Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 3/4, с. 182–202

Прямая и обратная задачи спектрального анализа для пятидиагональных симметрических матриц. I

М.А. Кудрявцев

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

E-mail: kudryavtsev@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 ноября 1997 года

Рассматриваются пятидиагональные самосопряженные матрицы конечного порядка. Вводится понятие спектральной функции, связанной с разложением по собственным векторам этих матриц. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять неубывающая матрица-функция для того, чтобы она была спектральной, и дается метод восстановления этой пятидиагональной матрицы.

Введение

Прямая и обратная задачи спектрального анализа для трехдиагональных (якобиевых) симметрических матриц вида

$$J_N = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b_k \neq 0,\ k = 0, 1, \dots, N-2\,,$$

хорошо известны (см., например, [1, 2]). Собственные векторы J_N удовлетворяют уравнению

$$(J_N - \lambda I)\vec{y} = 0,\ \vec{y} = (y(0), y(1), \dots, y(N-1))^{\mathrm{T}}\,.$$

В покоординатной записи это означает

$$a_0 y(0) + b_0 y(1) = \lambda y(0), \tag{0.1.1}$$

$$b_{k-1}y(k-1)+a_ky(k)+b_ky(k+1)=\lambda y(k),\quad k=1,2,\ldots,N-2, \tag{0.1.2}$$

$$b_{N-2}y(N-2)+a_{N-1}y(N-1)=\lambda y(N-1). \tag{0.1.3}$$

Для каждого λ у системы (0.1.1), (0.1.2) существует одно линейно независимое решение $P(0,\lambda), P(1,\lambda),\ldots,P(N-1,\lambda)$, заданное начальным условием $P(0,\lambda)=d$, $d\neq 0$. Это решение является полиномом от λ степени $\deg P(k,\lambda)=k$, $k=0,1,2,\ldots$. Координаты собственных векторов получаются из $P(k,\lambda)$, если вместо λ подставить собственные значения.

Матрица J_N имеет простой спектр $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, совпадающий с корнями полинома $Q(\lambda)=(\lambda-a_{N-1})P(N-1,\lambda)-b_{N-2}P(N-2,\lambda)$. Ортонормированный базис собственных векторов состоит из векторов $\frac{\vec{P}(\lambda_j)}{\|\vec{P}(\lambda_j)\|}$, $j=1,\ldots,N$, где $\vec{P}(\lambda)=(P(0,\lambda),P(1,\lambda),\ldots,P(N-1,\lambda))^{\mathrm{T}}$.

Спектральная функция $\rho(\lambda)$ матрицы J_N определяется формулой

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_j<\lambda}\|\vec{P}(\lambda_j)\|^{-2},\quad -\infty<\lambda<\infty\,.$$

Это неубывающая кусочно-постоянная функция с N скачками в точках λ_j, нормированная условием $\rho(-\infty)=0$. Оператор

$$U\vec{x}=\widetilde{x}(\lambda)=\sum_{k=0}^{N-1}x_kP(k,\lambda),\quad \vec{x}=(x(0),x(1),\ldots,x(N-1))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{H}_N\,,$$

взаимнооднозначно отображает исходное N-мерное евклидово пространство $\mathbf{H}_N$ в пространство $\mathbf{P}_N$ полиномов степени не выше $N-1$.

Формулы разложения по собственным векторам матрицы J_N имеют вид

$$x_k=\int\widetilde{x}(\lambda)d\rho(\lambda)P(k,\lambda),\quad (J_N\vec{x})_k=\int\lambda\widetilde{x}(\lambda)d\rho(\lambda)P(k,\lambda),$$

откуда следует равенство Парсеваля

$$(\vec{x},\vec{y})=\int\widetilde{x}(\lambda)d\rho(\lambda)\widetilde{y}(\lambda).$$

Поэтому U является унитарным оператором, отображающим евклидово пространство $\mathbf{H}_N$ в пространство $\mathbf{P}_N$ со скалярным произведением

$$(R(\lambda),S(\lambda))_\rho=\int_{-\infty}^{\infty}R(\lambda)d\rho(\lambda)S(\lambda). \tag{0.2}$$

Обратная задача состоит в восстановлении J_N по заданной спектральной функции. Она решается методом ортогонализации системы степеней $1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{N-1}$ относительно скалярного произведения (0.2).

Характеризация спектральных функций якобиевых матриц получается автоматически: *для того чтобы* $\rho(\lambda)$ *была спектральной функцией некоторой якобиевой матрицы, необходимо и достаточно, чтобы она не убывала и при этом имела* N *скачков*. Простота этой формулировки обусловлена тем, что якобиевы матрицы имеют только простые собственные значения.

В данной работе рассматривается аналогичная задача для пятидиагональных симметрических матриц конечного порядка

$$J_N = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad c_k \neq 0, \ k = 0, 1, 2, \dots, N-3. \tag{0.3}$$

Эти матрицы являются дискретным аналогом дифференциальных операторов четвертого порядка. Сами же они описывают колебания системы точечных масс, каждая из которых упруго связана с двумя ближайшими соседями.

В данном случае аналогом системы уравнений (0.1.1) и (0.1.2) является система, имеющая два линейно независимых решения $P^{(1)}(k,\lambda), P^{(2)}(k,\lambda)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, которые можно выбрать, задавая начальные условия

$$P^{(1)}(0,\lambda) = d_{11}, \ P^{(1)}(1,\lambda) = d_{12}, \ P^{(2)}(0,\lambda) = 0, \ P^{(2)}(1,\lambda) = d_{22}, \ d_{11}d_{22} \neq 0. \tag{0.4}$$

Решения $P^{(l)}(k,\lambda)$ полиномиально зависят от λ. Матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}, \quad d_{lk} \in \mathbf{R}, \ d_{11}d_{22} \neq 0\,,$$

будем называть матрицей начальных условий.

Рассмотрим пространство $\mathbf{Q}_N := \mathbf{P}_{N/2} \times \mathbf{P}_{N/2}$ (в случае четного N), элементами которого являются вектор-функции $r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}$, где $R^{(1)}, R^{(2)}$ — полиномы степени не выше $\frac{N}{2} - 1$. Так же, как это делается для матриц Якоби, определяются отображение

$$U\vec{x} = \widetilde{x}(\lambda) = ((U\vec{x})^{(1)}(\lambda), (U\vec{x})^{(2)}(\lambda))^{\mathrm{T}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)p(k,\lambda)$$

$$(\vec{x} = (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}_N; \ p(k,\lambda) = \begin{pmatrix} P^{(1)}(k,\lambda) \\ P^{(2)}(k,\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_N)$$

пространства $\mathbf{H}_N$ в $\mathbf{Q}_N$ и спектральная матрица $\sigma(\lambda)$ — кусочно-постоянная матрица-функция 2×2 с неотрицательными скачками в точках спектра матрицы J_N. Оператор U является унитарным отображением пространства $\mathbf{H}_N$ на пространство $\mathbf{Q}_N$ со скалярным произведением

$$< r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = \int (r(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) s(\lambda). \tag{0.5}$$

Восстановление J_N и D по спектральной функции проводится методом ортогонализации системы вектор-функций $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda^2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^2\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\lambda^{N/2-1}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{N/2-1}\end{pmatrix}$, образующей базис пространства $\mathbf{Q}_N$.

Существенное отличие от случая трехдиагональных матриц Якоби возникает при отыскании необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять $\sigma(\lambda)$ для того, чтобы быть спектральной функцией некоторой пятидиагональной матрицы. Из анализа прямой задачи следует, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ пятидиагональной матрицы порядка N удовлетворяет следующему условию (A): $\sigma(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — *неубывающая кусочно-постоянная матрица-функция второго порядка, причем сумма рангов ее скачков равна* N, *а* $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty)$ *невырожденна.* Эти условия аналогичны соответствующим условиям для спектральных функций якобиевых матриц. Однако теперь эти условия недостаточны.

Приведем соответствующий контрпример. Пусть $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)$ и $\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$ — полиномы степеней $\deg\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \le n-1$, $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \le n-1$, не имеющие общих корней. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ $(N = 2n)$ — произвольная последовательность точек вещественной оси. Матрица-функция

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} k_j \| \widetilde{Q}^{(l)}(\lambda_j) \widetilde{Q}^{(k)}(\lambda_j) \|_{l,k=1}^2,$$

где k_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, — произвольные строго положительные числа, удовлетворяет условию (A), но билинейная форма (0.5) вырожденна в пространстве $\mathbf{Q}_N$. Действительно, если $r(\lambda) = \begin{pmatrix} -\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \\ \widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \end{pmatrix}$, $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_N$, то, как легко проверить,

$$< r, r >_\sigma = \int r^{\mathrm{T}} d\sigma r = 0.$$

Так как спектральные функции порождают *невырожденное* скалярное произведение в $\mathbf{Q}_N$, то $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (A), но не является спектральной. Для того чтобы быть спектральной, кроме условия (A) $\sigma(\lambda)$ должна удовлетворять условию (B): *билинейная форма (0.5) является невырожденным скалярным произведением в* $\mathbf{Q}_N$. Именно это условие позволяет использовать метод ортогонализации при решении обратной задачи.

Если условие (A) вполне конструктивно, то условие (B) является неэффективным, так как по виду неубывающей функции не ясно, удовлетворяет ли она ему или нет. Цель работы состоит в нахождении условий, которым должна удовлетворять $\sigma(\lambda)$, чтобы для нее выполнялись как условие (A), так и условие (B). Решение этой задачи содержится в теореме 2.1.

Работа построена следующим образом. В первой части, в п. 1, рассматривается прямая задача спектрального анализа для пятидиагональных матриц и устанавливаются свойства спектральной функции. В пункте 2 доказывается, что эти свойства являются не только необходимыми, но и достаточными, и решается обратная задача.

Во второй части работы, в пп. 5, 6, эти результаты будут обобщены на полубесконечные пятидиагональные матрицы. В пунктах 3, 4 рассматриваются неубывающие функции, обладающие только свойством (A), и доказывается, что все такие функции являются спектральными функциями пятидиагональных матриц J_{N,N_1}, у которых на крайних диагоналях возможно появление нулей:

$$c_0, c_1, \ldots, c_{N_1-3} \neq 0,\ c_{N_1-2} = \ldots = c_{N-3} = 0,\ b_{N_1-1}, \ldots, b_{N-2} \neq 0, \quad N_1 \geq 2.$$

В пункте 7 содержится обобщение пп. 5, 6 на полубесконечный случай.

Результаты работы обобщаются на матрицы с $(2n+1)$ диагоналями, однако соответствующие формулировки становятся весьма громоздкими, так как в этом случае могут возникать спектры любой кратности от 1 до n.

Отметим некоторые принятые в работе обозначения. Через $\mathbf{P}_\infty$ обозначается пространство всех полиномов, а через $\mathbf{P}_i$ — его подпространство полиномов степени не выше $(i-1)$. Элементы этих пространств будем обозначать прописными латинскими буквами: $R(\lambda), S(\lambda) \in \mathbf{P}_\infty$.

Элементы пространств

$$\mathbf{Q}_\infty := \mathbf{P}_\infty \times \mathbf{P}_\infty,$$

$$\mathbf{Q}_N := \mathbf{P}_{n+1} \times \mathbf{P}_n, \quad N = 2n+1,$$

$$\mathbf{Q}_N := \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n, \quad N = 2n,$$

двумерных полиномиальных вектор-функций обозначаем соответствующими строчными латинскими буквами. Именно, $r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_N$, $N = 2n+1$, означает, что $R^{(1)}(\lambda)$ и $R^{(2)}(\lambda)$ — полиномы со степенями $\deg R^{(1)}(\lambda) \leq n$ и $R^{(2)}(\lambda) \leq n-1$.

Введем двумерные векторы $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда двумерные вектор-функции f_1, f_2, λf_1, λf_2, $\lambda^2 f_1$, $\lambda^2 f_2$, $\lambda^3 f_1$, $\lambda^3 f_2$, $\ldots$ образуют базис пространства $\mathbf{Q}_\infty$, а первые N вектор-функций этого набора — базис $\mathbf{Q}_N$.

Поскольку встречающиеся интегралы берутся по всей вещественной оси, мы опускаем пределы интегрирования.

Для простоты записей ограничиваемся вещественными матрицами.

1. Прямая задача спектрального анализа

Координаты любого собственного вектора $\vec{y} = (y(0), y(1), \ldots, y(N-1))^{\mathrm{T}}$ матрицы (0.3), отвечающего собственному значению λ, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_0y(0) + b_0y(1) + c_0y(2) = \lambda y(0), \\ b_0y(0) + a_1y(1) + b_1y(2) + c_1y(3) = \lambda y(1), \\ c_0y(0) + b_1y(1) + a_2y(2) + b_2y(3) + c_2y(4) = \lambda y(2), \\ \vdots \\ c_{k-2}y(k-2) + b_{k-1}y(k-1) + a_ky(k) + b_ky(k+1) + c_ky(k+2) = \lambda y(k), \\ \vdots \\ c_{N-5}y(N-5) + b_{N-4}y(N-4) + a_{N-3}y(N-3) + b_{N-3}y(N-2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + c_{N-3}y(N-1) = \lambda y(N-3), \\ c_{N-4}y(N-4) + b_{N-3}y(N-3) + a_{N-2}y(N-2) + b_{N-2}y(N-1) = \lambda y(N-2), \\ c_{N-3}y(N-3) + b_{N-2}y(N-2) + a_{N-1}y(N-1) = \lambda y(N-1). \end{cases} \tag{1.1}$$

Обозначим первые $(N-2)$ уравнения этой системы через (1.1.1). Рассмотрим фундаментальную систему уравнения (1.1.1) — два решения $P^{(1)}(k,\lambda)$ и $P^{(2)}(k,\lambda)$, заданные начальными условиями (0.4). Последовательно определенные из (1.1.1) $P^{(l)}(k,\lambda)$, $l = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, полиномиально зависят от λ.

При всех λ векторы $\overrightarrow{P^{(l)}}(\lambda) = (P^{(l)}(0,\lambda), \ldots, P^{(l)}(N-1,\lambda))^{\mathrm{T}}$, $l = 1, 2$, удовлетворяют уравнению

$$(J_N - \lambda I)\overrightarrow{P^{(l)}}(\lambda) = (J_N - \lambda I)\begin{pmatrix} P^{(l)}(0,\lambda) \\ \vdots \\ \vdots \\ P^{(l)}(N-1,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_1^{(l)}(\lambda) \\ Q_2^{(l)}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$Q_1^{(l)}(\lambda) = -c_{N-4}P^{(l)}(N-4,\lambda) - b_{N-3}P^{(l)}(N-3,\lambda) \\ -(a_{N-2}-\lambda)P^{(l)}(N-2,\lambda) - b_{N-2}P^{(l)}(N-1,\lambda), \tag{1.2.1}$$

$$Q_2^{(l)}(\lambda) = -c_{N-3}P^{(l)}(N-3,\lambda) - b_{N-2}P^{(l)}(N-2,\lambda) - (a_{N-1}-\lambda)P^{(l)}(N-1,\lambda). \tag{1.2.2}$$

Степени $P^{(l)}(k,\lambda), Q_1^{(l)}(\lambda), Q_2^{(l)}(\lambda)$ приведены в таблице. Для $N = 2n+1$:

Полином		$P^{(l)}(0,\lambda)$	$P^{(l)}(1,\lambda)$	$P^{(l)}(2,\lambda)$	$P^{(l)}(3,\lambda)$	$P^{(l)}(4,\lambda)$	$\ldots$
Сте-	$l=1$	$=0$	≤ 0	$=1$	≤ 1	$=2$	$\ldots$
пень	$l=2$	–	$=0$	≤ 0	$=1$	≤ 1	$\ldots$

$P^{(l)}(2k,\lambda)$	$P^{(l)}(2k+1,\lambda)$	$\ldots$	$P^{(l)}(N-1=2n,\lambda)$	$Q_1^{(l)}(\lambda)$	$Q_2^{(l)}(\lambda)$
$=k$	$\leq k$	$\ldots$	$=n$	$\leq n$	$=n+1$
$\leq k-1$	$=k$	$\ldots$	$\leq n-1$	$=n$	$\leq n$

В случае четного $N = 2n$ $\deg P^{(1)}(N-1=2n-1) \leq n-1, \deg Q_1^{(2)}(\lambda) \leq n-1$, $\deg P^{(2)}(N-1) = n-1$, $\deg Q_1^{(1)}(\lambda) = \deg Q_2^{(2)}(\lambda) = n$, $\deg Q_2^{(1)}(\lambda) \leq n$.

Поскольку рассуждения в случае четного и нечетного N в существенном одинаковы, далее ограничимся только случаем нечетного $N = 2n+1$.

Лемма 1.1. *Кратность собственных значений матрицы J_N не превышает двух. Простые (двукратные) собственные значения совпадают с простыми (двукратными) корнями полинома*

$$Q(\lambda) = Q_1^{(1)}(\lambda)Q_2^{(2)}(\lambda) - Q_1^{(2)}(\lambda)Q_2^{(1)}(\lambda).$$

Таким образом, полином $Q(\lambda)$ пропорционален характеристическому.

Доказательство. Если λ_0 — собственное значение матрицы J_N и $\vec{y} = (y(0), y(1), \ldots, y(N-1))^{\mathrm{T}}$ — отвечающий ему собственный вектор, то числа $y(0), y(1), \ldots, y(N-1)$ являются решениями системы (1.1). Поскольку линейно независимые решения $P^{(1)}(k,\lambda_0)$ и $P^{(2)}(k,\lambda_0)$ образуют фундаментальную систему уравнения (1.1.1), то $\vec{y}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda_0)$ и $\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda_0)$. Поэтому не может быть более двух линейно независимых собственных векторов, отвечающих одному собственному значению.

Выделим ортонормированную систему $\{e_j\}_{j=1}^N$ собственных векторов симметрической матрицы J_N, соответствующих собственным значениям $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$, которые, как уже сказано, повторяются не более чем дважды:

$$\vec{e}_j = \alpha_j^{(1)}\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)}\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda_j), \quad (\alpha_j^{(1)})^2 + (\alpha_j^{(2)})^2 \neq 0\,.$$

Так как эти вектора — собственные, то

$$(J-\lambda I)\vec{e}_{\lambda_j} = (J-\lambda I)[\alpha_j^{(1)}\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)}\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda_j)] = 0\,.$$

Сравнивая последнее равенство с (1.2), получаем

$$\alpha_j^{(1)}Q_i^{(1)}(\lambda_j)+\alpha_j^{(2)}Q_i^{(2)}(\lambda_j)=0,\quad i=1,2\,. \tag{1.3.1}$$

Значит, если λ_j — простая точка спектра, то, так как $(\alpha_j^{(1)})^2+(\alpha_j^{(2)})^2>\ 0$,

$$Q_1^{(1)}(\lambda_j)Q_2^{(2)}(\lambda_j)-Q_1^{(2)}(\lambda_j)Q_2^{(1)}(\lambda_j)=0,$$

т.е. λ_j является корнем полинома $Q(\lambda)$.

Пусть теперь $\lambda_j=\lambda_{j+1}$ — двукратное собственное значение. Из линейной независимости $\vec{e}_j$ и $\vec{e}_{j+1}$ следует невырожденность матрицы $\begin{pmatrix}\alpha_j^{(1)} & \alpha_j^{(2)}\\ \alpha_{j+1}^{(1)} & \alpha_{j+1}^{(2)}\end{pmatrix}$. Соотношения (1.3.1) для $\lambda_j=\lambda_{j+1}$ можно переписать как

$$\begin{pmatrix}\alpha_j^{(1)} & \alpha_j^{(2)}\\ \alpha_{j+1}^{(1)} & \alpha_{j+1}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_i^{(1)}(\lambda_j)\\ Q_i^{(2)}(\lambda_j)\end{pmatrix}=0,\quad i=1,2,$$

откуда

$$Q_1^{(1)}(\lambda_j)=Q_1^{(2)}(\lambda_j)=Q_2^{(1)}(\lambda_j)=Q_2^{(2)}(\lambda_j)=0. \tag{1.3.2}$$

Это означает, что λ_j является корнем $Q(\lambda)$ не менее чем второй кратности.

Итак, двукратные собственные значения матрицы J_N являются не менее чем двукратными корнями полинома $Q(\lambda)$, а простые собственные значения являются корнями этого полинома. Но $Q(\lambda)$ имеет в точности N-ю степень! В то же время N его корней мы уже указали: это все собственные значения матрицы J_N. Следовательно, других корней у $Q(\lambda)$ быть не может. ■

Рассмотрим отображение $U:\mathbf{H}_N\to\mathbf{Q}_N$, заданное равенством

$$U\vec{x}=\widetilde{x}(\lambda)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)p(k,\lambda)$$

$$(\vec{x}=(x(0),x(1),\ldots,x(N-1))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{H}_N;\ p(k,\lambda)=\begin{pmatrix}P^{(1)}(k,\lambda)\\ P^{(2)}(k,\lambda)\end{pmatrix}\in\mathbf{Q}_N).$$

Вектор-функцию $\widetilde{x}(\lambda)$ назовем преобразованием Фурье.

Лемма 1.2. *Отображение U является взаимно однозначным.*

Доказательство. Для установления взаимнооднозначности достаточно доказать, что система вектор-функций $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{N-1}\subset\mathbf{Q}_N$ образует базис $\mathbf{Q}_N$. Доказательство будем проводить по индукции. Индуктивное предположение состоит в том, что $\{p(i,\lambda)\}_{i=0}^{k-2}$ образуют базис пространства $\mathbf{Q}_{k-1}$. Требуется доказать, что $\{p(i,\lambda)\}_{i=0}^{k-1}$ образуют базис пространства $\mathbf{Q}_k$.

При $k = 1$ утверждение очевидно: все элементы $\mathbf{Q}_1$ пропорциональны $p(0,\lambda)$. Проведем индуктивный переход от нечетного $k-1$ к четному $k = 2m$. Докажем, что любой элемент $\mathbf{Q}_k$ представи́м в виде линейной комбинации k векторов $p(0,\lambda), p(1,\lambda), \ldots, p(k-1,\lambda)$. Это достаточно показать для элементов базиса f_1, f_2, λf_1, λf_2, $\lambda^2 f_1$, $\lambda^2 f_2, \ldots$, $\lambda^{m-1} f_1$, $\lambda^{m-1} f_2$ пространства $\mathbf{Q}_k$. Все они, кроме последнего, принадлежат $\mathbf{Q}_{k-1}$. Поэтому осталось лишь убедиться, что $\lambda^{m-1} f_2$ принадлежит линейной оболочке $p(0,\lambda), p(1,\lambda), \ldots, p(k-1,\lambda)$. Обозначим через g_{k-1} старший коэффициент полинома $P^{(2)}(k-1,\lambda)$ ($g_{k-1} \neq 0$ в силу того, что $\deg P^{(2)}(k-1,\lambda) = m-1$). Тогда

$$\deg(\lambda^{m-1} - \frac{1}{g_{k-1}} P^{(2)}(k-1,\lambda)) \leq m-2\,.$$

Таким образом,

$$\lambda^{m-1} f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{k-1}} p(k-1,\lambda) + r(k-1,\lambda),$$

где $\deg(R^{(1)}(k-1,\lambda)) = \deg(-\frac{1}{g_{k-1}} P^{(1)}(k-1,\lambda)) \leq m-1$, $\deg(R^{(2)}(k-1,\lambda)) \leq m-2$, т.е. $r(k-1,\lambda)$ принадлежит пространству $\mathbf{Q}_{k-1}$, относительно которого применимо индуктивное предположение. Значит, $r(k-1,\lambda)$ представима в виде линейной комбинации $p(0,\lambda)$, $p(1,\lambda), \ldots$, $p(k-2,\lambda)$. ■

Определение. *Спектральной функцией матрицы J_N называется матрица-функция $\sigma_D(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, второго порядка, определенная равенством*

$$\sigma_D(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} \|\alpha_j^{(l)} \alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 .$$

Заметим, что $\sigma_D(-\infty) = 0$ и в простой точке спектра скачок σ_D равен неотрицательной вырожденной матрице $\|\alpha_j^{(l)} \alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2$, а в кратной точке $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ — строго положительной матрице $\|\alpha_j^{(l)} \alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 + \|\alpha_{j+1}^{(l)} \alpha_{j+1}^{(k)}\|_{l,k=1}^2$.

Теорема 1.1. *Каждой матрице начальных данных D соотвествует спектральная функция $\sigma_D(\lambda)$ матрицы J_N, такая что*

$$x(k) = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) p(k,\lambda), \quad (J_N \vec{x})(k) = \int \lambda \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) p(k,\lambda),$$

$$(\vec{x},\vec{y})_{\mathbf{H}_N} = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) \widetilde{y}(\lambda). \tag{1.4}$$

Доказательство. Любой вектор $\vec{x} \in \mathbf{H}_N$ можно разложить по ортонормированному базису $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^N$ собственных векторов:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{N} (\vec{x}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (\sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_j^{(1)} P_k^{(1)}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)} P_k^{(2)}(\lambda_j)) x_k) \ (\alpha_j^{(1)} \overrightarrow{P_k^{(1)}}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)} \overrightarrow{P_k^{(2)}}(\lambda_j)) \, .$$

Покоординатно, с учетом определения σ, это означает

$$x(k) = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{x}(\lambda_j)^{\mathrm{T}} \|\alpha_j^{(l)} \alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 p(k, \lambda_j) = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) p(k, \lambda) \, .$$

Аналогично, действие оператора J_N на векторы можно представить как

$$(J_N \vec{x})(k) = (\sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\vec{x}, \vec{e}_j)\vec{e}_j)(k) = \int \lambda \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) p(k, \lambda).$$

Наконец, проверяется *равенство Парсеваля* (1.4):

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbf{H}_N} = \sum_{0}^{N-1} x(k) y(k)$$

$$= \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) (\sum_{0}^{N-1} y(k) p(k, \lambda)) = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) \widetilde{y}(\lambda) \, .$$

■

Следствие. *Спектральная функция порождает в пространстве $\mathbf{Q}_N$ невырожденное скалярное произведение (0.5), и преобразование U—унитарный оператор, отображающий евклидово пространство $\mathbf{H}_N$ на евклидово пространство $\mathbf{Q}_N(\sigma_D)$.* (Через $\mathbf{Q}_N(\sigma_D)$ обозначено векторное пространство $\mathbf{Q}_N$ со скалярным произведением (0.5).) Это скалярное произведение, очевидно, удовлетворяет свойству

$$< \lambda r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = < \lambda s(\lambda), r(\lambda) >_\sigma, \quad r(\lambda), s(\lambda) \in \mathbf{Q}_{N-2}. \tag{1.5}$$

Отметим некоторые элементарные свойства спектральной функции:

1) $D^T (\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_D(\lambda)) D = I$ (следует из применения (1.4) к $p(0, \lambda)$ и $p(1, \lambda)$).

2) Спектральная матрица имеет скачки в простых точках спектра — ранга 1, в двукратных — ранга 2; таким образом, сумма рангов ее скачков равна N. В дальнейшем о кусочно-постоянных матрицах-функциях, у которых

сумма рангов скачков равна N, будем говорить, что они имеют N скачков с учетом кратности.

3) Формулой (0.5) функция $\sigma_J(\lambda)$ задает неотрицательную билинейную форму на всем пространстве $\mathbf{Q}_\infty$. Из соотношений (1.3) следует, что

$$< q_i(\lambda), r(\lambda) >_{\sigma_J} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (q_i(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda) r(\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \; r(\lambda) \in \mathbf{Q}_N, \tag{1.6}$$

где $q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda) \\ Q_1^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}$ и $q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda) \\ Q_2^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}$. Вектор-функции $q_i(\lambda) \in \mathbf{Q}_{N+2}$, но не принадлежат пространству $\mathbf{Q}_N$.

Теорема 1.2 (вид спектральной матрицы). *Пусть матрица J_N имеет $(2m+1)$ простых собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{2m+1}$ и p — двукратных $\nu_1, \ldots, \nu_p$ $(N = (2m+1) + 2p)$. Тогда существуют действительные полиномы $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda), \widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$: $\deg \widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \le m$, $\deg \widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) = m + 1$, не имеющие общих корней, такие что*

$$\sigma_D(\lambda) = \sum_{\mu_j < \lambda} k_j \| \widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j) \widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j) \|_{l,k=1}^2 + \sum_{\nu_i < \lambda} C_i, \tag{1.7}$$

где k_j — строго положительные числа, а C_i— строго положительные матрицы 2×2.

Доказательство. Так как спектральная матрица кусочно-постоянна и имеет скачки только в точках спектра, то

$$\sigma_D(\lambda) = \sum_{\mu_j < \lambda} d\sigma_D(\mu_j) + \sum_{\nu_i < \lambda} d\sigma_D(\nu_i)\,.$$

Положим $C_i := d\sigma_D(\nu_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Как и требовалось, C_i — строго положительные матрицы 2×2.

Полиномы $Q_i^{(l)}$, $i, l = 1, 2$, определенные в (1.2), удовлетворяют (1.3.1):

$$\alpha_j^{(1)} Q_1^{(1)}(\mu_j) + \alpha_j^{(2)} Q_1^{(2)}(\mu_j) = 0,$$

$$\alpha_j^{(1)} Q_2^{(1)}(\mu_j) + \alpha_j^{(2)} Q_2^{(2)}(\mu_j) = 0.$$

В кратных точках спектра $Q_1^{(1)}$, $Q_1^{(2)}$, $Q_2^{(1)}$, $Q_2^{(2)}$ обращаются в нуль. Следовательно, сократив их на $\prod_{\nu_i} (\lambda - \nu_i)$, снова получим полиномы $\widetilde{Q}_1^{(1)}$, $\widetilde{Q}_1^{(2)}$, $\widetilde{Q}_2^{(1)}$, $\widetilde{Q}_2^{(2)}$, которые будут иметь степени $\deg \widetilde{Q}_1^{(1)} \le m$, $\deg \widetilde{Q}_1^{(2)} = m$, $\deg \widetilde{Q}_2^{(1)} = m+1$, $\deg \widetilde{Q}_2^{(2)} \le m$ и которые в простых точках спектра будут удовлетворять тем же соотношениям (1.3.1), что и $Q_1^{(1)}$, $Q_1^{(2)}$, $Q_2^{(1)}$, $Q_2^{(2)}$.

Векторы двумерного пространства $\begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1^{(1)}(\mu_j) \\ \widetilde{Q}_1^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \widetilde{Q}_2^{(1)}(\mu_j) \\ \widetilde{Q}_2^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix}$ линейно зависимы и в то же время не равны одновременно нулевым векторам (иначе μ_j была бы двукратной точкой спектра, а не простой). Это значит, что для каждой точки μ_j существует одно и только одно число β_j, $0 \le \beta_j < \pi$, для которого

$$\cos\beta_j \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1^{(1)}(\mu_j) \\ \widetilde{Q}_1^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix} + \sin\beta_j \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_2^{(1)}(\mu_j) \\ \widetilde{Q}_2^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, взяв число β, $0 < \beta < \pi$, не равное ни одному из β_j, получим, что полиномы $\cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(1)}(\lambda) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(1)}(\lambda)$ и $\cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(2)}(\lambda) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(2)}(\lambda)$ не имеют общих корней в простых точках спектра μ_j.

Покажем, что у них нет и других общих корней. Если для некоторого λ_0

$$\cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(1)}(\lambda_0) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(1)}(\lambda_0) = \cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(2)}(\lambda_0) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(2)}(\lambda_0) = 0,$$

то

$$\widetilde{Q}_1^{(1)}(\lambda_0)\widetilde{Q}_2^{(2)}(\lambda_0) - \widetilde{Q}_2^{(1)}(\lambda_0)\widetilde{Q}_1^{(2)}(\lambda_0) = 0,$$

т.е., по лемме 1.1, λ_0 — собственное значение матрицы J_N. Поскольку $\lambda_0 \ne \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, 2m+1$, то это может быть только одна из точек ν_i кратного спектра. Следовательно, полином $Q(\lambda) = Q_1^{(1)}(\lambda)Q_2^{(2)}(\lambda) - Q_2^{(1)}(\lambda)Q_1^{(2)}(\lambda)$ имеет нуль третьего порядка в точке $\lambda_0 = \nu_i$, что противоречит лемме 1.1.

Теперь возьмем полиномы

$$\widetilde{Q}^{(2)} = \cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(1)}(\lambda) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(1)}(\lambda), \quad \widetilde{Q}^{(1)} = -(\cos\beta\, \widetilde{Q}_1^{(2)}(\lambda) + \sin\beta\, \widetilde{Q}_2^{(2)}(\lambda)),$$

которые, как указано, не имеют общих корней. Для них

$$\alpha_j^{(1)}\widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j) - \alpha_j^{(2)}\widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j) = 0.$$

Так как $(\widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j))^2 + (\widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j))^2 > 0$, то $\begin{pmatrix} \alpha_j^{(1)} \\ \alpha_j^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{k_j} \begin{pmatrix} \widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j) \\ \widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix}$, $k_j > 0$. Тогда

$$d\sigma(\mu_j) = \|\alpha_j^{(l)}\alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 = k_j \|\widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j)\|_{l,k=1}^2.$$

■

2. Обратная задача спектрального анализа

В пункте 1 показано, что любой J_N соответствует спектральная функция $\sigma_J(\lambda)$ вида (1.7). Теперь докажем, что всякая функция такого вида является спектральной для некоторой пятидиагональной матрицы. Для этого решим обратную задачу восстановления пятидиагональной матрицы по ее спектральной функции вида (1.7).

Теорема 2.1 (основная теорема). *Для того чтобы матрица-функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка была спектральной функцией $\sigma_J(\lambda)$ некоторой матрицы J_N, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\mu_j<\lambda} k_j \|\widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j)\|^2_{l,k=1} + \sum_{\nu_i<\lambda} C_i, \tag{2.1}$$

где $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_N$ — произвольная последовательность точек вещественной оси, среди которых $2m$ однократных точек $\mu_1, \ldots, \mu_{2m+1}$ и p — двукратных $\nu_1, \ldots, \nu_p$, $N = 2m+1+2p$, $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)$, $\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$ — произвольные действительные полиномы со степенями $\deg\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \le m$, $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) = m+1$, не имеющие общих корней, k_j — произвольные положительные числа, а C_i — произвольные строго положительные матрицы второго порядка.[1]

Для доказательства достаточности потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1 (достаточное условие невырожденности скалярного произведения). *Если матрица $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то порожденная ею в $\mathbf{Q}_\infty$ билинейная форма*

$$< r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = \int (r(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) s(\lambda) \tag{2.2}$$

является невырожденным скалярным произведением в $\mathbf{Q}_N$ и

$$< \lambda r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = < \lambda s(\lambda), r(\lambda) >_\sigma, \quad r(\lambda), s(\lambda) \in \mathbf{Q}_N\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Неотрицательность формы $< \cdot, \cdot >_\sigma$ легко следует из неубывания $\sigma(\lambda)$. Предположим, что она вырождается на некоторой $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_N$:

$$0 = < r(\lambda), r(\lambda) >_\sigma = \int (r(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) r(\lambda) = \sum_{\lambda_j} (r(\lambda_j))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_j) r(\lambda_j).$$

Все слагаемые последней суммы неотрицательны в силу неубывания $d\sigma(\lambda)$ и, значит, равны нулю. Таким образом, в точках невырожденного роста σ

$$R^{(1)}(\nu_i) = R^{(2)}(\nu_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

[1] В случае четного $N = 2n = 2m + 2p$ в формулировке основной теоремы меняются только число точек μ_j (на $2m$) и степень полиномов: $\deg\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) = m$, $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \le m$.

а в однократных точках роста

$$\begin{pmatrix} R^{(1)}(\mu_j) \\ R^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} k_j \|\widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j)\|_{l,k=1}^2 \begin{pmatrix} R^{(1)}(\mu_j) \\ R^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2m+1.$$

Сократим полиномы $R^{(1)}(\lambda)$ и $R^{(2)}(\lambda)$ на $\prod_{\nu_i}(\lambda - \nu_i)$. Для полиномов $S^{(l)}(\lambda) = \frac{R^{(l)}(\lambda)}{\prod_{\nu_i}(\lambda-\nu_i)}$, $l = 1, 2$, $\deg S^{(1)}(\lambda) \leq m$ и $\deg S^{(2)}(\lambda) \leq m-1$,

$$(\prod_{\nu_i}(\mu_j - \nu_i))^2 \begin{pmatrix} S^{(1)}(\mu_j) \\ S^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} k_j \|\widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j)\|_{l,k=1}^2 \begin{pmatrix} S^{(1)}(\mu_j) \\ S^{(2)}(\mu_j) \end{pmatrix} = 0,$$

откуда

$$S^{(1)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j) + S^{(2)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2m+1.$$

Мы получили полином степени не выше чем $2m$, равный нулю в $(2m+1)$ точках. Следовательно, он тождественно равен нулю:

$$S^{(1)}(\lambda)\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) + S^{(2)}(\lambda)\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \equiv 0.$$

Поскольку $\widetilde{Q}^{(2)}$ не имеет общих корней с $\widetilde{Q}^{(1)}$, то все корни $\widetilde{Q}^{(2)}$ являются корнями $S^{(1)}$. Но $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) = m+1$, $\deg S^{(1)}(\lambda) \leq m$, откуда $S^{(1)}(\lambda) \equiv 0$. Значит, $S^{(2)}(\lambda)\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \equiv 0$. Так как $\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \not\equiv 0$, то $S^{(2)}(\lambda) \equiv 0$. То есть, $r = 0$.

Свойство (2.3) проверяется непосредственно. ■

Лемма 2.2. *Пусть в пространстве $\mathbf{Q}_N$ задано невырожденное скалярное произведение $< \cdot, \cdot >$, удовлетворяющее на $\mathbf{Q}_{N-2}$ свойству (1.5). Тогда существует пятидиагональная матрица J_N, спектральная функция $\sigma_J(\lambda)$ которой порождает в пространстве $\mathbf{Q}_N$ по формуле (2.2) исходное скалярное произведение: $< \cdot, \cdot > = < \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$.*

Элементы a_k, b_k, c_k, $k = 0, \ldots, N-3$, пятидиагональной матрицы определяются однозначно с точностью до произвольного унитарного преобразования J_N, заданного диагональной матрицей, а элементы $\widetilde{a}_{N-2}$, $\widetilde{b}_{N-2}$, $\widetilde{a}_{N-1}$ могут быть выбраны произвольно.

Следствие. *Любое невырожденное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Q}_N$, удовлетворяющее условию (1.5), можно задать формулой (2.2), где $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция некоторой пятидиагональной матрицы J_N. В частности, $\sigma(\lambda)$ имеет вид (2.1).*

Доказательство леммы 2.2. Осуществляя ортогонализацию элементов f_1, f_2, λf_1, $\lambda f_2, \ldots$, $\lambda^{n-1} f_1$, $\lambda^{n-1} f_2$, $\lambda^n f_1$, образующих базис пространства $\mathbf{Q}_N$, получим ортонормированную систему вектор-функций $\{p(k, \lambda)\}_{k=0}^{N-1}$.

Для $k \le N-3$ векторы $p(k,\lambda) \in \mathbf{Q}_{N-2}$, $\lambda p(k,\lambda) \in \mathbf{Q}_N$. Поэтому

$$\lambda p(k,\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} f_{ik} p(i,\lambda), \quad k = 0,1,\ldots,N-3, \tag{2.4}$$

где $f_{ik} =< \lambda p(k,\lambda), p(i,\lambda) >$. Причем если $i \le N-3$, то

$$f_{ik} =< \lambda p(k,\lambda), p(i,\lambda) >=< \lambda p(i,\lambda), p(k,\lambda) >= f_{ki}. \tag{2.5}$$

Если $i - k > 2$, то $\lambda p(k,\lambda)$ принадлежит $\mathbf{Q}_i$ — линейной оболочке векторов $p(0,\lambda),\ldots,p(i-1,\lambda)$. А вектор $p(i,\lambda)$ ортогонален этим векторам. Следовательно, $f_{ik} = 0$. По той же причине если $k - i > 2$, то $f_{ik} = f_{ki} = 0$.

С учетом степени полиномов $P^{(l)}(k,\lambda)$,

$$\lambda p(k,\lambda) = hp(k+2,\lambda) + r(k+1,\lambda),$$

где $h \ne 0$, $h \in \mathbf{R}$, а $r(k+1,\lambda) \in \mathbf{Q}_{k+1}$. При этом $p(k+2,\lambda)$ ортогональна $\mathbf{Q}_{k+1}$. Поэтому $< r(k+1,\lambda), p(k+2,\lambda) >= 0$ и $f_{k\ k+2} =< \lambda p(k,\lambda), p(k+2,\lambda) >= h \ne 0$.

Обозначим

$$a_k = f_{kk},\ b_k = f_{k\ k+1} = f_{k+1\ k},\ c_k = f_{k\ k+2} = f_{k+2\ k} \ne 0, \quad k = 0,1,\ldots,N-3.$$

Доопределим произвольным образом числа $\widetilde{a}_{N-2}$, $\widetilde{b}_{N-2}$ и $\widetilde{a}_{N-1}$. Разложение (2.4) означает, что $p(k,\lambda)$ удовлетворяют уравнению (1.1.1), т.е. порождены пятидиагональной матрицей J_N с так определенными a_k, b_k, c_k.

Спектральная функция σ_J матрицы J_N порождает в $\mathbf{Q}_N$ свое скалярное произведение $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$, причем $p(k,\lambda)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{Q}_N$ с этим скалярным произведением. По построению же $p(k,\lambda)$ образуют ортонормированный базис в $\mathbf{Q}_N$ и со скалярным произведением $< \cdot,\cdot >$. Следовательно, оба скалярные произведения совпадают.

Предположим теперь, что такое же скалярное произведение порождает спектральная функция $\widetilde{\sigma}_J$ другой матрицы $\widetilde{J}_N$. Матрица перехода от системы $\{p(k,\lambda)\}$ к $\{\widetilde{p}(k,\lambda)\}$ треугольна, потому что эти вектор-функции обеих систем удовлетворяют таблице степеней. Обе системы ортонормированны. Значит, их соответствующие элементы отличаются множителями, по модулю равными единице:

$$\widetilde{p}(k,\lambda) = e^{i\phi_k} p(k,\lambda) \quad (\phi_k \text{ равно нулю или } \pi).$$

Представим матрицы $J_N = \|f_{ik}\|_{i,k=0}^{N-1}$, $\widetilde{J}_N = \|\widetilde{f}_{ik}\|_{i,k=0}^{N-1}$. Их элементы однозначно определяются в (2.5). Значит, $\widetilde{f}_{ik} = e^{i(\phi_i - \phi_k)} f_{ik}$, $i,k \le N-3$. ■

Заметим, что в прямой задаче отображение U определяется вектор-функциями $p(k,\lambda)$, которые не зависят от $\widetilde{a}_{N-2}$, $\widetilde{b}_{N-2}$ и $\widetilde{a}_{N-1}$. Таким образом, и преобразование Фурье, и скалярное произведение $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$ на $\mathbf{Q}_N$ одинаковы для целого класса пятидиагональных матриц, у которых совпадают элементы a_k, b_k, c_k, $k = 0,\dots,N-3$, первых $(N-2)$-х строк. Этот класс параметризуется числами $\widetilde{b}_{N-2}$, $\widetilde{a}_{N-2}$ и $\widetilde{a}_{N-1}$, которые задают краевые условия на правом конце интервала для конечноразностного оператора, соответствующего матрице J_N. Тем самым эти три числа параметризуют неубывающие матричнозначные функции с N скачками с учетом кратности, порождающие данное скалярное произведение. Безусловно, существует бесконечно много функций с бóльшим числом скачков, порождающих это же скалярное произведение.

Доказательство теоремы 2.1. Ограничение билинейной формы (2.2) на пространство $\mathbf{Q}_N$ удовлетворяет по лемме 2.1 условиям леммы 2.2. Определим элементы a_k, b_k, c_k, $k = 0,\dots,N-3$, восстанавливаемой матрицы J_N так, как это было сделано в лемме 2.2. Доопределим

$$a_{N-2} =< \lambda p(N-2,\lambda), p(N-2,\lambda) >_\sigma,$$

$$a_{N-1} =< \lambda p(N-1,\lambda), p(N-1,\lambda) >_\sigma,$$

$$b_{N-2} =< \lambda p(N-2,\lambda), p(N-1,\lambda) >_\sigma =< \lambda p(N-1,\lambda), p(N-2,\lambda) >_\sigma \ . \tag{2.6}$$

По лемме 2.2 $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$ и $< \cdot,\cdot >$ совпадают как скалярные произведения в $\mathbf{Q}_N$. Рассмотрим вектор-функции

$$\begin{aligned} q_1(\lambda) \;&=\; -c_{N-4}p(N-4,\lambda) - b_{N-3}p(N-3,\lambda) \\ &\quad\; -(a_{N-2}-\lambda)p(N-2,\lambda) - b_{N-2}p(N-1,\lambda), \end{aligned}$$

$$q_2(\lambda) = -c_{N-3}p(N-3,\lambda) - b_{N-2}p(N-2,\lambda) - (a_{N-1}-\lambda)p(N-1,\lambda)\,.$$

Из этого определения и определения (2.6), с учетом (2.3), непосредственно получаем, что

$$< q_i(\lambda), p(k,\lambda) >_\sigma = 0, \quad i = 1,2,\ k = 0,\dots,N-1,$$

а так как $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$ — это базис $\mathbf{Q}_N$, то

$$< q_i(\lambda), r(\lambda) >_\sigma = 0, \quad i = 1,2;\ r(\lambda) \in \mathbf{Q}_N. \tag{2.7}$$

В пункте 1 были доказаны аналогичные соотношения (1.6) для $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$. Поскольку $p(0,\lambda),\dots,p(N-1,\lambda)$ и $q_1(\lambda)$, $q_2(\lambda)$ образуют базис пространства $\mathbf{Q}_{N+2}$, то нами доказано совпадение $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J} =< \cdot,\cdot >_\sigma$ в $\mathbf{Q}_{N+2} \times \mathbf{Q}_N$, т.е.

$$< f,g >_{\sigma_J} =< f,g >_\sigma, \quad f \in \mathbf{Q}_{N+2}, g \in \mathbf{Q}_N. \tag{2.8}$$

Осталось доказать, что совпадение этих билинейных форм влечет совпадение самих неубывающих функций, если у обеих функций сумма рангов скачков равна N, и тогда $\sigma = \sigma_J$. Этот факт доказывается теоремой 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть $\sigma(\lambda)$ — неубывающая, кусочно-постоянная матрица-функция, имеющая N точек роста с учетом кратности. Пусть J_N — пятидиагональная матрица, спектральная функция σ_J которой порождает в $\mathbf{Q}_{N+2} \times \mathbf{Q}_N$ ту же билинейную форму, что и σ (т.е. для σ и σ_J выполняется (2.8)), причем обе функции нормированы условием $\sigma_J(-\infty) = \sigma(-\infty) = 0$. Тогда $\sigma_J = \sigma$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что любая неубывающая кусочно-постоянная матрица-функция 2×2 представима в виде

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} d\sigma_j = \sum_{\lambda_j < \lambda} \|\alpha_j^{(l)} \alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2. \tag{2.9}$$

Действительно, пронумеруем $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$ (точки роста $\sigma(\lambda)$) так, чтобы точки вырожденного роста встречались в этой последовательности только один раз, а невырожденного — повторялись дважды. Если λ_j — точка вырожденного роста, то обозначим через $d\sigma_j$ рост $\sigma(\lambda)$ в этой точке. Далее, легко показать, что любую неотрицательную невырожденную матрицу 2×2 можно разложить в сумму двух неотрицательных вырожденных матриц. Разложим таким образом каждый невырожденный скачок $\sigma(\lambda)$:

$$d\sigma(\lambda_j = \lambda_{j+1}) = d\sigma_j + d\sigma_{j+1}\,.$$

Матрицы $d\sigma_j$ как неотрицательные и вырожденные можно представить в виде

$$d\sigma_j = \begin{pmatrix} (\alpha^{(1)})^2 & \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \\ \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} & (\alpha_j^{(2)})^2 \end{pmatrix} = \|\alpha^{(l)}\alpha^{(k)}\|_{l,k=1}^2, \quad (\alpha^{(1)})^2 + (\alpha^{(2)})^2 \neq 0.$$

Таким образом, учитывая ступенчатость $\sigma(\lambda)$ и условие $\sigma(-\infty) = 0$, получаем искомое представление (2.9).

Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на два этапа.

Представив $\sigma(\lambda)$ в виде (2.9), покажем, что для любого j, $1 \leq j \leq N$, существует такая нетривиальная вектор-функция $r_j(\lambda) = \begin{pmatrix} R_j^{(1)}(\lambda) \\ R_j^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_N$, что

$$r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_i r_j(\lambda_i) = (\alpha_i^{(1)} R_j^{(1)}(\lambda_i) + \alpha_i^{(2)} R_j^{(2)}(\lambda_i))^2 = 0, \quad i \neq j, \tag{2.10}$$

$$r_j(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_j r_j(\lambda_j) = (\alpha_j^{(1)} R_j^{(1)}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)} R_j^{(2)}(\lambda_j))^2 \neq 0. \tag{2.11}$$

(По существу, r_j — собственный вектор оператора умножения на λ в $\mathbf{Q}_N(\sigma)$.) Действительно, не нарушая общности, будем считать, что $j = N$. Если построить r_N, удовлетворяющую (2.10), то (2.11) будет выполняться автоматически в силу невырожденности скалярного произведения, порожденного σ:

$$0 \neq < r_N(\lambda), r_N(\lambda) >_\sigma = \sum_{\lambda_i} r_N(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_i r_N(\lambda_i) = r_N(\lambda_N)^{\mathrm{T}} d\sigma_N r_N(\lambda_N).$$

Таким образом, обозначив $m = N - 1$, мы переформулировали задачу: для заданного набора чисел $\alpha_i^{(l)}$, $l = 1, 2$; $i = 1, \dots, m$, образующих $d\sigma_i$, найти вектор-функцию $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_{m+1}$, для которой

$$r(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_i r(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.12}$$

Доказательство будем проводить по индукции по m. При $m = 1$ утверждение очевидно: достаточно взять $r(\lambda) = \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 \\ \alpha_1^1 \end{pmatrix}$. Осуществим индуктивный переход от m к $m+1$. Будем при этом считать m четным. Выберем такой номер j_0, что $\alpha_{j_0} \neq 0$ (если этого нельзя сделать, сразу возьмем $r(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$). По известной теореме линейной алгебры существует такая верхнетреугольная матрица F, что

$$F^{\mathrm{T}} \| \alpha_{j_0}^{(l)} \alpha_{j_0}^{(k)} \|_{l,k=1}^2 F = \begin{pmatrix} \beta_{j_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для остальных i

$$F^{\mathrm{T}} \| \alpha_i^{(l)} \alpha_i^{(k)} \|_{l,k=1}^2 F = \| \beta_i^{(l)} \beta_i^{(k)} \|_{l,k=1}^2.$$

По индуктивному предположению существует $t(\lambda) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(\lambda) \\ T^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_m$:

$$(\widetilde{\beta}_i^{(1)} T^{(1)}(\lambda_i) + \beta_i^{(2)} T^{(2)}(\lambda_i))^2 = 0, \quad i \neq j_0,$$

где $\widetilde{\beta}_i^{(1)} = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_{j_0})} \beta_i^{(1)}$. То есть, для $s(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_{j_0}) T^{(1)}(\lambda) \\ T^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{m+1}$

$$(\beta_i^{(1)} S^{(1)}(\lambda_i) + \beta_i^{(2)} S^{(2)}(\lambda_i))^2 = s(\lambda_i)^T F^{\mathrm{T}} \| \alpha_i^{(l)} \alpha_i^{(k)} \|_{l,k=1}^2 F s(\lambda_i) = 0, \ i = 1, \dots, m.$$

Наконец, положив $r(\lambda) = Fs(\lambda)$, получим для этой вектор-функции (2.12).

Перейдем ко второму этапу. Докажем сначала, что точки роста $\sigma(\lambda)$ совпадают со спектром J_N. Пусть λ_j — точка роста $\sigma(\lambda)$. В соответствии с (2.7) и (2.10) имеем

$$0 = < q_k(\lambda), r_j(\lambda) >_\sigma = \sum_{\lambda_i} q_k(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_i r_j(\lambda_i) = q_k(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_j r_j(\lambda_j), \quad k = 1, 2. \tag{2.13}$$

Из (2.11) следует, что вектор двумерного пространства $d\sigma_j r_j(\lambda_j) \neq 0$. По равенству (2.13), в двумерном пространстве два вектора $q_1(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_1^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$

и $q_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_2^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$ ортогональны одному и тому же третьему вектору $d\sigma(\lambda_j) r_j(\lambda_j) \neq 0$. Следовательно, они линейно зависимы и

$$Q_1^{(1)}(\lambda_j) Q_2^{(2)}(\lambda_j) - Q_1^{(2)}(\lambda_j) Q_2^{(1)}(\lambda_j) = 0.$$

Значит, по лемме 1.1, λ_j — собственное значение матрицы J_N. Кроме того, (2.13) означает, что $q_k(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_k^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_k^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, ортогональны всему одномерному образу вырожденной матрицы $d\sigma_j$. В частности,

$$q_k(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_j q_k(\lambda_j) = 0, \quad k = 1, 2\,. \tag{2.14}$$

Пусть теперь $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ — точка невырожденного роста $\sigma(\lambda)$. Если бы образы вырожденных матриц $d\sigma_j$ и $d\sigma_{j+1}$ совпадали, то скачок $d\sigma(\lambda_j = \lambda_{j+1}) = d\sigma_j + d\sigma_{j+1}$ был бы вырожденным, а это не так. Следовательно, по (2.14) в двумерном пространстве векторы $q_1(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_1^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$ и $q_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_2^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$ ортогональны двум несовпадающим одномерным подпространствам, т.е. равны нулю:

$$Q_1^{(1)}(\lambda_j) = Q_1^{(2)}(\lambda_j) = Q_2^{(1)}(\lambda_j) = Q_2^{(2)}(\lambda_j) = 0.$$

Поэтому точка $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ — двукратное собственное значение матрицы J_N.

Итак, точки однократного роста функции $\sigma(\lambda)$ являются по меньшей мере простыми собственными значениями матрицы J_N, а точки роста ранга 2 — двукратными собственными значениями. Между тем, и точек роста $\sigma(\lambda)$ (с учетом кратности), и собственных значений матрицы J_N имеется в точности N. Таким образом, множество точек роста исходной матрицы-функции $\sigma(\lambda)$ совпадает, с учетом кратности, со спектром восстановленной матрицы J_N.

Нам осталось доказать равенство скачков $\sigma(\lambda)$ и $\sigma_J(\lambda)$ в точках спектра матрицы J_N. Пусть λ_j — точка однократного роста $\sigma_J(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$. По определению спектральной функции из п. 1

$$d\sigma_J(\lambda_j) = \|\tilde{\alpha}_j^{(l)} \tilde{\alpha}_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2.$$

Согласно равенствам (2.14) и (1.3)

$$\alpha_j^{(1)} Q_i^{(1)}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)} Q_i^{(2)}(\lambda_j) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{\alpha}_j^{(1)} Q_i^{(1)}(\lambda_j) + \tilde{\alpha}_j^{(2)} Q_i^{(2)}(\lambda_j) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку векторы $q_1(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_1^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$ и $q_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda_j) \\ Q_2^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$ одновременно

не равны нулю, то векторы $\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_j^{(1)} \\ \widetilde{\alpha}_j^{(2)} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_j^{(1)} \\ \alpha_j^{(2)} \end{pmatrix}$ пропорциональны. А значит,

$$d\sigma_J(\lambda_j) = \|\alpha_j^{(l)}\alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 = k_j^2\|\widetilde{\alpha}_j^{(l)}\widetilde{\alpha}_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2 = k_j^2 d\sigma(\lambda_j). \tag{2.15}$$

Покажем, что $k_j^2 = 1$. Согласно (2.8), $\sigma(\lambda)$ и $\sigma_J(\lambda)$ порождают в пространстве $\mathbf{Q}_N$ одно и то же скалярное произведение. В частности, для вектор-функции $r_j(\lambda)$

$$< r_j(\lambda), r_j(\lambda) >_\sigma = \sum_{\lambda_i} r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_i) r_j(\lambda_i) = \sum_{\lambda_i} r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda_i) r_j(\lambda_i). \tag{2.16}$$

Но $r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_i) r_j(\lambda_i) = 0$, $i \neq j$, откуда, в силу (2.15), в простых точках λ_i спектра $r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda_i) r_j(\lambda_i) = 0$, $i \neq j$.

Кроме того, из (2.10) можно получить, что в кратных точках $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ спектра $R_j^{(1)}(\lambda_i) = R_j^{(2)}(\lambda_i) = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$. Следовательно,

$$\sum_{\lambda_i \neq \lambda_j} r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_i) r_j(\lambda_i) = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j} r_j(\lambda_i)^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda_i) r_j(\lambda_i) = 0.$$

В сочетании с (2.16) это влечет

$$r_j(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda_j) r_j(\lambda_j) = r_j(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_j) r_j(\lambda_j) \neq 0.$$

Получаем $k_j^2 = 1$, что и требовалось.

Аналогично однократному случаю, для двукратных $\lambda_j = \lambda_{j+1}$

$$r_i(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_J(\lambda_j) r_k(\lambda_j) = r_i(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda_j = \lambda_{j+1}) r_k(\lambda_j) \neq 0, \quad i, k = j, j+1.$$

Из равенств (2.10) и (2.11) $r_j(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_j r_j(\lambda_j) \neq 0$, $r_{j+1}(\lambda_j)^{\mathrm{T}} d\sigma_j r_{j+1}(\lambda_j) = 0$. Поэтому векторы $r_j(\lambda_j)$ и $r_{j+1}(\lambda_j)$ линейно независимы в двумерном пространстве. Получаем совпадение двух билинейных форм, заданных матрицами $d\sigma(\lambda_j)$ и $d\sigma_J(\lambda_j)$, на базисных векторах $\mathbf{R}^2$. Таким образом, $d\sigma(\lambda_j) = d\sigma_J(\lambda_j)$. Учитывая, что рассмотрены и однократные, и двукратные точки роста, окончательно приходим к тому, что $\sigma(\lambda) = \sigma_J(\lambda)$. ■

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов. Физматгиз, Москва (1961).

[2] *Ю.М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев (1965).

The direct and inverse problem of spectral analysis for five-diagonal simmetric matrices. I

M.A. Kudryavtsev

The five-diagonal simmetric matrices of finite order are considered. The matrix-valued spectral measure associated with the eigenvector expansion is introduced. The necessary and sufficient conditions for a matrix-valued measure to be the spectral measure of such a matrix are obtained. The method of reconstruction of the five-diagonal matrices is obtained.

Пряма та обернена задачі спектрального аналізу для п'ятидіагональних симетричних матриць. I

М.О. Кудрявцев

Розглядаються п'ятидіагональні самоспряжені матриці скінченного порядку. Впроваджується поняття спектральної функції, зв'язаної з розкладанням по власним векторам цих матриць. Знайдено необхідні й достатні умови, яким має задовольняти неспадна матриця-функція, щоб бути спектральною, і дається метод відновлення цієї п'ятидіагональної матриці.