Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 5, № 3/4, с. 149–165

Приграничное поведение потенциала эллиптического оператора, обеспечивающее его самосопряженность в существенном

А.Г. Брусенцев

Белгородская государственная технологическая академия строительных материалов, Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

Статья поступила в редакцию 13 марта 1997 года

Для класса эллиптических операторов в $L_2(G)$ (G — произвольное открытое множество в R^n), содержащего оператор Шредингера с электромагнитным потенциалом, получены условия на приграничное поведение коэффициентов, при которых оператор самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(G)$. На примерах обсуждается близость полученных достаточных условий к необходимым.

В работе устанавливаются условия на вещественную функцию $q(x)$, при которых оператор

$$Lu = \left(\nabla - i\vec{b}(x)\right)^* \left(A(x)\left(\nabla - i\vec{b}(x)\right)u\right) + q(x)u\,, \tag{1}$$

$D_L = C_0^\infty(G)$ самосопряжен в существенном в пространстве $L_2(G)$. Здесь G — произвольное открытое множество в R^n, $A(x)$ — положительная эрмитова матрица-функция, $\vec{b}(x)$ — n-компонентная вектор-функция с вещественными компонентами. Для корректной определенности оператора L предполагаем, что

$$a_{ij}(x),\quad b_j(x) \in C^1(G);\quad q(x) \in L_{2loc}(G)\,.$$

Ниже локальные свойства коэффициентов L предполагаются еще и такими, чтобы максимальный оператор L^* удовлетворял условию

$$D_{L^*} = \left\{u\colon u \in L_2(G) \cap W^2_{2loc}(G),\ Lu \in L_2(G)\right\}\,. \tag{2}$$

В случае вещественной матрицы $A(x)$ последнее, например, имеет место, если

$$a_{ij}(x) \in C^2(G);\quad b_j(x) \in C^1(G);\quad q(x) \in Q_{\alpha loc}(G),\quad \alpha > 0\,,$$

где $Q_{\alpha loc}(G)$ — локальный класс Штуммеля. В настоящей работе мы обобщаем на случай произвольного открытого множества G и оператора L с произвольными (достаточно гладкими) $A(x)$ и $\vec{b}(x)$ теорему Кальфа–Вальтера–Шминке–Саймона о сильно сингулярном потенциале (см. [1, теорема X.30]). Эта теорема относится к оператору Шредингера в области $G = R^n \backslash \{\vec{0}\}$ и дает наименее жесткие из известных условия самосопряженности в терминах расстояния до $\partial G = \{\vec{0}\}$. Первые подобные результаты для $n > 1$ принадлежат Йоргенсу [2], а сама теорема установлена Саймоном [3], обобщившим теоремы Кальфа–Вальтера [4] и Шминке [5]. Для случая $n = 1$ подобная теорема принадлежит Фридрихсу [6] (см. также [1, теорема X.10]). И.Д. Чуешов получил аналог теоремы Кальфа–Вальтера–Шминке–Саймона для оператора Шредингера с областью определения $C_0^\infty(R^n \backslash S)$, где S — множество нулевой 2-емкости в R^n, $n \geq 4$ [17, 18]. Доказанная ниже теорема 3 содержит* как теорему X.30 из [1], так и ряд неизвестных ранее ее аналогов для областей $G \neq R^n \backslash \{\vec{0}\}$ (следствия 1–5, теоремы 4 и 5). Ряд признаков самосопряженности для произвольных областей получен и в работах [2, 7–9], однако теорему Кальфа–Вальтера–Шминке–Саймона эти работы не содержат. Предварительные результаты автора по этому вопросу получены в [10]. Условиям самосопряженности в случае отсутствия границы, когда $G = R^n$, посвящена обширная литература (см., например, [11–13] и обзорную статью [14]).

1. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ скалярное произведение и норму в $L_2(G)$, а через $(\cdot, \cdot)$, $| \cdot |$ — скалярное произведение и норму в унитарном пространстве $E (\dim E < \infty)$. Через $\vec{f}(x)$ обозначим определенное в G векторное поле с вещественными компонентами, удовлетворяющее в каждом компакте $\mathfrak{K} \subset G$ условию Липшица,

$$|\vec{f}(x'') - \vec{f}(x')| \leq C_{\mathfrak{K}} |x'' - x'|, \quad \vec{f}(x) \in R^n \,, \tag{3}$$

где x'', $x' \in \mathfrak{K}$. Отметим, что при условии (3) дивергенция $\nabla \vec{f}$ существует почти всюду в G (см. [15, с. 295]).

Теорема 1. *Пусть $A(x)$ и $\vec{b}(x)$ — соответственно эрмитова позитивная матрица-функция размера $n \times n$ и вектор-функция с n вещественными компонентами, определенные и непрерывные в открытом множестве $G \subseteq R^n$. Тогда для любого векторного поля $\vec{f}(x)$, удовлетворяющего в G условию (3), и для любой функции $\varphi \in C_0^1(G)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_G \left(A(\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi), \nabla\varphi - i\vec{b}\varphi \right) dx \geq \int\limits_G \left(\nabla \vec{f} - (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) \right) |\varphi|^2 \, dx \,. \tag{4}$$

*При принятых здесь требованиях гладкости $q(x)$. В теореме X.30 из [1] $q(x) \in L_{2loc}$, и условие (2) может не выполняться.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при любом $\varphi \in C_0^1(G)$ интеграл

$$J = \int\limits_G \left| A^{1/2}(\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi) + A^{-1/2}\left(\varphi\vec{f}\right)\right|^2 dx$$

$$= \int\limits_G \left(\left| A^{1/2}(\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi)\right|^2 + \left| A^{-1/2}\varphi\vec{f}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left((\nabla\varphi, \varphi\vec{f}) - i(\vec{b}, \vec{f})|\varphi|^2 \right)\right) dx$$

$$= \int\limits_G \left(A(\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi), \nabla\varphi - i\vec{b}\varphi \right) dx$$

$$+ \int\limits_G \left(A^{-1}\vec{f}, \vec{f} \right) |\varphi|^2 \, dx + \int\limits_G 2\mathrm{Re}\, (\nabla\varphi, \varphi\vec{f}) \, dx \, .$$

В третьем интеграле вычтем и прибавим выражение $\nabla\vec{f}|\varphi|^2$. Тогда

$$\int\limits_G \left(2\mathrm{Re}\, (\nabla\varphi, \varphi\vec{f}) + \nabla\vec{f}|\varphi|^2 - \nabla\vec{f}|\varphi|^2 \right) dx$$

$$= \int\limits_G \left(\nabla(|\varphi|^2\vec{f}) - \nabla\vec{f}|\varphi|^2 \right) dx = - \int\limits_G \nabla\vec{f}|\varphi|^2 \, dx \, .$$

Поскольку $J \geq 0$, то

$$\int\limits_G \left[\left(A(\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi), (\nabla\varphi - i\vec{b}\varphi) \right) + \left(A^{-1}\vec{f}, \vec{f} \right) |\varphi|^2 - \nabla\vec{f}|\varphi|^2 \right] dx \geq 0 \, ,$$

что равносильно неравенству (4). Теорема доказана.

В дальнейшем существенно используются результаты работы [10], где рассмотрен оператор более общего, чем (1), вида, но с областью определения $C_0^2(G)$. Последнее неважно, так как в нашем случае $C_0^2(G) \subset D_{\bar{L}}$. В [10] показано, что по любой матрице-функции $A(x)$ старших коэффициентов оператора L можно построить такую функцию $q_A(x)$, что из полуограниченности операторов L и $L - q_A(x)$ следует самосопряженность в существенном оператора L. В [10] $q_A(x)$ названа исправляющим потенциалом для $A(x)$ в области G и предложено несколько конструкций исправляющего потенциала как полуограниченных снизу, так и неполуограниченных. Из нашей теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если потенциал $q(x)$ оператора L вида (1) удовлетворяет почти всюду в G неравенству*

$$q(x) \geq q_A(x) + \left(A^{-1}\vec{f}, \vec{f} \right) - \nabla\vec{f}, \tag{5}$$

где $q_A(x)$ — какой-нибудь исправляющий потенциал для матрицы $A(x)$ в области G, а $\vec{f}(x)$ — векторное поле, удовлетворяющее условию (3), то из полуограниченности оператора L вытекает его самосопряженность в существенном.

Доказательство. Из условия (5) и теоремы 1 следует, что оператор $L - q_A(x)$ неотрицателен, а поэтому из полуограниченности оператора L следует его самосопряженность в существенном. Заметим, что из теоремы 1 также следует, что в случае $q_A(x) \geq$const неравенство (5) влечет за собой полуограниченность оператора L, а следовательно, и его самосопряженность в существенном.

В дальнейшем будем писать $g(x) \to \infty \ \ (g(x) \to 0)$ при $x \to \partial G$, если для любого $N > 0 \ \ (\varepsilon > 0)$ найдется такой компакт $\mathfrak{R}_N \subset G$ $(\mathfrak{R}_\varepsilon \subset G)$, что при $x \in G \backslash \mathfrak{R}_N$ $(x \in G \backslash \mathfrak{R}_\varepsilon)$ выполнено неравенство $|g(x)| > N \ \ (|g(x)| < \varepsilon)$.

В [10] показано, что в качестве исправляющего потенциала можно взять

$$q_A(x) = (A\nabla\eta, \nabla\eta) - M\,,$$

где константа $M \geq 0$, а функция $\eta(x) \in C^2(G), \ \ 0 < \eta(x) \to \infty$, при $x \to \partial G$, такова, что при $C > 0$

$$(A\nabla\eta, \nabla\eta) \leq Ce^{2\eta}\,. \tag{6}$$

Такую функцию $\eta(x)$ можно подобрать для любой непрерывной в G матрицы-функции $A(x)$.

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Если потенциал $q(x)$ оператора L вида (1) при некотором $M \geq 0$ почти всюду в G удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \geq (A\nabla\eta, \nabla\eta) + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} - M \tag{7}$$

с некоторой функцией $\eta(x) \in C^2(G)$, $0 < \eta(x) \to \infty$, при $x \to \partial G$, такой, что выполнено условие (6), и некоторым векторным полем $\vec{f}(x)$, удовлетворяющим условию (3), то оператор L самосопряжен в существенном и полуограничен.

Все дальнейшие утверждения следуют из теоремы 3 при конкретном выборе функции $\eta(x)$ и векторного поля $\vec{f}(x)$. Ниже во всех утверждениях неравенства для $q(x)$ выполнены почти всюду в G, а оператор L при этом автоматически полуограничен.

Следствие 1. *Пусть матрица $A(x)$ в операторе L вещественна. Пусть функция $\xi(x) \in C^2(G)$ такова, что $0 < \xi(x) \to 0$ при $x \to \partial G$, и при некотором $C > 0$ выполнено неравенство*

$$(A\nabla\xi, \nabla\xi) \le C, \quad x \in G\,. \tag{8}$$

Если потенциал оператора L удовлетворяет неравенству

$$q(x) \ge (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{(A\nabla\xi, \nabla\xi)}{\xi^2} + \alpha\frac{\nabla(A\nabla\xi)}{\xi} - K \tag{9}$$

с константами $K \ge 0$ и $\alpha \in (-\infty, \infty)$, то оператор L самосопряжен в существенном.

Доказательство. Положим в теореме 3 $\eta(x) = -\ln(\varepsilon\xi(x))$, где константа $\varepsilon > 0$ столь мала, что $\eta(x) > 0$. Положим также $\vec{f}(x) = \alpha A\nabla\eta$, $\alpha = const$. Тогда

$$(A\nabla\eta, \nabla\eta) + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} = (1+\alpha^2)(A\nabla\eta, \nabla\eta) - \alpha\nabla(A\nabla\eta)$$

$$= (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{(A\nabla\xi, \nabla\xi)}{\xi^2} + \alpha\frac{\nabla(A\nabla\xi)}{\xi}\,.$$

При выполнении неравенства (9) выполнено неравенство (7) с $M = K$. Для выбранной функции $\eta(x)$ выполнено условие (6), которое следует из (8). По теореме 3 оператор L самосопряжен в существенном. Следствие 1 доказано.

2. Рассмотрим оператор

$$Su = -(\nabla - i\vec{b}(x))^2 u + q(x)u\,,$$

$D_S = C_0^\infty(G)$ в случае, когда $G \ne R^n$. Обозначим через $\delta(x)$ регуляризованное расстояние точки x до множества $R^n \backslash G$. Под регуляризованным расстоянием понимается функция $\delta(x) \in C^2(G)$, удовлетворяющая неравенствам

$$C_1 d(x) \le \delta(x) \le C_2 d(x); \quad |\nabla\delta| \le const; \quad |\Delta\delta| \le \frac{const(1+\delta)}{\delta}\,, \tag{10}$$

где константы C_1, $C_2 > 0$, $d(x)$ — обычное расстояние точки x до множества $R^n \backslash G$. Такая функция всегда существует и, например, может быть построена с помощью процедуры, описанной в [15, с. 203]). При $d(x) \in C^2(G)$ ниже считается, что $\delta(x) = d(x)$.

Лемма 1. *Для всякого открытого множества $G \ne R^n$ найдется функция $0 \le \rho(x) \in C^2(G)$, для которой выполнены условия*

$$\delta(x)e^{-\rho(x)} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \partial G\,; \tag{11}$$

$$|\nabla\rho|,\ |\Delta\rho| \le const, \quad x \in G\,. \tag{12}$$

Если ∂G ограничена или является линейным многообразием в R^n, функцию $\rho(x)$ можно выбрать так, чтобы при $x \in G$ выполнялось неравенство

$$(\Delta\delta, \Delta\rho) \ge 0\,. \tag{13}$$

Доказательство. Для ограниченного множества G можно считать $\rho(x) \equiv 0$. В общем случае условию (11) удовлетворяет всякая функция $\rho(x) \in C^2(G)$, для которой:

i) выполнено неравенство $\rho(x) \ge c_0\delta(x)$ с константой $c_0 > 0$;

ii) при любом $t > 0$ множество $M_t = \{x\colon \rho(x) \le t\}$ компактно в R^n.

Действительно, множество $K_{t_1t_2} = G_{t_1} \cap M_{t_2}$, где $G_{t_1} = \{x\colon \delta(x) \ge t_1\}$, является компактом. При этом $G\backslash K_{t_1t_2} = (G\backslash G_{t_1}) \cup (G\backslash M_{t_2})$. При $x \in G\backslash G_{t_1}$ имеем $\delta(x)e^{-\rho(x)} < t_1$. При $x \in G\backslash M_{t_2}$ в силу условия i) $\delta(x)e^{-\rho(x)} \le \frac{1}{c_0}\rho(x)e^{-\rho(x)}$, где $\rho(x) > t_2$. Если t_1 достаточно мало, а t_2 достаточно велико, при любом $\varepsilon > 0$ для $x \in G\backslash K_{t_1t_2}$ имеем $\delta(x)\cdot e^{-\rho(x)} < \varepsilon$, т.е. условие (11) выполнено.

Пусть функция $\theta(t) \in C^2([0;\infty))$ такова, что $\theta'(t) \ge 0$, $\theta(t) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$, содержащейся в $[0;\,1)$, $\theta(t) \equiv 1$ при $t \notin [0;1)$. Положим

$$\rho(x) = \theta(|x - x_0|)\cdot|x - x_0| + 1\,,$$

где x_0 — произвольная точка из $R^n\backslash G$. При таком выборе $\rho(x)$ условия (12), очевидно, выполнены. В силу неравенств (10) выполнено также условие i). Условие ii) очевидно. В случае, когда G не ограничена, но имеет ограниченную границу ∂G, $\rho(x)$ можно выбрать и так:

$$\rho(x) = \theta(\delta(x))\cdot\delta(x) + 1\,.$$

Выполнение условий (12) следует из неравенств (10). Условия i), ii) очевидны. При последней конструкции $\rho(x)$ выполнено и неравенство (13). Действительно,

$$(\Delta\rho, \Delta\delta) = \theta'(\delta)\cdot\delta\cdot|\nabla\delta|^2 + \theta(\delta)\cdot|\nabla\delta|^2 \ge 0\,.$$

Если ∂G — линейное многообразие, то условие (13) выполнено с $\rho(x)$, построенной по первому варианту. Действительно, величина $(\Delta\rho, \nabla\delta)$ не зависит от системы координат в R^n. Пусть $x_0 \in \partial G$, а система координат выбрана так, что x_0 — ее начало и $\delta(x) = d(x) = \sqrt{x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2}$, где k — размерность линейного многообразия. Тогда

$$(\nabla\rho, \nabla\delta) = \theta'(|x|)\cdot\delta(x) + \theta(|x|)\cdot\frac{\delta(x)}{|x|} \ge 0\,.$$

Тем самым лемма доказана.

Следствие 2. *Если при некоторых $C \geq 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ для $x \in G$ выполнено неравенство*

$$q(x) \geq (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{|\nabla\delta|^2}{\delta^2} + \alpha\frac{\Delta\delta}{\delta} - (1+\alpha^2)\frac{2(\nabla\rho, \nabla\delta)}{\delta} - C \tag{14}$$

с функцией $\rho(x) \geq 0$, удовлетворяющей условиям (11) и (12), то оператор S самосопряжен в существенном.

Доказательство. Положим в следствии 1 $\xi(x) = \delta(x) \cdot e^{-\rho(x)}$. В силу условий (12) и того, что $|\nabla\delta| \leq const$, эта функция $\xi(x)$ удовлетворяет (8). Покажем, что при условии (14) выполнено также и (9). Действительно,

$$T(x) \equiv (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{(A\nabla\xi, \nabla\xi)}{\xi^2} + \alpha\frac{\nabla(A\nabla\xi)}{\xi}$$

$$= (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{|\nabla\delta|^2}{\delta^2} + \alpha\frac{\Delta\delta}{\delta} - (\alpha^2+1)\frac{2(\nabla\rho, \nabla\delta)}{\delta} + (\alpha^2+1)|\nabla\rho|^2 - \alpha \cdot \Delta\rho\,.$$

В силу условий (12),

$$T(x) \leq (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{|\nabla\delta|^2}{\delta^2} + \alpha\frac{\Delta\delta}{\delta} - (\alpha^2+1)\frac{2(\nabla\rho, \nabla\delta)}{\delta} + M_\alpha\,.$$

Следствие 2 доказано.

Замечание 1. *Согласно лемме в случае, когда множество ∂G ограничено или является линейным многообразием в R^n, для самосопряженности в существенном оператора S достаточно выполнения неравенства*

$$q(x) \geq (\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{|\nabla\delta|^2}{\delta^2} + \alpha\frac{\Delta\delta}{\delta} - C \tag{15}$$

с константами $C \geq 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим подробнее случай $G = R^n \backslash \mathcal{L}^k$, где $\mathcal{L}^k$ — линейное многообразие размерности $k < n$. При достаточной гладкости $q(x)$ следующее утверждение охватывает теорему X.30 из [1].

Следствие 3. *Если для оператора S в $L_2(R^n \backslash \mathcal{L}^k)^*$ с областью определения $C_0^\infty(R^n \backslash \mathcal{L}^k)$ выполнено условие*

$$q(x) \geq \left(1 - \frac{(n-k-2)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{\delta^2(x)} - C\,, \tag{16}$$

где $\delta(x)$ — расстояние точки x до многообразия $\mathcal{L}^k$ и $C \geq 0$ — некоторая константа, то оператор S самосопряжен в существенном.

$^*L_2(R^n \backslash \mathcal{L}^k) = L_2(R^n)$, поскольку $\mathrm{mes}\,(\mathcal{L}^k) = 0$.

Доказательство. Учитывая замечание 1, а также то, что в нашем случае $|\nabla\delta| = 1$, $\Delta\delta = (n-k-1)/\delta$, устанавливаем достаточность для самосопряженности в существенном оператора S неравенства

$$q(x) \geq \frac{\alpha^2 + (n-k-2)\cdot\alpha + 1}{\delta^2} - C\,.$$

Минимум функции $\alpha^2 + (n-k-2)\cdot\alpha + 1$ достигается при $\alpha = -(n-k-2)/2$ и составляет величину $1 - ((n-k-2)^2/4)$. Следствие 3 доказано.

Замечание 2. *Действующий в пространстве $L_2(R^n)$ оператор*

$$S_\gamma u = -\Delta u + (\gamma/\delta^2(x))u$$

с областью определения $C_0^\infty(R^n \backslash \mathcal{L}^k)$ и константой γ такой, что

$$-(n-k-2)^2/4 \leq \gamma < 1 - (n-k-2)^2/4\,,$$

неотрицателен и имеет ненулевые индексы дефекта. Поэтому уменьшение константы $1 - ((n-k-2)^2/4)$ в следствии 3 невозможно.

Действительно, используя неравенство (4) с векторным полем $((n-k-2)/2\delta)\nabla\delta$, нетрудно показать, что

$$\langle S_\gamma\varphi, \varphi\rangle \geq [((n-k-2)^2 + 4\gamma)/4]\|\varphi/\delta\|^2.$$

Поэтому оператор S_γ неотрицателен. Из-за инвариантности оператора Δ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ относительно поворота и переноса системы координат можно считать, что первые k координатных ортов расположены в $\mathcal{L}^k$ и $\delta(x) = \sqrt{x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2}$. Оператор S_γ запишем в виде $-\Delta_k - \Delta_{n-k} + \gamma\cdot(x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}$, где Δ_k, Δ_{n-k} — операторы Лапласа по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и $x_{k+1}, \ldots, x_n$, соответственно. Согласно теореме X.11 из [1] оператор $-\Delta_{n-k} + \gamma\cdot(x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}$ с областью определения $C_0^\infty(R^{n-k}\backslash\{\vec{0}\})$ имеет в пространстве $L_2(R^{n-k})$ ненулевые индексы дефекта. Этот оператор неотрицателен, что нетрудно установить так же, как и для оператора S_γ. Следовательно, для любого $\lambda > 0$ существует такая функция $v(x) \not\equiv 0$, $v(x) \in C^2(R^{n-k}\backslash\{\vec{0}\}) \cap L_2$, что

$$-\Delta_{n-k}v + \gamma\cdot(x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}v = -\lambda\cdot v\,.$$

Рассмотрим функцию

$$u = \varphi_0(x_1, \ldots, x_k)v(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in L_2(R^n)\,,$$

где $0 \not\equiv \varphi_0 \in C_0^2(R^k)$. Очевидно, что $u \in D_{S_\gamma^*}$ и справедливо равенство

$$\langle S_\gamma^* u, u\rangle = \left(\|\nabla\varphi_0\|_k^2 - \lambda\|\varphi_0\|_k^2\right) \cdot \|v\|_{n-k}^2 ,$$

где $\|\cdot\|_n$ и $\|\cdot\|_{n-k}$ — нормы в пространствах $L^2(R^k)$ и $L^2(R^{n-k})$, соответственно. При этом λ можно взять настолько большим, чтобы было выполнено неравенство

$$\langle S_\gamma^* u, u\rangle < 0 .$$

Предположим теперь, что $\bar{S}_\gamma = S_\gamma^*$. Тогда должна существовать последовательность $\{\varphi_m\}$ элементов $\varphi_m \in D_{S_\gamma}$ такая, что $\lim_{m\to\infty}\langle S_\gamma\varphi_m, \varphi_m\rangle = \langle S_\gamma^* u, u\rangle$, но это невозможно, так как оператор S_γ неотрицателен на своей области определения.

Замечание 3. *Следствие 3 и замечание 2, в частности, показывают, что оператор $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(R^n\backslash\mathcal{L}^k)$ тогда и только тогда, когда $n-k \geq 4$.*

Действительно, при $n-k \geq 4$ неравенству (16) удовлетворяет потенциал $q(x) \equiv 0$, откуда следует самосопряженность в существенном $-\Delta$. С другой стороны, в примере замечания 2 $-\Delta = S_\gamma$ при $\gamma = 0$. Поэтому при $n-k \leq 3$ оператор $-\Delta$ самосопряженным в существенном не будет.

Обозначим через Ω_ε приграничную полосу области G, т.е.

$$\Omega_\varepsilon = \{x \colon x \in G; \quad d(x) < \varepsilon\} ,$$

где $d(x)$ — обычное (нерегуляризованное) расстояние точки x до $R^n\backslash G$.

Следствие 4. *Пусть ∂G — ограниченное множество и при некотором $\varepsilon > 0$ выполнены условия*

$$d(x) \in C^2(\Omega_\varepsilon); \quad |\Delta d| \leq const|\nabla d|^2, \quad x \in \Omega_\varepsilon . \tag{17}$$

Тогда для самосопряженности в существенном оператора S достаточно выполнения неравенства

$$q(x) \geq \frac{3}{4d^2(x)} - K, \quad x \in G , \tag{18}$$

с константой $K \geq 0$.

Доказательство. Построим особое регуляризованное расстояние $\delta(x)$, совпадающее с $d(x)$ в некоторой приграничной полосе области G. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — функции из $C^\infty(G)$, удовлетворяющие условиям:

1) $\psi_1(x) = 1$ при $x \in \Omega_{\varepsilon/2}$, $\psi_1(x) = 0$ при $x \in G \backslash \Omega_\varepsilon$;

2) $\psi_2(x) = 1$ при $x \in G \backslash \Omega_\varepsilon$, $\psi_2(x) = 0$ при $x \in \Omega_{\varepsilon/2}$;

3) $\psi_1(x), \psi_2(x) \geq 0$, $\psi_1(x) + \psi_2(x) \equiv 1$.

Положим
$$\delta(x) = \psi_1(x) d(x) + \psi_2(x) \Delta_r(x)\,,$$
где $\Delta_r(x) = (d^* \omega_r)(x)$, а $\omega_r(y) \in C_0^\infty(G_r)$ $(G_r = \{y \colon |y| < r\})$ — осредняющая функция с радиусом осреднения $r < \frac{\varepsilon}{4}$ (см. [15, с. 39]).

Нетрудно проверить, что $\delta(x)$ удовлетворяет условиям (10). Воспользуемся следствием 2 с функцией $\rho(x) = R\delta(x)$, $R = const > 0$, для которой выполнены условия (11) и (12). Полагая $\alpha = \frac{1}{2}$, получим
$$(\alpha^2 - \alpha + 1)\frac{|\nabla \delta|^2}{\delta^2} + \alpha \frac{\Delta \delta}{\delta} - (1 + \alpha^2)\frac{2(\nabla \rho, \nabla \delta)}{\delta}$$
$$= \frac{3}{4}|\nabla \delta|^2 \delta^{-2} + \left(\frac{1}{2}\Delta \delta - \frac{5}{2}R|\nabla \delta|^2\right)\delta^{-1} \equiv T(x)\,.$$
При $x \in G \backslash \Omega_{\varepsilon/2}$ $\delta(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ и $T(x) \leq const$. При $x \in \Omega_{\varepsilon/2}$ $\delta(x) = d(x)$. Поэтому $|\nabla \delta| \leq 1$ и при некотором $M > 0$ в силу условия (17)
$$T(x) \leq \frac{3}{4d^2(x)} + \frac{M - \frac{5}{2}R}{d(x)}|\nabla d|^2, \quad x \in \Omega_{\varepsilon/2}\,.$$
Выбирая $R = \frac{2}{5}M$, получим для $x \in G$ и некоторого $N > 0$ неравенство $T(x) \leq \frac{3}{4d^2(x)} + N$, откуда следует, что при выполнении (18) справедливо неравенство (14) с $C = K + N$. Следствие 4 доказано.

Следствие 5. *Если ∂G — замкнутая гиперповерхность класса $C^{(3)}$, то при условии (18) оператор S самосопряжен в существенном.*

Доказательство. Замкнутость гиперповерхности ∂G означает ее ограниченность и отсутствие края. Докажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнены условия (17). Достаточно показать, что для любой точки $x_0 \in \partial G$ найдется окрестность $U(x_0)$, для которой при $x \in U(x_0) \cap G$ $d(x) \in C^2$ и $|\Delta d| \leq const |\nabla d|^2$. Действительно, эти окрестности образуют покрытие ∂G, из которого можно выделить конечное. Объединение окрестностей конечного покрытия и содержит приграничную полосу, в которой выполнены условия (17).

Введем декартову систему координат с началом в точке x_0 и осью x_n, направленной по нормали к ∂G внутрь области G. При некотором $r > 0$ сфера радиуса r с центром в x_0 вырезает из ∂G участок Γ, задаваемый уравнением $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Функция $f \in C^3$, $f(\vec{0}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. Пусть $U_{r/2}$ — окрестность начала координат радиуса $r/2$. Для всякой точки

$x \in U_{r/2}$ ближайшая точка ∂G $y \in \Gamma$, и ее координаты $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\} = \hat{y}$ удовлетворяют уравнениям

$$F_i(x, \hat{y}) \equiv y_i - x_i + (f(\hat{y}) - x_n)\frac{\partial f}{\partial y_i}(\hat{y}) = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

выражающим необходимые условия условного минимума функции $|x-y|^2$ при фиксированном $x \in U_{r/2}$. При этом

$$F_i(\vec{0}, \vec{0}) = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}(\vec{0}, \vec{0}) = 1\,.$$

По теореме о неявной функции найдется такая окрестность $U \subseteq U_{r/2}$, что при $x \in U$ наша система однозначно разрешима, и функции

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^2, \quad i = \overline{1, n-1}\,.$$

Число r можно выбрать настолько малым, чтобы в точках Γ внутренняя нормаль имела неотрицательную проекцию на ось x_n. Тогда при $x \in U \cap G$

$$d(x) = (x_n - f(\hat{y}))\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}(\hat{y})\right)^2}\,,$$

где координаты $\hat{y}$ являются функциями из C^2 от координат точки x. Отсюда следует, что $d(x) \in C^2(U \cap G)$ и для всякой окрестности $U(x_0) \subset U$ $|\Delta d| \le const$ при $x \in U(x_0) \cap G$. Очевидно, что при $x \in U(x_0) \cap G$ $|\nabla d| = 1$. Поэтому при $x \in U(x_0) \cap G$ выполнено неравенство (17). Следствие 5 доказано.

3. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из $N > 1$ взаимодействующих частиц, для которых совмещение невозможно из-за действующих на малых расстояниях сил отталкивания. Теорема 4 определяет "жесткость" частиц, достаточную для самосопряженности в существенном оператора Гамильтона такой системы. Пусть положение k-й частицы характеризуется вектором $\vec{x}_k \in R^m$. Физический смысл имеет лишь случай $m = 3$, но мы считаем m любым натуральным числом. Положение системы характеризуется mN-мерным вектором $\vec{x} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_N\} \in R^{mN}$. Обозначим через $R_{k,j}$ подпространство $R_{k,j} = \{\vec{x} \colon \vec{x} \in R^{mN}, \vec{x}_k = \vec{x}_j\}$. Пусть область $G = R^{mN} \setminus \cup_{k>j} R_{k,j}$. В пространстве $L_2(G)$ рассмотрим оператор

$$H = -\sum_{j=1}^{N} a_j(\nabla_j - i\vec{b}_j(\vec{x}))^2 + q(\vec{x}) \tag{19}$$

с областью определения $D_H = C_0^\infty(G)$. Здесь константы $a_j > 0$, ∇_j — градиент по переменным $\vec{x}_j = \{x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_m^{(j)}\}$, $\vec{b}_j(x)$ — вещественные m-компонентные вектор-функции из $C^1(G)$. (Ср. с работой [19].)

Теорема 4. 1. *Если $m \le 5$ и потенциал оператора H вида (19) удовлетворяет неравенству*

$$q(\vec{x}) \ge \sum_{j<k} \left(\frac{m(4-m)(a_j + a_k)}{4|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2} - \frac{\gamma(a_j + a_k)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} \right) - K \tag{20}$$

с константами γ, $K \ge 0$, то оператор H самосопряжен в существенном.

2. *Если $m \ge 6$, то существует такое $S_m \ge 0$, что для самосопряженности в существенном оператора H достаточно выполнения неравенства (20) с константами $K \ge 0$, $\gamma < -S_m$.*

Доказательство. Здесь матрица A постоянна и имеет следующий вид:

$$A = diag\{a_1, a_1, \dots, a_1, \dots, a_N, a_N, \dots, a_N\}.$$

В качестве функции $\eta(\vec{x})$ возьмем выражение

$$\eta(\vec{x}) = \sum_{j<k} \left[\ln \left(\frac{1}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} + R \right) + \rho(\vec{x}_j) + \rho(\vec{x}_k) \right],$$

где константа $R > 1$, а функция $\rho(\vec{x}_j)$ определена в R^m, причем $0 \le \rho(\vec{x}_j) \to \infty$ при $|\vec{x}_j| \to \infty$, $\rho \in C^2(R^m)$ и $|\nabla_j \rho(\vec{x}_j)|$, $|\Delta_j \rho(\vec{x}_j)| \le const$ при $\vec{x}_j \in R^m$. Все эти требования, например, выполнены, если $\rho(\vec{x}_j) = |\vec{x}_j|$ при $|\vec{x}_j| > 1$. Покажем, что выбранная таким образом функция удовлетворяет условию (6). Для этого отметим, что в нашем случае операция ∇ представляется в виде

$$\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2 \oplus \ldots \oplus \nabla_N.$$

Как и раньше, считаем, что $\vec{x}_j$, $\vec{x}_k \in R^m$, но при применении оператора ∇ к функции, зависящей только от $\vec{x}_j$, получается уже вектор из R^{mN}, причем отличные от нуля m его координат стоят на j-м месте. Чтобы отличать векторы из R^m от векторов из R^{mN}, обозначения которых сходны, для вектора из R^{mN} будем писать $\overline{\vec{x}}$. Например, $\overline{\nabla_j \rho}(\vec{x}_j)$, $\overline{\nabla_k \rho}(\vec{x}_k) \in R^{mN}$, и их отличные от нуля координаты находятся на j-м и k-м местах, соответственно. Расположение координат соответствующего вектора из R^{mN} будем определять по первому вхождению соответствующего индекса. Например, $\vec{x}_j - \vec{x}_k$, $\vec{x}_k - \vec{x}_j \in R^m$, но $\overline{\vec{x}_k - \vec{x}_j}$ и $\overline{\vec{x}_k - \vec{x}_j} \in R^{mN}$, причем их координаты, отличные от нуля, находятся на j-м и k-м местах, соответственно.

На основании сказанного можно написать

$$\nabla \eta = \sum_{j<k} \left(-\frac{(\overline{\vec{x}_j - \vec{x}_k}) + (\overline{\vec{x}_k - \vec{x}_j})}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2 (1 + R|\vec{x}_j - \vec{x}_k|)} + \overline{\nabla_j \rho}(\vec{x}_j) + \overline{\nabla_k \rho}(\vec{x}_k) \right).$$

Учитывая форму матрицы A, получим

$$(A\nabla\eta,\nabla\eta) = \sum_{j<k}\left(\frac{a_j+a_k}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)^2}+a_j|\nabla_j\rho(\vec{x}_j)|^2+a_k|\nabla_k\rho(\vec{x}_k)|^2\right.$$
$$\left.-\frac{2[a_k((\vec{x}_k-\vec{x}_j),\nabla_k\rho(\vec{x}_k))+a_j((\vec{x}_j-\vec{x}_k),\nabla_j\rho(\vec{x}_j))]}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)}\right). \tag{21}$$

Отсюда, принимая во внимание свойства функции ρ, заключаем, что

$$(A\nabla\eta,\nabla\eta)\le D\sum_{j<k}\left(\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2}+\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\right)+E$$

при некоторых константах D, $E>0$. С другой стороны, так как $R>1$, имеем

$$e^{2\eta} = \prod_{j<k}\left(\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}+R\right)^2 e^{2(\rho(\vec{x}_j)+\rho(\vec{x}_k))}\ge\frac{2}{N(N-1)}\sum_{j<k}\left(\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}+R\right)^2$$
$$\ge\frac{2}{N(N-1)}\sum_{j<k}\left(\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2}+\frac{1}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\right)+\frac{2}{N(N-1)}\,.$$

Теперь очевидно выполнение (6) с некоторой константой $C>0$.

В качестве векторного поля $\vec{f}(\vec{x})$ в теореме 3 выберем $-\frac{m-2}{2}A\nabla\eta(\vec{x})$, где $\eta(\vec{x})$ определена выше. Покажем, что константу $R>1$ можно выбрать так, что при выполнении (20) будет выполнено неравенство (7). Тогда теорема 4 будет доказана. Отметим, что

$$(A\nabla\eta,\nabla\eta)+(A^{-1}\vec{f},\vec{f})-\nabla\vec{f}$$
$$=\left[1+\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\right](A\nabla\eta,\nabla\eta)+\frac{m-2}{2}\nabla(A\nabla\eta)\equiv T(\vec{x})\,.$$

Вычислим

$$-\nabla(A\nabla\eta)$$
$$= \nabla\left(\sum_{j<k}\frac{a_j(\overline{\vec{x}_j-\vec{x}_k})+a_k(\overline{\vec{x}_k-\vec{x}_j})}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)}-\left(a_j\overline{\nabla_j\rho}(\vec{x}_j)+a_k\overline{\nabla_k\rho}(\vec{x}_k)\right)\right)$$
$$= \sum_{j<k}\left(\frac{(m-2)(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)}\right.$$
$$\left.-\frac{R(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)^2}-a_j\Delta_j\rho(\vec{x}_j)-a_k\Delta_k\rho(\vec{x}_k)\right). \tag{22}$$

Оценим сверху выражение $T(\vec{x})$. Для этого будем рассматривать каждое слагаемое в отдельности.

В силу свойств функции ρ из равенства (21) получим

$$T_1(\vec{x}) = (1+\alpha_m^2)(A\nabla\eta, \nabla\eta)$$

$$\le \sum_{j<k} \left(\frac{(1+\alpha_m^2)(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)^2} + \frac{M_1(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} \right) + M_2\,,$$

где константы M_1, M_2 не зависят от R, $\alpha_m = (m-2)/2$. Воспользуемся теперь правым из неравенств

$$1-\beta \le \frac{1}{1+\beta} \le 1-\beta+\beta^2\,, \tag{23}$$

которые справедливы при всех $\beta \ge 0$. Получим

$$T_1(\vec{x}) \le \sum_{j<k} \left(\frac{(1+\alpha_m^2)(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} + \frac{(M_1-(1+\alpha_m^2)R)(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} \right) + M_R\,, \tag{24}$$

где $M_R \ge 0$ зависит от R. В силу свойств функции ρ из (22), получим

$$T_2(\vec{x}) = \alpha_m \nabla(A\nabla\eta)$$

$$\le \sum_{j<k} \left(-\frac{(m-2)^2(a_j+a_k)}{2|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} + \frac{\alpha_m R(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)^2} \right) + M_3\,.$$

Поскольку в силу неравенств (23) для любого m

$$\frac{\alpha_m R(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)^2} \le \alpha_m \frac{R(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} + M_R'\,,$$

неравенство (24) вместе с оценкой для $T_2(\vec{x})$ приводят к неравенству

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) \;\; &= \;\; T_1(\vec{x}) + T_2(\vec{x}) \le \sum_{j<k} \left[\frac{m(4-m)(a_i+a_k)}{4|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} \right. \\ &\left. + \frac{(M_1-(1+\alpha_m^2-\alpha_m)R)(a_j+a_k)}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|(1+R|\vec{x}_j-\vec{x}_k|)} \right] + M_R''\,. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (23) следует, что найдется такое $R_0 > 1$, что при $R > R_0$

$$T(\vec{x}) \le \sum_{j<k} \left(\frac{m(4-m)}{4} \frac{a_j+a_k}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|^2} + \frac{(2M_1-(6-m)R)(a_j+a_k)}{2|\vec{x}_j-\vec{x}_k|} \right) + C_R\,. \tag{25}$$

При $m \leq 5$ можно выбрать $R > R_0$ настолько большим, чтобы было выполнено неравенство $(6-m)R - 2M_1 \geq 2\gamma$. Тогда при выполнении условия (20) будет выполнено неравенство (7) с константой $M = C_R + K$, т.е. по теореме 3 оператор H самосопряжен в существенном. При $m \geq 6$ из (25) следует, что условие (7) будет выполнено, если имеет место (20) с $\gamma < -S_m = \frac{1}{2}(6-m)R_0 - M_1$. Теорема 4 доказана.

4. Пусть $G = \{x \in R^n, x_j > 0, j = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим в $L_2(G)$ оператор L вида (1) с матрицей $A(x) = diag\{x_1^{2k_1}, x_2^{2k_2}, \ldots, x_n^{2k_n}\}$. Обозначим этот оператор через $S^{(k)}$. Из теоремы 3 аналогично доказательству следствия 5 из [10] может быть получена

Теорема 5. *Если в операторе $S^{(k)}$ k_j $(j = \overline{1,n})$ — любые вещественные числа, а его потенциал $q(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \geq \sum_{k_j \neq 1} \left(\frac{3}{4} - k_j\right) x_j^{-2+2k_j} - K \tag{26}$$

с некоторым $K \geq 0$, то оператор $S^{(k)}$ самосопряжен в существенном.

С помощью способа, который использован в замечании 2, можно установить, что при $\vec{b}(x) = \vec{0}$ ни одну из констант $\frac{3}{4} - k_j$ в (26) нельзя уменьшить ни при каком $k_j \neq 1$. Ненулевые индексы дефекта у оператора $S^{(k)}$ могут появляться при нарушении условий (26) как у конечной части границы, так и на бесконечности.

Автор выражает благодарность Ф.С. Рофе-Бекетову и Х. Кальфу за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] *М. Рид, Б. Саймон,* Методы современной математической физики, Мир, Москва (1978), т. 2, 395 с.

[2] *K. Jörgens,* Wesentliche Selbstadjugiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in $C_0^\infty(G)$. — Math. Scand., v. 15 (1964), S. 5–17.

[3] *B. Simon,* Essential self-adjointness of Schrödinger-operators with singular potentials : A Generalized Kalf–Walter–Schmincke theorem. — Arch. Rational Mech. Anal. (1973), v. 52, p. 258–260.

[4] *H. Kalf and J. Walter,* Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators on $C_0^\infty(R^n \backslash 0)$. — J. Funct. Analysis (1972), v. 10, p. 114–130.

[5] *U.-W. Smincke,* Essential self-adjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential. — Math. Z. (1972), v. 124, p. 47–50.

[6] *K. Friedrichs*, Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der helbbeschränkten gewonlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. — Math. Ann. (1935/36), Bd. 122, S. 1–23.

[7] *J. Walter*, Note on a paper by Stetkaer–Hansen concerning essential self-adjointnes of Schrödinger operators. — Math. Scand. (1969), v. 25, p. 94–96.

[8] *H. Tribel*, Erzeugung nuklearer lokalkonvexer Räume durch singuläre Differential-operatoren Zweiter Ordnung. — Math. Ann. (1967), Bd. 174, S. 163–176.

[9] *B. Hellwig*, A criterion for self-adjointness of singular elliptic differential operators. — J. Math. Anal. Appl. (1969), v. 26, No. 2, p. 279–291.

[10] *А.Г. Брусенцев*, О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов второго порядка, не подчиненных условию полноты риманова многообразия. — Мат. физ., анализ, геом. (1995), т. 2, № 2, с. 152–167.

[11] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем R^n. 1. Второй порядок. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1990), вып. 54, с. 3–16.

[12] *A. Devinatz*, Essential self-adjointness of Schrödinger-type operators. — J. Funct. Anal. (1977), v. 25, No. 1, p. 58–69.

[13] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Замечания в связи с многомерным обобщением теоремы Вейля о самосопряженности. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1989), вып. 52, с. 88–90.

[14] *Ю.М. Березанский, В.Г. Самойленко*, Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 5, с. 3–56.

[15] *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва (1973), 342 с.

[16] *Ю.М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев (1965), 798 с.

[17] *И.Д. Чуешов*, Замечание об операторе Шредингера с высокосингулярным потенциалом. — Функц. анализ и его прил. (1981), т. 15, № 4, с. 93–94.

[18] *И.Д. Чуешов*, О существенных областях определения оператора Шредингера с высокосингулярным потенциалом парного взаимодействия. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1981), вып. 36, с. 111–124.

[19] *M. Combescure-Moulin and J. Grinibre*, Essential self-adjointness of many particle Schrödinger Hamiltonians with singular two-body potentials. — Ann. Inst. H. Poincaré (1975), v. A 23, p. 211–234.

Near boundary behavior of elliptic operator potential garanteeing its essential self-adjointness

A.G. Brusentsev

For the class of elliptic operations in space $L_2(G)$ (G is an arbitrary open set in R^N), containing the Schrödinger operator with electromagnetic potential, conditions are obtained on near boundary behavior of the coefficients under which the operator was essential self-adjoint on $C_0^\infty(G)$. The closeness of the sufficient conditions derived to the necessary ones is discussed by examples.

Приграничнa поведінка потенціалу еліптичного оператора, що гарантує його самоспряженість в істотному

О.Г. Брусенцев

Для класу еліптичних операторів в $L_2(G)$ (G — довільна відкрита множина в R^N), що вміщує оператор Шредінгера з електромагнітним потенціалом, одержано умови на приграничну поведінку коефіцієнтів, при яких оператор самоспряжений в істотному на $C_0^\infty(G)$. На прикладах обмірковується близкість одержаних достатніх умов до необхідних.