.е. $X_\alpha = 0$, $\forall X \in T_0 F$), то $\alpha =$const (по крайней мере локально). Таким образом, из $\xi|_0 = \zeta|_0 = 0$ будет следовать, что $\rho|_0 = \sigma|_0 = \tau|_0 = 0$.

Итак, пусть $F^2 \subset G(2,n)$ – существенно вполне омбилично и $n \geq 6$. Сразу же заметим, что если $n > 8$, то три вектора X, Y, H действием группы изотропии можно поместить в $T_0G(2,8) \subset \mathfrak{M}$. Тогда согласно пункту 2) Утверждения F^2 существенно вполне омбилично в $G(2,8)$, которое вполне геодезично в $G(2,n)$. Начиная с этого момента, будем считать, что $F^2 \subset G(2,n)$, $n \leq 8$. Оказывается, что равенства (4–6) можно исследовать в другой форме записи. А именно, обозначим вектор-строки матриц X, Y, H в точке O (общего положения) через x, u, y, v, z, $w \in E^{n-2}$, соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

Равенства (4–6) утверждают, что шесть линейных комбинаций векторов x, u, y, v, z, w с коэффициентами, зависящими от них, равны нулю. Вычисляя коэффициенты этих линейных комбинаций, получим матрицу A (см. таблицу).

Система (4–6) означает, что $AB = 0$, где B – матрица, в шести строках которой стоят шесть векторов x, u, y, v, z, w в приведенном порядке. Здесь, как обычно, $\langle , \rangle$ и $\|.\|$ – евклидово скалярное произведение и норма, соответственно, $n = \langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle$ (не путать с n, входящим в размерность). К этой системе надо добавить следующие равенства:

$$\begin{cases} \langle x,y\rangle + \langle u,v\rangle = 0, \\ \langle x,z\rangle + \langle u,w\rangle = 0, \\ \langle y,z\rangle + \langle v,w\rangle = 0, \\ \|x\|^2 + \|u\|^2 = \|y\|^2 + \|v\|^2 = 1, \\ \|z\|^2 + \|w\|^2 = \alpha^2, \\ k = \alpha^2 + n^2 + \|y\|^2\|x\|^2 - \langle x,y\rangle^2 + 2\langle y,v\rangle\langle u,x\rangle \\ \qquad -2\langle y,u\rangle\langle x,v\rangle + \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2, \\ k - 2\alpha^2 = \mathrm{const}. \end{cases} \tag{16}$$

Теперь заметим, что при преобразованиях из подгруппы $O(n-2)$ группы изотропии матрица A не меняется. Преобразования из подгруппы $O(2)$ группы изотропии и повороты из $O(2)$ базиса $\{X, Y\}$, вообще говоря, меняют матрицу A и, возможно, ее ранг. Однако понятно, что если x, u, y, v, z, w – какое-то решение системы $AB = 0$, то при почти всех описанных преобразованиях $\operatorname{rg} A$ постоянен (за исключением замкнутого, нигде не плотного множества в $O(2) \times O(2)$), где $\operatorname{rg} A$ может понижаться). Кроме того, число $n = \langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle$ (точнее, его модуль) – инвариант.

Далее, если $\operatorname{rg} A = r$, то все векторы x, u, y, v, z, w с точностью до действия группы изотропии можно считать $6 - r$-мерными (когда $r = 0$, они 6-мерны, так как мы уже ограничились грассмановым многообразием

$G(2,8)$), т.е. если этому решению соответствует подмногообразие в $G(2,8)$, то это будет омбилическое подмногообразие F^2 в $G(2, 8-r)$. Рассмотрим случаи $r = 0, 1, 2$ (равенство ранга какому-то числу понимаем в только что описанном нами смысле).

Лемма 4. *Пусть $F^2 \subset G(2,8)$ – существенно вполне омбилическое подмногообразие. Пусть в некоторой точке $O \in F^2$ общего положения ранг матрицы A равен нулю. Тогда F^2 – существенно вполне омбилическое подмногообразие постоянной средней и гауссовой кривизны, и в подходящей системе координат ортонормированный базис в T_0F и вектор средней кривизны к F в O имеют вид:*

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

При этом $c^2 = ka^2 - a^4$, $d^2 = kb^2 - b^4$ и $a^2 + b^2 = 1$.

Доказательство. Матрица A нулевая. Из клетки $(1, 6)$ получаем $n = \langle x, v\rangle - \langle u, y\rangle = 0$. Далее, из клеток $(1, 4)$ и $(2, 5)$ с учетом $\langle x, z\rangle + \langle u, w\rangle = 0$ имеем $\zeta = \langle x, z\rangle = \langle u, w\rangle = 0$. Аналогично, $\xi = \langle y, z\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. Из оставшихся клеток первых двух строк получим $\langle v, z\rangle = \langle y, w\rangle = \langle u, z\rangle = \langle x, w\rangle$. Значит, каждый из векторов z, w ортогонален каждому из векторов x, u, y, v. Из того, что 0 – точка общего положения, получим $\xi = \zeta = \rho = \sigma = \tau = 0$. Далее, из клеток (3, 3), (4, 4), (5, 1) и (6, 2) с учетом $n = 0$, $\rho = 0$, $k > 0$ будем иметь $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle = 0$. Теперь из (3, 4) получим $\langle u, y\rangle(-k + \|x\|^2 - \|u\|^2) = 0$, а из (4, 3) – $\langle u, y\rangle(-k + \|u\|^2 - \|x\|^2) = 0$, откуда $\langle u, y\rangle = 0$ и $\langle x, v\rangle = 0$. Таким образом, пары векторов x, u; y, v и z, w взаимноортогональны. Из клеток (3, 1) и (5, 3) имеем $\|x\|^2 = \|y\|^2$. Аналогично, из (4, 2) и (6, 4) $\|u\|^2 = \|v\|^2$. Теперь преобразованием из подгруппы $O(2)$ группы изотропии получим $\langle z; w\rangle = 0$. Из клеток (3, 2), (4, 1), (5, 4) и (6, 3) тогда следует, что либо $\langle u, x\rangle = \langle v, y\rangle = 0$, либо $\langle u, x\rangle = \langle v, y\rangle \neq 0$ и $k = 1$. Но в последнем случае клетки (3, 1) и (4, 2) приводят к $\|z\|^2 = \|w\|^2 = \|u\|^2\|x\|^2 - \langle u, x\rangle^2$. Поскольку $z \perp w$ и $\|z\| = \|w\|$, все еще есть возможность действовать подгруппой $O(2)$ группы изотропии, сохраняя все предыдущие равенства; значит, можно получить $\langle u, x\rangle = \langle v, y\rangle = 0$. Отсюда $\|z\|^2 = k\|x\|^2 - \|x\|^4$ и $\|w\|^2 = k\|u\|^2 - \|u\|^4$.

Итак, векторы x, y, u, v, z, w попарно ортогональны, и $\|x\| = \|y\|$, $\|u\| = \|v\|$. Среди них нет нулевых, так как одновременно равны или не равны нулю тройки x, y, z и u, v, w; если, например, $x = y = z = 0$, то $T_0F^2 \subset T_0S^3 \subset \mathfrak{M}$, откуда $F^2 \subset S^3$ – внешняя сфера. Теперь легко видеть, что действием группы изотропии они приводятся к виду из леммы. Лемма 4 доказана.

Таблица

$$
A=\left[\begin{array}{c|c}
\langle y,z\rangle-\xi & \langle v,z\rangle \\
\hdashline
\langle y,w\rangle & \langle v,w\rangle-\xi \\
\hdashline
\begin{gathered}-\|z\|^2+k\|y\|^2-\|y\|^2\|x\|^2\\ +\langle x,y\rangle^2-\langle y,v\rangle\langle u,x\rangle\\ +\langle y,u\rangle(n+\langle x,v\rangle)\\ -n(n-\langle u,y\rangle)-\tau\end{gathered} & \begin{gathered}-\langle z,w\rangle+k\langle v,y\rangle\\ -\|x\|^2\langle v,y\rangle\\ -\|v\|^2\langle u,x\rangle+2n\langle u,v\rangle\end{gathered} \\
\hdashline
\begin{gathered}-\langle z,w\rangle+k\langle y,v\rangle\\ -\|y\|^2\langle x,u\rangle\\ -\|u\|^2\langle y,v\rangle-2n\langle x,y\rangle\end{gathered} & \begin{gathered}-\|w\|^2+k\|v\|^2-\|u\|^2\|v\|^2\\ +\langle u,v\rangle^2-\langle y,v\rangle\langle u,x\rangle\\ -\langle x,v\rangle(n-\langle u,y\rangle)\\ -n(\langle x,v\rangle+n)-\tau\end{gathered} \\
\hdashline
-k\langle x,y\rangle+2\langle v,y\rangle n-\rho & \begin{gathered}-k(n+\langle v,x\rangle)+\|y\|^2\langle v,x\rangle\\ -\langle y,v\rangle\langle x,y\rangle\\ +\langle y,v\rangle\langle u,v\rangle\\ +\|v\|^2(2n-\langle y,v\rangle)\end{gathered} \\
\hdashline
\begin{gathered}k(n-\langle y,u\rangle)+\|v\|^2\langle y,u\rangle\\ +\langle x,y\rangle\langle y,v\rangle\\ +\langle y,v\rangle\langle u,v\rangle\\ -\|y\|^2(2n+\langle x,v\rangle)\end{gathered} & -k\langle u,v\rangle-2n\langle y,v\rangle-\rho
\end{array}\right]
$$

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{rg} A = 1$. Он невозможен, как показывает следующая

Лемма 5. *Пусть $F^2 \subset G(2,8)$ – существенно вполне омбилическое подмногообразие, $O \in F^2$ – точка общего положения. Тогда $\operatorname{rg} A$ не может быть равен 1 при почти любом выборе координат в T_0M и базиса $\{X, Y\}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rg} A = 1$. Из клеток (1, 6) и (2, 5) получаем $n = \langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle = 0$. Из клеток (1, 3) и (3, 5) имеем $\langle x, z\rangle = \zeta$, а из (2, 4), (4, 6) $\langle u, w\rangle = \zeta$, откуда, с учетом ($16_2$), $\langle x, z\rangle = \langle u, w\rangle = \zeta = 0$. Аналогично, $\langle y, z\rangle = \langle v, w\rangle = \xi = 0$. Из общности положения точки 0 следует,

$$
\left.\begin{array}{c|c|c|c}
\zeta-\langle x,z\rangle & -\langle u,z\rangle & 0 & n \\
\hline
-\langle x,w\rangle & \zeta-\langle u,w\rangle & -n & 0 \\
\hline
-k\langle x,y\rangle-2n\langle u,x\rangle-\rho & \begin{matrix} k(n-\langle u,y\rangle)+\|x\|^2\langle u,y\rangle \\ -\langle u,x\rangle\langle u,v\rangle \\ -\langle u,x\rangle\langle x,y\rangle \\ -\|u\|^2(2n+\langle x,v\rangle) \end{matrix} & \langle x,z\rangle-\zeta & \begin{matrix} 2\langle u,z\rangle \\ -\langle x,w\rangle \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} -k(n+\langle x,v\rangle)+\|u\|^2\langle x,v\rangle \\ +\langle x,y\rangle\langle x,u\rangle \\ -\langle u,x\rangle\langle u,v\rangle \\ +\|x\|^2(2n-\langle u,y\rangle) \end{matrix} & -k\langle u,v\rangle+2n\langle u,x\rangle-\rho & \begin{matrix} 2\langle x,w\rangle \\ -\langle u,z\rangle \end{matrix} & \langle u,w\rangle-\zeta \\
\hline
\begin{matrix} -\|z\|^2+k\|x\|^2-\|y\|^2\|x\|^2 \\ +\langle x,y\rangle^2-\langle y,v\rangle\langle u,x\rangle \\ \langle x,v\rangle(-n+\langle u,y\rangle) \\ -n(n+\langle x,v\rangle)-\sigma \end{matrix} & \begin{matrix} -\langle z,w\rangle+k\|x,u\| \\ -\|u\|^2\langle y,v\rangle \\ -\|y\|^2\langle x,u\rangle-2n\langle u,v\rangle \end{matrix} & \langle y,z\rangle-\xi & \begin{matrix} 2\langle v,z\rangle \\ -\langle y,w\rangle \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} -\langle z,w\rangle+k\langle x,u\rangle \\ -\|x\|^2\langle y,v\rangle \\ -\|v\|^2\langle x,u\rangle+2n\langle x,y\rangle \end{matrix} & \begin{matrix} -\|w\|^2+k\|u\|^2-\|u\|^2\|v\|^2 \\ +\langle u,v\rangle^2-\langle y,v\rangle\langle u,x\rangle \\ +\langle y,u\rangle(n+\langle x,v\rangle) \\ +n(\langle u,y\rangle-n)-\sigma \end{matrix} & \begin{matrix} 2\langle y,w\rangle \\ -\langle v,z\rangle \end{matrix} & \langle v,w\rangle-\xi
\end{array}\right] .
$$

что $\rho = \tau = \sigma = 0$. Теперь оставшиеся клетки первых двух строк и последних двух столбцов матрицы A приводят к $\langle u, z\rangle = \langle x, w\rangle = \langle v, z\rangle = \langle y, w\rangle = 0$. Значит, $z,\, w \perp x,\, y,\, v$.

Заметим, из $\operatorname{rg} A = 1$ можно получить, что все векторы x, u, y, v, z, w пятимерны с точностью до действия группы изотропии.

Кроме того, у матрицы A две первые строки и два последних столбца нулевые, но $A \neq 0$. Поэтому 4×4 – подматрица, расположенная в 3–6 строках и 1–4 столбцах, имеет ранг 1. Отсюда следует, что векторы x, u, y, v линейно зависимы.

Разберем случай, когда $\langle x, y\rangle = 0$ и $\langle x, v\rangle = 0$. Тогда $\langle u, v\rangle = 0$ и $\langle y, v\rangle = 0$, т.е. векторы x, u ортогональны векторам y, v. Это свойство сохраняется при действии подгруппы $O(2)$ группы изотропии. Кроме того, x, u, y, v линейно зависимы. Поэтому $x\|u$ или $y\|v$. Считаем, что $x\|u$. Тогда действием подгруппы $O(2)$ сделаем $u = 0$. При этом $\|x\| = 1$. Из условия $\operatorname{rg} A = 1$ следует при рассмотрении клеток (3, 2) и (5, 4), что $\langle z, w\rangle = 0$, т.е. в матрице A остаются только четыре ненулевых элемента: (3, 1) – $\|z\|^2 + k\|y\|^2 - \|y\|^2$; (4, 2) – $\|w\|^2 + k\|v\|^2$; (5, 3) – $\|z\|^2 + k - \|y\|^2$; (6, 4) – $\|w\|^2$. Из $\operatorname{rg} A = 1$ получаем, что хотя бы три из них – нули. Но тогда либо $\|v\| = 0$, либо $\|y\| = 1$, откуда $v = 0$ и подпространство $T_0F = \operatorname{Span}(X, Y) \subset \mathfrak{M}$ – тройная система Ли, что противоречит существенной вполне омбиличности. Итак, $\langle x, y\rangle$ и $\langle x, v\rangle$ одновременно не могут быть нулями.

Поворотом базиса $\{X, Y\}$ сделаем $\langle x, y\rangle = 0$, тогда и $\langle u, v\rangle = 0$ из $(16)_1$. В клетках (3, 3), (4, 4), (5, 1), (6, 2) – нули. Из клеток (3, 4) и (4, 3), с учетом $n = 0$, получим $\langle x, v\rangle^2(-k + \|x\|^2 - \|u\|^2)(-k - \|u\|^2 - \|x\|^2) = 0$. Отсюда $k = \pm(\|x\|^2 - \|u\|^2)$. Аналогично, (5, 2) и (6, 1) дают $k = \pm(\|y\|^2 - \|v\|^2)$. Учитывая $(16)_4$, получим две возможности:

$$\left\{\begin{array}{l} \|x\|^2 = \|y\|^2 \\ \|u\|^2 = \|v\|^2 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} \|x\|^2 = \|v\|^2 \\ \|y\|^2 = \|u\|^2 . \end{array}\right.$$

Если имеет место первая из систем, то при повороте базиса $\{X, Y\}$ на угол γ равенство $\langle x, y\rangle = 0$ сохранится, а $\langle x, v\rangle \to \langle x, v\rangle \cos 2\gamma + \frac{1}{2}(\langle y, v\rangle - \langle x, u\rangle) \sin 2\gamma$. Поэтому всегда можно подобрать угол γ так, чтобы $\langle x, v\rangle = 0$. Этот случай уже рассмотрен выше.

Для второй системы имеем $\pm k = \|x\|^2 - \|u\|^2 = \|v\|^2 - \|y\|^2$. В матрице A в зависимости от знака перед k в последнем равенстве будут либо (3, 4) и (6, 1) – нули, а (4, 3) и (5, 2) не равны нулю, либо наоборот. Эти случаи равноправны. Поэтому считаем, что элементы (3, 4) и (6, 1) нулевые, (4, 3) и (5, 2) ненулевые, и это соответствует случаю $k = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Теперь в третьей строке матрицы A могут быть ненулевыми только первые два элемента. Значит, либо они оба равны нулю, либо векторы x и u коллинеарны. Но во втором случае из четвертой строки в силу $k\langle x, v\rangle \neq 0$ получаем, что y равен линейной комбинации векторов x, u; при этом $x\|u$, $y \perp x$ и $x \neq 0$ (так как $\langle x, v\rangle \neq 0$). Поэтому $y = 0$. Но тогда из $n = \langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle = 0$ имеем $\langle x, v\rangle = 0$.

Таким образом, элементы (3, 1) и (3, 2) – нули, третья строка у A нулевая. Аналогично получаем, что элементы (6, 3) и (6, 4) нулевые. Отсюда следует, что вся шестая строка нулевая.

Теперь, вычитая из элемента (3, 2) элемент (6, 3), получим $\langle x, u\rangle = \langle y, v\rangle$. С учетом того, что $k = \|x\|^2 - \|y\|^2 \neq 0$, $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ и элемент (3, 2) нулевой, имеем $-\langle z, w\rangle = \langle u, x\rangle$. Рассматривая элементы (3, 1) и (6, 4), получаем $\alpha^2/2 = \|z\|^2 = \|w\|^2 = -\|y\|^4 - \langle u, x\rangle^2 + \langle v, x\rangle^2$. Теперь $(16)_6$ дает $k = 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|y\|^4 = 2\|y\|^2 k$. Значит, $\|y\|^2 = 1/2$. Но тогда и $\|x\|^2 = 1/2$, и $k = 0$. Противоречие. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим случай $r = \operatorname{rg} A = 2$. При этом возникают две возможности.

Лемма 6. *Пусть в точке* 0 *общего положения на существенно вполне омбилическом подмногообразии* F^2 $\operatorname{rg} A = 2$. *Тогда* $n \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 0$. Любая 3×3-подматрица матрицы A должна быть вырождена. Тогда получаем, что в первых двух строках и последних двух столбцах матрицы стоят нули. В частности, z, $w \perp x$, y, u, v и $\xi = \zeta = 0$, а поэтому и $\rho = \sigma = \tau = 0$. Это значит, что 4×4-подматрица в A, расположенная в первых четырех столбцах и последних четырех строках, имеет ранг 2. Из $AB = 0$ получим, что ранг системы векторов x, u, y, v не больше 2. Действием подгруппы $O(6)$ группы изотропии сделаем так, чтобы у X и Y только первые два столбца были ненулевые. Благодаря этому и из $n = 0$, как нетрудно проверить, можно выбрать базис $\{X, Y\}$ так, что $\operatorname{rg} X = 1$. Действием подгруппы $O(2)$ группы изотропии получим $u = 0$. Тогда $\|x\| = 1$, $\langle x, y\rangle = 0$, $\langle x, v\rangle = 0$, откуда $y \| v$. Подставляя все эти выражения в матрицу A, получим (опущены две верхние нулевые строки и два правых нулевых столбца)

$$\left(\begin{array}{c|c|cc}
-\|z\|^2+(k-1)\|y\|^2 & -\langle z,w\rangle+(k-1)\langle y,v\rangle & 0 & 0 \\
\hdashline
-\langle z,w\rangle+k\langle y,v\rangle & -\|w\|^2+k\|v\|^2 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & -|z|^2+k-\|y\|^2 & \multicolumn{1}{|c}{-\langle z,w\rangle} \\
\cdashline{3-4}
0 & 0 & -\langle z,w\rangle-\langle y,v\rangle & \multicolumn{1}{|c}{-\|w\|^2}
\end{array}\right).$$

Заметим теперь, что $\langle y, v\rangle \neq 0$ (иначе один из векторов y, v нулевой, и T_0F – тройная система Ли). Кроме того, из $AB = 0$, $x \neq 0$, $u = 0$ следует, что в записанной матрице первый столбец нулевой. Поэтому $\langle z, w\rangle = k\langle y, v\rangle$. Положим $v = ay$ $(a \neq 0)$. Тогда последняя строка приводит к равенству

$$(-\langle z, w\rangle - \langle y, v\rangle)y - \|w\|^2 v = ay((k+1)\|y\|^2 + \|w\|^2) = 0\,.$$

Противоречие. Лемма 6 доказана.

Продолжим изучение случая $\operatorname{rg} A = 2$. Как отмечалось в лемме 6, это условие влечет включение $\operatorname{Span}\{X, Y, H\} \subset T_0G(2,6)$, откуда $F^2 \subset G(2,6)$ как существенно вполне омбилическое подмногообразие. В следующей лемме утверждается, что F^2 не может иметь постоянную среднюю ($\Longleftrightarrow$ гауссову) кривизну.

Лемма 7. *Пусть в точке* 0 *общего положения на вполне омбилическом подмногообразии* F^2 $\operatorname{rg} A = 2$. *Тогда* $\nabla\alpha|_0 \neq 0$, *т.е.* ξ *и* ζ *не равны нулю одновременно.*

Доказательство. Как мы видим, из леммы 6 следует, что векторы X, Y и H лежат в $T_0G(2,6)$ с точностью до действия группы изотропии. Обозначим $N = XY' - YX'$, $M = X'Y - Y'X$. Действием подгруппы изотропии $O(4)$ в $T_0G(2,6)$ приведем эти матрицы к виду

$$N = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & | & 0 & 0 \\ -m_1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots \\ 0 & 0 & | & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & | & -m_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $n \neq 0$ по той же лемме 6. В группе изотропии $O(2)\times O(4)$ еще есть подгруппа $O(2) \times (O(2) \times O(2))$, сохраняющая вид матриц N и M (возможно, с точностью до изменения знаков у n, m_1 и m_2); здесь $O(2) \times O(2) \subset O(4)$ – подгруппа, действующая на матрицы из $T_0G(2,6)$ по отдельности в первых двух и во вторых двух столбцах, вообще говоря, различными ортогональными преобразованиями. Этой оставшейся подгруппой приведем матрицу H к виду

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & | & c & 0 \\ 0 & b & | & d & e \end{pmatrix}.$$

Пусть $\nabla\alpha|_0 = 0$. Тогда $\xi = \zeta = 0$ и $\sigma = \rho = \tau = 0$ в силу общности положения точки 0. Теперь, в силу равенства (4),

$$\begin{pmatrix} 0 & nb - am_1 & nd & ne - cm_2 \\ bm_1 - an & 0 & m_2e - cn & -dm_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $d = 0$; $a = \pm b$, $a(\pm n - m_1) = 0$ и $c = \pm e$, $c(\pm n - m_2) = 0$. Не нарушая общности, считаем (это можно сделать подгруппой изотропии $O(2) \times O(2)$), что $a = b$, $c = e$. Тогда $a(n - m_1) = c(n - m_2) = 0$. Матрица $H \neq 0$, поэтому, без нарушения общности, $a \neq 0$, откуда $m_1 = n$. Если $c \neq 0$, то $m_2 = n$. Это влечет расширение подгруппы группы изотропии $O(2) \times O(4)$, сохраняющей вид N и M. Подействуем в $T_0G(2,6)$ преобразованием $I_2\times U$, где I_2 – единичная 2×2-матрица, а $U\in O(4)$ равна

$$U=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & c & 0\\ 0 & a & 0 & c\\ \hline c & 0 & -a & 0\\ 0 & c & 0 & -a\end{array}\right)\times (a^2+c^2)^{-1/2}\,.$$

При этом N и M не изменятся, а H будет иметь вид

$$H=\left(\begin{array}{cc|cc}\sqrt{a^2+c^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{a^2+c^2} & 0 & 0\end{array}\right),$$

т.е. случай $c\neq 0$ сводится к случаю $c=0$. Итак, пусть $c=0$. Обозначим $m=m_2$. Имеем

$$N=\begin{pmatrix} 0 & n\\ -n & 0\end{pmatrix},\ M=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & n & 0 & 0\\ -n & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & m\\ 0 & 0 & -m & 0\end{array}\right),\ H=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\end{array}\right).$$

В нашем распоряжении еще есть двупараметрическая подгруппа группы изотропии, сохраняющая N, M и H с точностью до знаков n, m и a; это – подгруппа преобразований вида $U\times(U'\times V)$, где $U,\,V\in O(2)$ (U действует в строках, U' – в первых двух столбцах, а V – во вторых двух). Этой подгруппой можно упростить вид матрицы X. Кроме того, поворотом базиса X, Y добьемся того, что $HX'-XH'=0$. Будем иметь

$$X=\left(\begin{array}{cc|cc} p' & 0 & t' & f'\\ 0 & -p' & l' & 0\end{array}\right),\quad Y=\left(\begin{array}{cc|cc} p & q & t & f\\ r & -p & l & s\end{array}\right).$$

(здесь уже учтено, что $X,\,Y\perp H$).

Теперь из (5) с учетом $\rho=\sigma=\tau=0$ имеем

$$\left\{\begin{array}{l} p=0,\\ -t'(m^2+n^2+a^2)+k(nl+mf)=0.\end{array}\right. \tag{17}$$

Из ортонормированности базиса $\{X,Y\}$ и вида N и M следует

$$\left\{\begin{array}{l} tt'+ff'+ll'=0,\\ t'l+f's-l't=0,\\ p'(q+r)=n,\\ p't-l'r=0,\\ p'f=0,\\ p'l+t'q=0,\\ p's+f'q=0.\end{array}\right. \tag{18}$$

Из $(18)_3$ $p' \neq 0$, $q+r \neq 0$; из $(18)_5$ $f=0$, из $(18)_6$ $l=-t'q/p'$. Теперь $(18)_1$ приводит к $t'(tp'-ql')=0$. Вычитая из этого равенства $(18)_4$, умноженное на t', получим $t'l'(q-r)=0$. С другой стороны, подставляя в $(18)_2$ выражения для t, l и s, полученные из $(18)_{4,6,7}$, будем иметь $((t')^2+(f')^2)q+(l')^2r=0$. Поэтому, если $r=q$, то либо $r=q=0$, что противоречит $(18)_3$ и $n \neq 0$, либо $t'=f'=l'=0$. Значит, $t'l'=0$. Если $l'=0$, то либо $t'=f'=0$, либо $q=0$. Но при $q=0$ будет $l=0$, и из $(17)_2$ $t'=0$. Следовательно, в любом случае $t'=0$. Отсюда $l=0$.

Теперь из (6) следует, в частности, что $q-r=0$, откуда по (18) $f'=l'=0$ и $s=t=0$. Тогда T_0F – тройная система Ли. Противоречие. Лемма 7 доказана.

Итак, необходимо рассмотреть общий случай при $\operatorname{rg} A=2$, а именно, $n \neq 0$ и хотя бы одно из чисел ξ и ζ ненулевое. Сначала докажем промежуточное утверждение

Лемма 8. *Пусть* $\operatorname{rg} A=2$ *и* $n \neq 0$. *Тогда*

$$\begin{cases} n\rho = 2\zeta\ (\langle x,w\rangle - \langle u,z\rangle), \\ n\rho = -2\xi\ (\langle y,w\rangle - \langle v,z\rangle), \\ kn\langle x,y\rangle + 2n^2\langle u,x\rangle + 2\langle x,z\rangle(\langle x,w\rangle - \langle u,z\rangle) = 0, \\ kn\langle x,y\rangle - 2n^2\langle v,y\rangle - 2\langle y,z\rangle(\langle y,w\rangle - \langle v,z\rangle) = 0, \\ n(2n(\|v\|^2 - \|y\|^2) - k(\langle u,y\rangle + \langle x,v\rangle)) = 2(\langle v,z\rangle^2 - \langle y,w\rangle^2). \end{cases} \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство получаем приравниванием нулю некоторых 3×3-миноров матрицы A. Будем рассматривать клетки (i,j) матрицы A с $i \geq 3$ и $j \leq 4$ и для каждой такой клетки приравнивать нулю минор, стоящий в строках 1, 2, i и столбцах j, 5, 6. Из клеток (3, 3) и (4, 4) легко получаем (19_1) и (19_3). Аналогично, клетки (5, 1) и (6, 2) приводят к (19_2) и (19_4). Складывая миноры для клеток (5, 2) и (6, 1), получим (19_5). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть в точке общего положения почти всегда* $\operatorname{rg} A=2$. *Тогда* F^2 *существенно вполне омбилично в* $G(2,5)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будем вести от противного, т.е. предположим, что $\operatorname{Span}(X,Y,H)$ не лежит ни в каком подпространстве $T_0G(2,5) \subset \mathfrak{M} = T_0G(2,6)$. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $\operatorname{rg}(x,u,y,v)=4$. В силу первых двух строк системы $AB=0$ и $n \neq 0$, векторы z и w линейно выражаются через x, u, y, v, поэтому условие $\operatorname{rg}(x,u,y,v)=4$ является также и достаточным.

В окрестности точки 0 общего положения выберем поле X так, чтобы $\zeta=(Xk)/4=0$. Из (19_1) будем иметь $\rho=0$. Кроме того, в силу леммы 7,

$\xi \neq 0$. Отсюда, учитывая вид ρ, получим $\nabla_Y X = 0$, откуда $\nabla_Y Y = 0$, т.е. интегральные кривые поля Y – геодезические на F^2 (локально). Кроме того, из (19_2) $\langle y, w\rangle - \langle v, z\rangle = 0$.

Далее, (8) дает

$$4\tilde{R}(H, Y)(\tilde{R}(X, Y)Y) - 2k\tilde{R}(H, Y)X = \varepsilon X + \delta Y\,,$$

где $\varepsilon = (\sigma - \tau)\psi + \xi k$, $\delta = X\sigma$.

Как в начале раздела 8, запишем векторы X, Y и H в виде столбцов из двух 4-мерных вектор-строк. Тогда получим равенство $\hat{A}B = 0$, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \delta - \langle x', z\rangle & -\langle x', w\rangle & \langle x', y\rangle & \langle x', v\rangle \\ 0 & \varepsilon & -\langle u', z\rangle & \delta - \langle u', w\rangle & \langle u', y\rangle & \langle u', v\rangle \end{pmatrix},$$

B – матрица, в шести строках которой стоят векторы x, u, y, v, z, w, соответственно (при этом $\operatorname{rg} B = 4$), $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве E^4, $\|.\|$ – длина вектора, и

$$x' = (-4\|y\|^2 + 2k)x + (-4\langle y, v\rangle)u + (-4n + 4\langle u, y\rangle)v + (4\langle x, y\rangle)y\,,$$

$$u' = (-4\langle y, v\rangle)x + (-4\|v\|^2 + 2k)u + (4\langle x, v\rangle + 4n)y + (4\langle u, v\rangle)v.$$

Теперь $AB = 0$, $\hat{A}B = 0$ и $\operatorname{rg} B = 4$. Поэтому "расширенная" 8×6-матрица $\mathcal{A} = \binom{A}{\hat{A}}$ имеет ранг 2.

Заметим теперь, что $\langle x', y\rangle = 2k\langle x, y\rangle - 4n\langle u, y\rangle = 0$ в силу (19_4). Аналогично, $\langle u', v\rangle = 0$. Приравнивая нулю четыре 3×3-минора матрицы $\mathcal{A}$, стоящие в строках 1, 2, i и столбцах j, 5, 6, где $i = 7$, 8, $j = 1$, 2, получим

$$\begin{cases} \langle v, z\rangle\langle x', v\rangle = 0, \\ \langle y, w\rangle\langle u', y\rangle = 0, \\ (\langle v, w\rangle - \xi)\langle u', y\rangle + n\varepsilon = 0, \\ (-\langle y, z\rangle + \xi)\langle x', v\rangle + n\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{20}$$

При этом $\langle y, w\rangle = \langle v, z\rangle$, $\langle y, z\rangle + \langle v, w\rangle = 0$. Рассмотрим два случая.

1. $\langle v, z\rangle \neq 0$. Тогда (20) дает $\langle x', v\rangle = \langle u', y\rangle = 0$ и $\varepsilon = 0$. Докажем, что из $\zeta = \rho = \varepsilon = 0$ и $\nabla_Y Y = \nabla_Y X = 0$ следует, что $\delta = 0$. Введем в окрестности точки $O \in F^2$ локальную параметризацию $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, взяв в качестве координатных кривых $\tilde{x} =$const интегральные кривые поля Y, а в качестве $\tilde{y} =$const – их ортогональные траектории. Поскольку $\nabla_Y Y = 0$, можно считать, что первая квадратичная форма на F^2 в окрестности точки 0 имеет полугеодезический вид

$$ds^2 = E^2 d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2\,.$$

Обозначим $E_1 = \partial E/\partial\tilde{x}$, $E_2 = \partial E/\partial\tilde{y}$ и т.д. Тогда $E_{22} = -Ek$, причем из $\zeta = 0$ следует, что $k = k(\tilde{y})$. Если $E^{(1)}(\tilde{y})$ и $E^{(2)}(\tilde{y})$ – два линейно независимых решения уравнения $E_{22} = -Ek$, то, в силу принципа суперпозиции, общее решение имеет вид $E = a(\tilde{x})E^{(1)}(\tilde{y}) + b(\tilde{x})E^{(2)}(\tilde{y})$ для некоторых C^2-гладких функций a и b. Теперь равенство $\varepsilon = 0$ приводит к

$$kk' + E^{-1}E_2(-E^{-1}E_2k' + k'') = 0\,,$$

где $k' = dk/d\tilde{y}$, $k'' = d^2k/d\tilde{y}^2$. Интегрируя с учетом $E_2 \neq 0$ (иначе $k = 0$), получим $E^2 = kc_1(\tilde{x}) + c_2(\tilde{x})$, где c_1, c_2 – некоторые C^2-функции. Разделив это равенство на $|c_1(\tilde{x})| \neq 0$ (иначе $E = E(\tilde{x})$ и $k = 0$) и положив $a^{(1)}(\tilde{x}) = a(\tilde{x})/\sqrt{|c_1(\tilde{x})|}$, $a^{(2)}(\tilde{x}) = b(\tilde{x})/\sqrt{|c_1(\tilde{x})|}$, видим, что

$$(a^{(1)}(\tilde{x})E^{(1)}(\tilde{y}) + a^{(2)}(\tilde{x})E^{(2)}(\tilde{y}))^2 = \pm k(\tilde{y}) + (c_2/|c_1|)(\tilde{x})\,.$$

Наконец, дифференцируя по $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, имеем уравнение

$$((a^{(1)})^2)'((E^{(1)})^2)' + ((a^{(2)})^2)'((E^{(2)})^2)' + (2a^{(1)}a^{(2)})'(E^{(1)}E^{(2)})' = 0\,,$$

где штрихами обозначены производные по соответствующим аргументам. Отсюда хотя бы у одной из троек функций $((a^{(1)})^2)'$, $((a^{(2)})^2)'$, $(a^{(1)}a^{(2)})'$ или $((E^{(1)})^2)'$, $((E^{(2)})^2)'$, $(E^{(1)}E^{(2)})'$ имеется ранг ≤ 1 в пространстве C^2 над $\mathbb{R}$. Теперь легко получаем, что $E = \tilde{a}(\tilde{x})\tilde{E}(\tilde{y})$. Значит, с точностью до $\tilde{x}$ – перепараметризации

$$ds^2 = \tilde{E}^2(\tilde{y})d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2\,,$$

т.е. F^2 несет метрику вращения. Отсюда $\delta = X_\sigma = \tilde{E}^{-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\sigma = 0$. Таким образом, из уравнения (8) следует

$$\tilde{R}(H,Y)\left(\tilde{R}(X,Y)Y - \frac{k}{2}X\right) = 0\,. \tag{21}$$

Дальнейшие рассуждения носят чисто алгебраический характер. Покажем, что (3–6) и (21) приводят к $k =$const, что противоречит лемме 7.

Введем в рассмотрение кососимметрическую 4×4-матрицу $M_Y = Y'H - H'Y$. Учитывая вид тензора кривизны многообразия Грассмана $G(2,6)$ и равенство $\langle y,w\rangle = \langle v,z\rangle$, получим из (21)

$$\left(\tilde{R}(X,Y)Y - \frac{k}{2}X\right)|_0 M_Y = 0\,.$$

Возможны три варианта в окрестности точки 0 общего положения $\mathrm{rg}\, M_Y = 0$, 2, 4.

1.1. $M_Y = 0$. Поскольку $\langle y,w\rangle - \langle v,z\rangle = 0$, будем иметь $[Y,H] = 0$ (имеется в виду скобка Ли в алгебре Ли $\mathfrak{o}\,(6)$). Поэтому действием группы изотропии $O(2)\times O(4)$ в $T_0G(2,6)$ с учетом $Y\perp H$ можно привести Y и H к виду

$$Y=\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0\\ 0 & s & 0 & 0\end{pmatrix},\quad H=\pm\alpha\begin{pmatrix} -s & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где $c^2+s^2=1$. При этом $cs\neq 0$ (иначе $y=0$ или $v=0$ и $\operatorname{rg}(x,u,y,v)<4$). Теперь для вектора X, ортогонального Y, H,

$$X=\begin{pmatrix} 0 & a & b & d\\ e & 0 & f & i\end{pmatrix}$$

$(a,b,d,e,f,i\in\mathbb{R})$ из (4) получим

$$\pm\alpha\begin{pmatrix} 0 & e(s^2-c^2) & bcs & dcs\\ a(s^2-c^2) & 0 & -fcs & -ics\end{pmatrix}=\xi\begin{pmatrix} 0 & a & b & d\\ e & 0 & f & i\end{pmatrix},$$

откуда либо $b=d=0$, либо $f=i=0$. В обоих случаях $\operatorname{rg}(x,u,y,v)<4$.

1.2. $\operatorname{rg}M_Y=4$. Теперь $\tilde R(X,Y)Y-\frac{k}{2}X=0$. Действием группы изотропии $O(2)\times O(4)$ в $T_0G(2,6)$ приведем X и Y к виду

$$Y=\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0\\ 0 & s & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} -\mu s & a & b & d\\ e & \mu c & f & i\end{pmatrix},$$

где $c^2+s^2=1$; $c,s,a,b,d,e,f,i\in\mathbb{R}$. Тогда имеем

$$\tilde R(X,Y)Y-\frac{k}{2}X$$

$$=\begin{pmatrix} \mu sk/2 & a-2esk-ka/2 & b(c^2-k/2) & d(c^2-k/2)\\ e-2acs-ke/2 & -\mu ck/2 & f(s^2-k/2) & i(s^2-k/2)\end{pmatrix}=0\,.$$

Отсюда либо $b=d=0$, или $i=f=0$, и тогда $\operatorname{rg}(x,u,y,v)<4$, либо $k/2=c^2=s^2$, т.е. $k=1$. Из общности положения точки 0 получим противоречие с леммой 7.

1.3. $\operatorname{rg}M_Y=2$. Действием группы изотропии $O(2)\times O(4)$ в $T_0G(2,6)$ приведем Y к виду

$$Y=\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0\\ 0 & s & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где из условия на ранг $c^2+s^2=1$ и $cs\neq 0$. Теперь из $H\perp Y$ и $\langle y,w\rangle=\langle v,z\rangle$ получим, что

$$H=\begin{pmatrix} -\nu s & \gamma c & p & r\\ \gamma s & \nu c & q & t\end{pmatrix},$$

где γ, ν, p, q, r, $t \in \mathbb{R}$. Из условия $\operatorname{rg} M_Y = 2$ имеем равенство $\det\left(\begin{smallmatrix} p & r \\ q & t \end{smallmatrix}\right) = 0$. Действием подгруппы $O(2) = I_2 \times O(2) \subset O(2) \times O(4)$ группы изотропии в двух последних столбцах матриц из $T_0 G(2,6)$ приведем H к виду

$$H = \begin{pmatrix} -\nu s & \gamma c & p & 0 \\ \gamma s & \nu c & q & 0 \end{pmatrix},$$

где γ, ν, p, $q \in \mathbb{R}$ (при этом p и q, вообще говоря, могут меняться, а ν и γ остаются неизменными), сохранив вид Y. Теперь из (19_4) получим $\langle x, y\rangle = 0$, откуда $\langle u, v\rangle = 0$. Значит, X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ e & 0 & f & i \end{pmatrix},$$

где $a, b, d, e, f, i \in \mathbb{R}$. При этом $X \perp H$, т.е. $\gamma(ac + es) + bp + qf = 0$. Теперь из (4) получаем

$$\begin{pmatrix} \gamma a(s^2-c^2)-pbc & | & \nu e(s^2-c^2)-pfs & | & nq-(b\nu-f\gamma)cs & | & (-d\nu+i\gamma)cs \\ \nu a(s^2-c^2)-qbc & | & \gamma e(c^2-s^2)-qfs & | & -np+(b\gamma+f\nu)cs & | & (d\gamma+i\nu)cs \end{pmatrix}$$

$$= \xi \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ e & 0 & f & i \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $n = \langle x, v\rangle - \langle y, u\rangle = as - ec \neq 0$.

Рассмотрим две возможности.

1.3.1. $\gamma = 0$ (в точке 0 общего положения). Тогда из элементов (1, 1) и (2, 2) в (22) имеем $pb = gf = 0$. Элементы (1, 4) и (2, 4) дают $d(-\nu cs - \xi) = i(\nu cs - \xi) = 0$. Теперь d и i одновременно не могут быть ненулевыми, иначе $\xi = 0$; и одновременно не могут быть нулевыми, иначе $\operatorname{rg}(x, u, y, v) < 4$. Не нарушая общности, положим $d = 0 \neq i$. Тогда $\xi = \nu cs$. Элемент (2, 3) дает $p = 0$; из $\operatorname{rg} M_Y = 2$ тогда следует, что $q \neq 0$, поэтому $f = 0$. Теперь из (1, 2) получаем $\nu e(s^2 - c^2) = \xi a$, т.е. $acs + e(c^2 - s^2) = 0$. С другой стороны, из равенства (21) следует

$$\begin{cases} b(c^2 - k/2) = 0, \\ a(1 - k/2) - 2ecs = 0. \end{cases}$$

Но $b \neq 0$, иначе $\operatorname{rg}(x, u, y, v) < 4$, откуда $k = c2^2$ и $as - 2c^2 = 0$. Заметим теперь, что a и e не могут быть нулями одновременно, иначе $n = 0$, что противоречит лемме 6. Поэтому из последнего равенства и из полученного несколько ранее $acs + e(c^2 - s^2) = 0$ будем иметь $\zeta c^2 = s^2$. С учетом $c^2 + s^2 = 1$ получим $k = 2c^2 = 1/2$, т.е., в силу общности точки 0, k локально постоянна. Противоречие.

1.3.2. $\gamma \neq 0$. Складывая элементы (1, 1), умноженный на s, и (2, 2), умноженный на c в равенстве (22), с учетом $Y \perp H$ получим $as^3 + es^3 = 0$. В частности, оба числа a, e ненулевые, иначе $n = 0$. Теперь из (21), в частности, будем иметь

$$\begin{cases} q(a(1-k/2) - 2ecs) = 0, \\ p(e(1-k/2) - 2acs) = 0. \end{cases}$$

Если p, $q \neq 0$, то из этой системы и равенства $as^3 + es^3 = 0$ легко получим $k = 4s^4c^{-2} - 2$ и $c^2 = |s|$, откуда, в частности, $k =$const.

Без нарушения общности, пусть $p = 0$. Тогда элемент (1, 1) в (22) дает $s^2 = c^2 = 1/2$. Из этого следует, что можно еще подействовать подгруппой $O(2) \subset O(2) \times O(2) \subset O(2) \times O(4)$ группы изотропии, умножающей матрицы из $T_0G(2,6)$ слева на $U \in O(2)$ и справа на $\mathrm{diag}\,(u', I_2)$. Это действие сохраняет вид X, Y и с его помощью можно сделать $\gamma = 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в п. 1.3.1.

2. $\langle v, z\rangle = 0$. Это равенство неинвариантно. Чтобы оно сохранялось под действием группы изотропии, очевидно, необходимо, чтобы y, $v \perp w$, z. Теперь действием группы изотропии можно привести Y и H к виду

$$Y = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r \end{pmatrix},$$

где c, s, p, q, $r \in \mathbb{R}$, $c^2 + s^2 = 1$, $cs \neq 0$.

Из (19_4) будем иметь $\langle x, y\rangle = 0$, поэтому и $\langle u, v\rangle = 0$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ e & 0 & f & i \end{pmatrix},$$

где a, b, d, e, f, $i \in \mathbb{R}$. Теперь из (4) получим

$$\begin{pmatrix} -pbc & -pfs & nq & nr \\ -c(bq+dr) & -s(fq+ir) & -np & 0 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ e & 0 & f & i \end{pmatrix},$$

где $n = as - ec \neq 0$ и $\xi \neq 0$. Отсюда сразу $i = 0$, $fq = pb = 0$. Но $f \neq 0$, иначе $\mathrm{rg}\,(x, u, y, v) < 4$. Поэтому $q = 0$ и $b = 0$. В результате получаем

$$\begin{cases} -pfs = \xi a, \\ nr = \xi d, \\ -cdr = \xi e, \\ -np = \xi f. \end{cases}$$

Отсюда $d^2 = -nec^{-1}$, $f^2 = nas^{-1}$. Теперь из (19_5) следует, что $2n(s^2 - c^2) - k(as+ec) = 0$. Далее, из (8) для элементов (1, 2) и (2, 1) имеем $k(a^2c^2 - e^2s^2) =$

$2c^2s^2(a^2-e^2)$, а для $(1,2)$ и $(2,3)$ — $ke(a-ecs) = 2c^2(-2a^2cs-e^2cs+ae(s^2+1))$. Таким образом, получаем систему четырех алгебраических уравнений

$$\begin{cases} k(as+ec) - 2(as-ec)(s^2-c^2) = 0, \\ k(a^2c^2-e^2s^2) - 2c^2s^2(a^2-e^2) = 0, \\ ke(a-ecs) - 2c^2(-2a^2cs - e^2cs + ae(s^2+1)) = 0, \\ c^2+s^2 = 1 \end{cases}$$

для пяти неизвестных $a \neq 0$, $e \neq 0$ (иначе f или d равны нулю, что противоречит условию на ранг), $k > 0$, $c \neq 0$, $s \neq 0$. Первые три уравнения однородны по a и e. Положив $t = a/e$ $(\neq 0, \infty)$, получим

$$\begin{cases} t(k-2(s^2-c^2)) + cs^{-1}(k+2(s^2-c^2)) = 0, \\ t^2(k-2s^2) + s^2c^{-2}(-k+2c^2) = 0, \\ 4t^2c^3s + t(k-2c^2(s^2+1)) + (-k+2c^2)cs = 0, \\ c^2+s^2 = 1. \end{cases}$$

Складывая второе уравнение с третьим, умноженным на sc^{-3}, и учитывая, что $t \neq 0$, получим три уравнения на t: два линейные и одно квадратное. Условие их разрешимости приводит к двум уравнениям на k, c и s

$$\begin{cases} k^2(c^4+s^2) - k(c^4+s^2) + 8(c^2-s^2)^2c^2s^2 = 0, \\ (c^2-s^2)(k^3 - 2k^2(3c^4-3c^2+2) + 4k(c^4+s^4) + 8c^2s^2(s^2-c^2)^2) = 0. \end{cases}$$

Если $c^2 = s^2$, то из первого уравнения следует, что $k = 1$. В противном случае из второго уравнения k однозначно находится по c и s (фактически по c). Составляя результант и заменяя везде s^2 на $1-c^2$, получим алгебраическое уравнение на c: $-2^{10}\cdot 7^2c^{28}+\ldots = 0$, где $\ldots$ есть слагаемые меньшей степени. Отсюда c, а значит, и k постоянны. Таким образом, k может принимать лишь дискретное множество значений, что противоречит общности точки 0 и лемме 7. Лемма 9 доказана.

Осталось рассмотреть случай $G(2,5)$ в теореме, а также проверить утверждение в) из [3]. Это будет сделано в следующей части работы.

Список литературы

[1] *Ю.А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. I. — Укр. геом. сб. (1991), вып. 34, с. 83–98.

[2] *Ю.А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. II. — Укр. геом. сб. (1992), вып. 35, с. 83–99.

[3] *Ю.А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. III. — Мат. физика, анализ, геометрия (1996), т. 3, № 3/4, с. 339–355.

[4] *С. Хелгасон,* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Мир, Москва (1964).

[5] *B.-Y. Chen and T. Nagano,* Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. I. — Duke Math. J. (1977), No. 4, p. 745–755.

[6] *Yu.A. Nickolayevsky,* Totally umbilical submanifolds of symmetric spaces. — Math. Fiz., Analiz, Geom. (1994), v. 1, No. 2, p. 314–367.

Totally umbilical submanifolds in $G(2,n)$. IV

Yu.A. Nickolaevsky

This paper continues the series of the papers on the complete classification of the totally umbilical submanifolds in the Grassmann manifolds $G(2,n)$. Two-dimensional essentially totally umbilical submanifolds in $G(2,n)$ (with $n > 5$) are under consideration.

Цілком омбілічні підмноговиди в $G(2,n)$. IV

Ю.А. Ніколаєвський

Стаття продовжує серію робіт про повну класифікацію цілком омбілічних підмноговидів в грассмановому многовиді $G(2,n)$. Розглянуто двовимірні суттєво цілком омбілічні підмноговиди в $G(2,n)$ з $n > 5$.