Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 3/4, с. 139–148

Замкнутые поверхности в E^4 с ненулевым инвариантом Уитни

Ю.А. Аминов, Н.В. Манжос

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

E-mail:aminov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 9 апреля 1997 года

Доказывается существование двумерных замкнутых регулярных ориентируемых поверхностей произвольного топологического типа в E^4, у которых нет регулярного поля нормалей. Строится пример таких поверхностей, и исследуются их геометрические свойства.

В работе строятся замкнутые поверхности произвольного топологического типа в E^4 с ненулевым инвариантом Уитни и исследуются их метрические свойства. Интерес к такого рода поверхностям связан с нерешенным вопросом о возможности погрузить любую двумерную метрику в E^4. Доказывается следующая

Теорема. *В E^4 существуют ориентируемые регулярные поверхности любого топологического типа с инвариантом Уитни, равным $2k$, $k \in N$.*

Напомним определение инварианта Уитни. Пусть E^4 ориентировано и F^2 — ориентируемая поверхность с нормальным полем $n(p)$, имеющим особенности в конечном числе точек $p_1, p_2, \dots, p_k$, и пусть $a_i(p)$ — регулярные нормальные поля, которые заданы в окрестности точек p_i. Каждую точку p_i окружим кривой Γ_i, лежащей на поверхности F^2. Пусть на каждой кривой Γ_i выбрано положительное направление обхода, индуцированное положительной ориентацией F^2. Пусть N_x — нормальная плоскость в точке $x \in F^2$. Положительные ориентации E^4 и F^2 индуцируют положительную ориентацию в каждой плоскости N_x. Рассмотрим окрестность точки p_i. Векторы $n(x)$ и $a_i(x)$ лежат в плоскости N_x.

Пусть φ_i — угол между $n(p)$ и $a_i(p)$, отсчитываемый от $n(p)$ к $a_i(p)$ в положительном направлении согласно ориентации в N_p. Он определен с точностью до $2\pi k$. Так как кривая Γ_i не проходит через особые точки поля $n(x)$, то можно рассматривать $\varphi(x)$ как непрерывную функцию точки $x \in \Gamma_i$. После полного обхода кривой Γ_i векторные поля $n(x)$ и $a_i(x)$ возвращаются в прежнее положение. Обозначим через $\Delta\varphi_i$ приращение этого угла при обходе Γ_i в положительном направлении на F^2. Оно кратно 2π.

Индекс точки p_i для нормального поля $n(p)$ определяется следующим образом: $Ind_n(p_i) = \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi}$. Инвариантом Уитни ν замкнутой ориентированной поверхности F^2 называется сумма индексов особых точек поля $n(p)$: $\nu = \sum_i Ind_n(p_i)$. Инвариант Уитни тесно связан с внешней геометрией F^2, а именно с интегралом от гауссова кручения поверхности F^2 ([1, 2]). С помощью инварианта Уитни решается вопрос о существовании нормального непрерывного векторного поля на поверхности. А именно, на поверхности F^2, гомеоморфной сфере, тогда и только тогда существует регулярное нормальное поле, когда ее инвариант Уитни равен 0.

1. Лемма 1. *В E^4 существует замкнутая поверхность типа сферы с инвариантом Уитни $\nu = 2$.*

Доказательство. Опишем построение регулярной поверхности Φ^2, гомеоморфной сфере, в E^4 с ненулевым инвариантом Уитни. Сначала строится нерегулярная поверхность F^2, гомеоморфная сфере и имеющая точку самопересечения. С этой целью берем два единичных круга K_1 и K_2 в плоскостях x_1, x_2 и плоскости x_3, x_4 с общим центром O (рис. 1). Пусть γ_i — их граничные окружности, A_1 — точка на γ_1 с координатами $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0)$, A_2 — точка на γ_2 с координатами $(0, 0, \cos\varphi, \sin\varphi)$. Соединим A_1 и A_2 прямолинейным отрезком A_1A_2. При изменении угла φ отрезок A_1A_2 опишет некоторую поверхность (рис. 2).

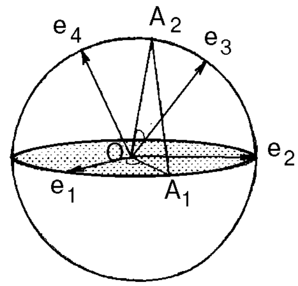

Рис. 1.

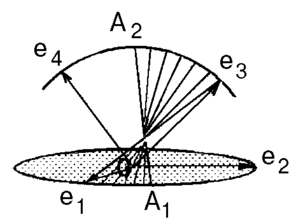

Рис. 2.

Проверим, что эта поверхность регулярна. Вектор $\overline{A_1A_2}$ имеет следующие координаты: $\overline{A_1A_2} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, \cos\varphi, \sin\varphi)$. Радиус-вектор поверхности запишем как вектор-функцию двух параметров φ и t:

$$r(\varphi,t)=\overline{OA_1}+t\overline{A_1A_2}=\begin{pmatrix}(1-t)\cos\varphi\\(1-t)\sin\varphi\\t\cos\varphi\\t\sin\varphi\end{pmatrix},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le t\le 1\,.$$

Тогда имеем

$$r_\varphi=\begin{pmatrix}-(1-t)\sin\varphi\\(1-t)\cos\varphi\\-t\sin\varphi\\t\cos\varphi\end{pmatrix},\quad r_t=\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты линейного элемента:

$$E=r_\varphi^2=1-2t+2t^2\ge\frac{1}{2},\quad F=(r_\varphi,r_t)=0,\quad G=r_t^2=2\,. \tag{1}$$

Следовательно, поверхность, заметаемая отрезком A_1A_2, регулярна. Заклеим ее граничные контуры γ_1 и γ_2 кругами K_1 и K_2. Получим замкнутую поверхность F^2 с одной точкой самопересечения О, которую можно рассматривать как две совпавшие точки O_1 и O_2, принадлежащие соответственно кругам K_1 и K_2.

Поверхность F^2 в точках окружности γ_i нерегулярна. С помощью заглаживания получим регулярную поверхность. Для этого через отрезки OA_1 и OA_2 проведем плоскость $E^2(\varphi)$. В этой плоскости лежит отрезок A_1A_2. Рассмотрим ΔOA_1A_2; углы в вершинах A_1 и A_2 загладим гладкими сколь угодно малыми кривыми $A_1'A_1''$ и $A_2'A_2''$ (рис. 3). Получим замкнутую кривую $OA_1'A_1''A_2''A_2'O$, которая при изменении угла φ опишет замкнутую регулярную поверхность Φ^2 с точкой самопересечения O.

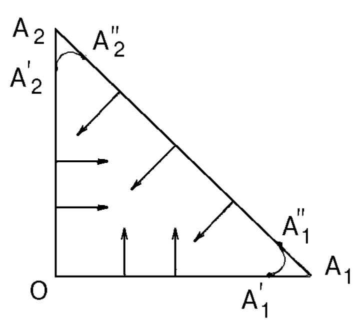

Рис. 3.

Поверхность Φ^2, очевидно, гомеоморфна F^2, а F^2, можно легко показать, гомеоморфна сфере.

Построим на поверхности Φ^2 нормальное векторное поле n с двумя особыми точками O_1 и O_2. Вектор r_φ на "боковой части" F^2 ортогонален $E^2(\varphi)$, поскольку, как нетрудно видеть, он ортогонален отрезкам OA_i. Поэтому, если в плоскости $E^2(\varphi)$ построить поле нормалей к кривой $OA_1'A_1''A_2''A_2'O$, то векторное поле n будет полем нормалей к Φ^2. Поле нормалей n на отрезках O_1A_1' и O_2A_2' постоянно и направлено по векторам $\overline{O_2A_2'}$ и $\overline{O_1A_1'}$, соответственно. Итак, векторное поле n определено во всех точках Φ^2 за исключением точек O_1 и O_2. В этих точках n не определено, так как при изменении угла φ направление векторов $\overline{O_iA_i}$ меняется.

Найдем индексы особых точек поля n. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — координатные орты в E^4. В окрестности точки O_1 зададим регулярные векторные поля a и b такие, что базис a, b определяет положительную ориентацию нормальной плоскости. Пусть базис e_1, e_2 задает положительную ориентацию в круге K_1, а базис e_1, e_2, e_3, e_4 — положительную ориентацию в E^4. Поэтому в окрестности точки O_1 можем положить $a = e_3$, $b = e_4$, и обход O_1 будем производить по малой окружности в направлении от e_1 к e_2, т.е. в положительном направлении изменения угла φ. При этом приращение угла между вектором $n = OA_2$ и вектором e_3 равно 2π. Следовательно, $Ind_n(O_1) = 1$.

Найдем индекс точки O_2. Направление обхода точки O_2 должно быть согласовано с направлением обхода точки O_1 таким образом, чтобы эти направления задавали одну и ту же ориентацию поверхности F^2. Из гомеоморфизма F^2 поверхности цилиндра с подклеенными основаниями следует, что в окрестности O_2 обход должен производиться от e_4 к e_3, т.е. в отрицательном направлении изменения угла φ. Базис e_4, e_3, e_2, e_1 задает ту же ориентацию E^4, что и базис e_1, e_2, e_3, e_4. Поэтому в окрестности точки O_2 можем положить $a = e_2$, $b = e_1$. Векторное поле $n = OA_1$ при обходе O_2 в направлении от e_4 к e_3 вращается от e_2 к e_1. Угол между n и e_1 получает приращение, равное 2π. Поэтому $Ind_n(O_2) = 1$. Инвариант Уитни поверхности Φ^2 равен 2. ■

Лемма 2. *В E^4 существуют замкнутые поверхности других топологических типов с $\nu = 2$.*

Доказательство. Как известно, любую замкнутую ориентируемую поверхность можно получить из сферы подклеиванием ручек. Сначала построим поверхность, гомеоморфную тору.

Будем исходить из описанной ранее поверхности Φ^2. В круге К$_1$ плоскости x_1, x_2 вырежем два непересекающихся круга D_1 и D_2 малого диаметра с центрами B_1 и B_2 на оси Ox_1. (Круги не должны пересекать некоторую окрестность точки O.) Подклеим к этим отверстиям ручку в виде трубки, лежащую в пространстве x_1, x_2, x_3. При этом трубку будем рассматривать как объединение трех поверхностей T_1, T_2 и T_3 (рис. 4), где T_1 и T_3 — прямые круговые цилиндры малой высоты. Очевидно, что гладкий переход от цилиндров T_1 и T_3 к плоскости x_1, x_2 можно осуществить поверхностями вращения. Пусть C_1 и C_2 — окружности с центрами B_1 и B_2, являющиеся границами заглаживающих поверхностей вращения.

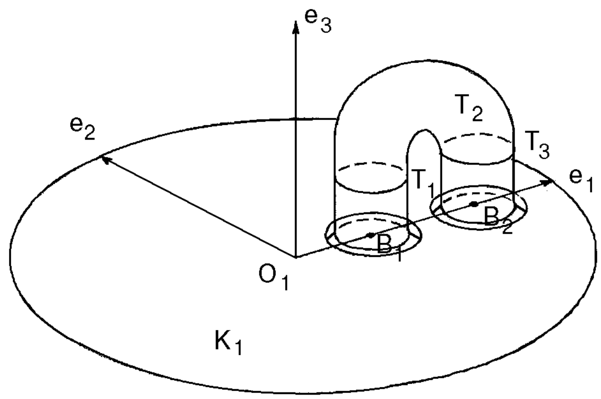

Рис. 4.

Так как ручка — ориентируемая поверхность, лежащая в трехмерном пространстве, то у нее существует нормальное векторное поле в этом же трехмерном пространстве. В точках окружностей C_1 и C_2 это векторное поле постоянно и направлено по e_3. На поверхности Φ^2 уже есть свое векторное поле, которое в точке M_1' плоскости x_1, x_2 имеет вид $n = \cos\varphi e_3 + \sin\varphi e_4$, где φ — угол между O_1x_1 и лучом O_1M_1'.

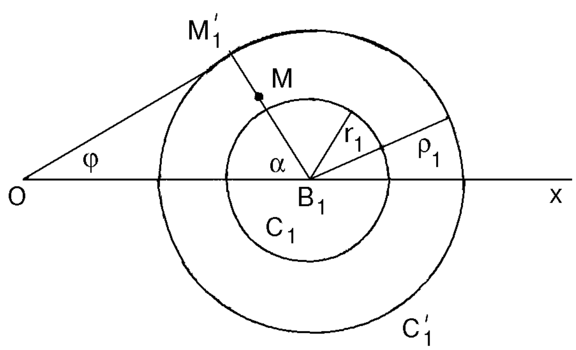

Рис. 5.

Покажем, что эти поля можно соединить непрерывным образом. Пусть C_1' — окружность с центром B_1, содержащая C_1. Пусть радиус окружности C_1 равен r_1, а окружности C_1' — ρ_1. Введем полярную систему координат

(r, α) с центром в точке B_1 и полярной осью, направленной по прямой B_1O (рис. 5), где $-\pi < \alpha \le \pi$; $r_1 \le r \le \rho_1$.

В точках окружности C_1 нормальное векторное поле совпадает с e_3, в точках C_1' — с полем $\cos\varphi e_3 + \sin\varphi e_4$. Пусть M — произвольная точка между C_1 и C_1' на луче B_1M_1'. Пусть у точки M полярные координаты будут (r, α). Запишем векторное поле $\tilde{n}(M)$ в виде

$$\tilde{n}(M) = \frac{g_1(r)e_3 + (\cos(\varphi)e_3 + \sin(\varphi)e_4)g_2(r)}{g_1(r)^2 + g_2(r)^2 + 2g_1(r)g_2(r)\cos(\varphi)}\,, \tag{2}$$

где

$$g_1(r) = \frac{f(p-r)}{f(p-r) + f(r-r_1)}, \quad g_2(r) = \frac{f(r-p)}{f(r-p) + f(\rho_1 - r)}$$

(через p обозначено $\frac{\rho_1 + r_1}{2}$), а

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2}}, & r > 0, \\ 0, & r \le 0, \end{cases} \qquad f(r) \in C^\infty\,.$$

Из определения функций g_1 и g_2 следует, что

$$g_1(r) = \begin{cases} 0, & r \ge p, \\ 1, & r \le r_1, \end{cases} \qquad g_2(r) = \begin{cases} 0, & r \le p, \\ 1, & r \ge \rho_1. \end{cases}$$

Найдем выражение φ через r и α. Из треугольника OMB_1 по теореме синусов имеем $\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\sin\alpha}{OM}$; соответственно теореме косинусов $OM^2 = r^2 + OB_1^2 - 2OB_1 r\cos\alpha$. Поэтому

$$\varphi = \arcsin\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{r^2 + OB_1^2 - 2OB_1 r\cos\alpha}}\,,$$

и векторное поле $\tilde{n}$ (2) задано в виде функций от r и α. При $r = r_1$ имеем $\tilde{n} = e_3$, а при $r = \rho_1$ $\tilde{n} = \cos\varphi e_3 + \sin\varphi e_4$. Таким образом, поле вне окружностей C_1' и C_2' совпадает с построенным ранее на Φ^2, а на окружностях C_1 и C_2 — с e_3. Построенное поле нормалей бесконечно дифференцируемо всюду, за исключением точек O_1 и O_2, в которых имеет особенности, поэтому инвариант Уитни поверхности по-прежнему равен 2.

Чтобы получить поверхности другого топологического типа с инвариантом Уитни, равным 2, в круге K_1 поверхности Φ^2 вырежем $2p$ отверстий малого диаметра, к этим отверстиям подклеим p трубок и загладим. При этом инвариант Уитни будет оставаться равным 2. ■

Доказательство. Для построения поверхности типа сферы с инвариантом Уитни, равным $2k$, возьмем k поверхностей Φ^2, построение которых описано в лемме 1. Пронумеруем их. У первой и последней поверхностей на плоских участках вырежем по одному отверстию, у остальных — по два. Расположим их так, чтобы у соседних поверхностей плоские участки лежали в одном трехмерном подпространстве. Тогда каждые две соседние поверхности можно соединить между собой гладким образом с помощью трубки, лежащей в этом же подпространстве. На построенной поверхности непрерывное нормальное векторное поле существует всюду, за исключением точек самопересечения. Индекс каждой такой точки равен 1, поэтому инвариант Уитни поверхности равен $2k$.

Для построения ориентируемой поверхности произвольного топологического типа с инвариантом Уитни, равным $2k$, поступим как в лемме 2, т.е. к какой-либо плоской области подклеим p ручек. ∎

2. Перейдем к описанию внутренней геометрии поверхности. Для этого рассмотрим сечение поверхности Φ^2 плоскостью x_1, x_3 (рис. 3) и обозначим через δ длину отрезка $A_1A_1' = A_1A_1''$ ($\delta < \frac{1}{2}$). Плоские участки, круги K_1 и K_2 имеют радиус $1 - \delta$. Гауссова кривизна этих участков равна 0. Теперь рассмотрим "боковую часть" поверхности, полученную в результате вращения отрезка $A_1''A_2''$ длины $\sqrt{2} - 2\delta$. Для метрики, заданной в виде $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$, гауссова кривизна вычисляется по формуле

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}, \tag{3}$$

и на данном участке получаем $K = -\frac{1}{2(1-2t+2t^2)^2} < 0$.

Для описания метрических свойств оставшихся участков рассмотрим конкретный пример заглаживания. Пусть x, y — координаты в плоскости ΔOA_1A_2 с началом координат в точке A_1 и осью y, направленной по биссектрисе угла OA_1A_2 (рис. 6).

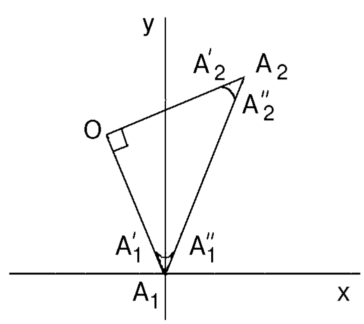

Рис. 6.

Уравнение дуги будем искать в виде полинома шестой степени и потребуем, чтобы в точках A_1', A_1'' касание было третьего порядка, т.е. чтобы $\Phi^2 \in C^3$:

$$\begin{cases} x = at \\ y = b_3t^6 + b_2t^4 + b_1t^2 + b_0 \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right).$$

Условия касания запишем следующим образом:

$$\text{а)} \quad x(t)\Big|_{t=\pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}} = \delta\cos\frac{3\pi}{8}; \; y(t)\Big|_{t=\pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}} = \delta\sin\frac{3\pi}{8};$$

$$\text{б)} \quad \frac{y'(t)}{x'(t)}\Big|_{t=\pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}} = \pm\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8};$$

$$\text{в)} \quad y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)\Big|_{t=\pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}} = 0;$$

$$\text{г)} \quad y'''(t)x'(t) - x'''(t)y'(t)\Big|_{t=\pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}} = 0\,.$$

Для коэффициентов a, b_i, $i = 0, \ldots, 3$, получим систему линейных уравнений и, решая ее, находим:

$$a = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}, \; b_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{2\delta^5}, \; b_2 = \frac{5\sin\frac{3\pi}{8}}{4\delta^3}, \; b_1 = \frac{15\sin\frac{3\pi}{8}}{8\delta}, \; b_0 = \frac{5\delta\sin\frac{3\pi}{8}}{16}\,.$$

Вычислим длину дуги $A_1'A_1''$:

$$l = \int\limits_{-\frac{\delta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{2}}} \sqrt{a^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} 2ib_it^{2(i-1)}\right)}\,dt \approx 1,52\delta\,.$$

В координатах x_1, x_3 параметрическое уравнение дуги $A_1'A_1''$ запишем в виде

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{8}x - \sin\frac{3\pi}{8}y + 1, \quad x_3 = \sin\frac{3\pi}{8}x + \cos\frac{3\pi}{8}y\,.$$

Поверхность, заметаемую дугой $A_1'A_1''$, можно представить как $r(t,\varphi) = x_1(t)(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) + x_3(t)(\cos\varphi e_3 + \sin\varphi e_4)$. Метрика на этом участке имеет вид $E = x_1^2(t) + x_3^2(t)$, $F = 0$, $G = (x_{1t}'(t))^2 + (x_{3t}'(t))^2$. Для вычисления гауссовой кривизны воспользуемся формулой (3):

$$K = \frac{(x_1x_{1t}' + x_3x_{3t}')^2(x_1'^2 + x_3'^2) + (x_1^2 + x_3^2)(x_1x_{1t}' + x_3x_{3t}')(x_{1t}'x_{1tt}'' + x_{3tt}'x_{3tt}'')}{(x_1^2 + x_3^2)^2(x_1^2 + x_3^2)^2}$$

$$- \frac{(x_1^2 + x_3^2)(x_{1t}'^2 + x_1x_{1tt}'' + x_{3t}'^2 + x_3x_{3tt}'')(x_{1t}'^2 + x_{3t}'^2)}{(x_1^2 + x_3^2)^2(x_{1t}'^2 + x_{3t}'^2)^2}\,.$$

В связи с громоздкостью формулы исследуем поведение гауссовой кривизны с помощью численных методов. Тогда получим, что при $|t| < \frac{\delta}{3\sqrt{2}}$ кривизна положительна. Длина участка дуги, на которой кривизна положительна,

$$l = \int_{-\frac{\delta}{3\sqrt{2}}}^{\frac{\delta}{3\sqrt{2}}} \sqrt{a^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} 2ib_i t^{2(i-1)}\right)^2}\, dt \approx 0,33\delta\,.$$

3. Представим поверхность Φ^2 в виде двумерной сферы (рис. 7), тогда на односвязных участках 1 и $1'$ с геодезическим радиусом $1-\delta$ гауссова кривизна равна 0. На кольце 3 кривизна отрицательна, на кольцах 2 и $2'$ гауссова кривизна положительна. Участки 2 и $2'$ можно сделать сколь угодно малыми.

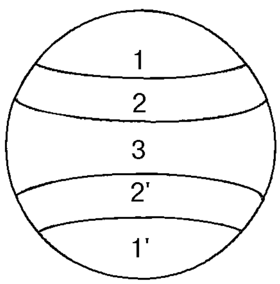

Рис. 7.

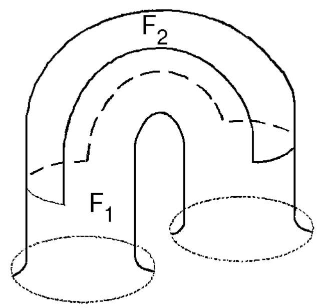

Рис. 8.

Выскажем две гипотезы:

1) *При регулярных гомотопиях поверхности Φ^2 область 3 с гауссовой кривизной $K < 0$ не исчезает.*

Легко видеть, что существуют регулярные деформации, при которых области 1 и $1'$ исчезают, а области 2 и $2'$ становятся односвязными. Заметим, что двумерное многообразие с метрикой положительной кривизны K нельзя изометрически погрузить в E^4 с ненулевым инвариантом Уитни. Действительно, если H — вектор средней кривизны, то из неравенства $H^2 \geq K > 0$ следует, что на поверхности с такой метрикой всегда существует регулярное нормальное поле $H \neq 0$. Поэтому в этом случае $\nu = 0$.

2) *На замкнутой ориентируемой поверхности с $\nu \neq 0$ существует область с $K < 0$, фундаментальная группа которой нетривиальна.*

Рассмотрим построенную ранее поверхность Φ^2 типа тора. На ней интегральная гауссова кривизна равна нулю. Представим Φ^2 как объединение трех поверхностей Φ_0^2, F_1, F_2, где Φ_0^2 — поверхность Φ^2 с вырезанными отверстиями, F_1 — область сглаженной ручки с $K < 0$, имеющая топологический тип круга с двумя вырезанными кругами, F_2 — область на ручке с $K > 0$, имеющая топологический тип круга (рис. 8). Таким образом, на поверхности типа тора имеем две области с кривизной, равной нулю — на сфере (рис. 7) им соответствуют участок $1'$ и область 1 с двумя вырезанными отверстиями, три области с положительной кривизной — участки 2 и $2'$ сферы и F_2 ручки, и, наконец, две области отрицательной кривизны — 3 и F_1.

Список литературы

[1] *Ю.А. Аминов*, Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах. — Укр. геом. сб. (1975), вып. 17, с. 1–14.

[2] *S.S. Chern*, On the curvature integral in Riemannian manifold. — Ann. Math. (1945), v. 46, p. 674–684.

Closed surfaces in E^4 with nonvanishing Whitney's invariant

Yu.A. Aminov, N.V. Manzhos

We prove the existence of two-dimensional closed regular orientable surfaces of an arbitrary topological type in E^4 that do not have a regular vector field. An example of such surfaces is constructed. Their geometrical properties are investigated.

Замкнені поверхні в E^4 з ненулевим інваріантом Уітні

Ю.А. Амінов, Н.В. Манжос

Доводиться існування двовимірних замкнених регулярних орієнтованих поверхонь довільного топологічного типу в E^4, у яких немає регулярного поля нормалей. Будується приклад таких поверхонь, та досліджуються їх геометричні властивості.