Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 3/4, с. 203–211

# Поворотные преобразования поверхностей

С.Г. Лейко

*Одесский государственный университет,*
*Украина, 270057, г. Одесса, ул. Петра Великого, 2*

Статья поступила в редакцию 9 апреля 1994 года

Определен новый тип инфинитезимальных преобразований поверхностей в евклидовом пространстве $E^3$. При поворотном преобразовании образ каждой геодезической кривой есть изопериметрическая экстремаль поворота (в главном приближении). В данной работе более детально рассматриваются поворотно-конформные преобразования.

Ранее автором [1–3] был введен в рассмотрение новый тип отображений римановых пространств — поворотные отображения, которые являются вариационным обобщением геодезических отображений. В настоящей работе определен соответствующий новый тип инфинитезимальных преобразований поверхностей, названных поворотными преобразованиями. Они характеризуются тем, что переводят в главном каждую геодезическую кривую в изопериметрическую экстремаль поворота.

Получены основные уравнения для вектора смещения поворотного преобразования. Они полностью решены в случае, когда поворотное преобразование является также конформным. Доказано, что поворотно-комформные преобразования возможны только для поверхностей, локально изометричных поверхностям вращения. На них указан наглядный геометрический способ конструирования поворотно-конформных преобразований.

## 1. Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях евклидова пространства $E_3$

Рассмотрим двумерное риманово пространство $(M_2, g)$, и пусть $g_{ij}(x^1, x^2)$ — компоненты метрического тензора $g$ в некоторой координатной окрестности $U$. Возьмем кривую $\gamma$ с параметрическими уравнениями $x^h = x^h(t)$ и построим последовательным ковариантным дифференцированием вдоль $\gamma$ векторы $\xi^h = dx^h/dt$, $\xi_1^h = \nabla_t \xi^h$, $\xi_2^h = \nabla_t \xi_1^h$.

Для фиксированных концов кривых рассмотрим функционалы длины и поворота

$$s[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}\, dt, \quad \Theta[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} k(t)\, dt .$$

Здесь $\langle , \rangle$ — скалярное произведение относительно метрического тензора $g$, $k$ — кривизна Френе кривой $\gamma$.

В работе [1] изучена изопериметрическая вариационная задача с фиксированными концами

$$\mathrm{extremum}\Theta[\gamma], \quad s[\gamma] = \mathrm{const} . \tag{$A$}$$

С помощью метода Эйлера–Лагранжа показано, что кривые, являющиеся решением задачи (A), удовлетворяют в двумерном пространстве уравнению

$$k = cK , \tag{1}$$

где $c$ — некоторая постоянная, $K$ — секционная кривизна пространства. Кривые, удовлетворяющие уравнению (1), названы изопериметрическими экстремалями поворота. Таким образом, эти кривые являются стационарными кривыми условной вариационной задачи (A).

В случае, когда пространство $M_2$ является поверхностью в $E_3$, кривые, описываемые уравнением (1), были, по-видимому, впервые рассмотрены при решении задачи Пуанкаре о замкнутых геодезических кривых овальной поверхности [4, с. 229]. А именно, анализировалась изопериметрическая задача

$$\mathrm{minimum}\, s[\gamma], \quad \Omega[\gamma] = \iint_G K\, dS = \mathrm{const} , \tag{$B$}$$

в которой $\gamma$ — замкнутая кривая, ограничивающая область $G$, $K$ — интегральная гауссова кривизна этой области. Решения задачи (B) необходимо удовлетворяют уравнению (1) ($k$ в случае поверхности будет геодезической кривизной экстремали, $K$ — гауссовой кривизной поверхности).

Уравнение (1) эквивалентно можно представить в виде ($K \neq 0$)

$$\xi_2^h(s) = -\langle \xi_1, \xi_1 \rangle \xi^h + \frac{1}{K} K_i \xi^i \xi_1^h ,$$

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1, \quad K_i = \partial K / \partial x^i ,$$

где $s$ — длина дуги экстремали [2, 3]. Отсюда на основании известных теорем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает следующая теорема существования экстремалей поворота [3].

**Теорема 1.** *При задании начальных данных* $x^h(0)$, $\xi^h(0)$, $\xi_1^h(0)$, $\langle\xi(0),\xi(0)\rangle = 1$, $\langle\xi(0),\xi_1(0)\rangle = 0$ *соответствующая задача Коши для изопериметрических экстремалей поворота в классе поверхностей* $M_2 \in C^5$ *имеет единственное решение.*

С геометрической точки зрения теорема 1 означает, что через заданную точку поверхности с наперед заданными направлением и геодезической кривизной в этой точке проходит единственная изопериметрическая экстремаль поворота.

## 2. Инфинитезимальные поворотные преобразования поверхностей

Пусть $M_2$ — поверхность в евклидовом пространстве $E_3$ с индуцированным метрическим тензором $g$, $U$ — ее окрестность с координатами $x^1$, $x^2$.

**Определение.** *Инфинитезимальное локальное преобразование*

$$\tau\colon \tilde{x}^h = x^h + \varepsilon\lambda^h(x^1, x^2)$$

*($\varepsilon$ — малый параметр, $\lambda^h$ — вектор смещения) называем поворотным преобразованием поверхности $M_2$, если для каждой геодезической кривой $\gamma$ в окрестности $U \subset M_2$ выполнено условие*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\tilde{k}_g}{\varepsilon} = cK\,. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{k}_g$ — геодезическая кривизна образа $\tilde{\gamma} = \tau\circ\gamma$ при фиксированном значении $\varepsilon$; $c$ — постоянная, которая в общем случае зависит от выбора геодезической кривой $\gamma$.

Так как из (2) следует $\tilde{k}_g = \varepsilon cK + o(\varepsilon)$, то поворотные преобразования переводят всякую геодезическую в кривую, которая в главном (относительно $\varepsilon$) является изопериметрической экстремалью поворота поверхности. Поворотные преобразования обобщают с вариационной точки зрения (задач (A), (B)) классические инфинитезимальные геодезические преобразования [5, 6] и включают их как частный случай при $c \equiv 0$.

Выведем основные уравнения инфинитезимальных поворотных преобразований поверхностей. Для этого рассмотрим параметрические уравнения $x^h = x^h(t)$ геодезической кривой $\gamma$, отнесенной к каноническому параметру $t$. Тогда

$$\xi_1^h(t) = d\xi^h/dt + \Gamma_{ij}^h\xi^i\xi^j = 0\,, \tag{3}$$

где $\Gamma_{ij}^h$ — символы Кристоффеля.

Вдоль преобразованной кривой $\tilde{\gamma}$ вследствие (3) получим

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^h &= d\tilde{x}^h/dt = \xi^h + \varepsilon\xi^i\partial\lambda^h/\partial x^i,\\ \tilde{\xi}_1^h &= \nabla_t\tilde{\xi}^h = d\tilde{\xi}^h/dt + \Gamma^h_{ij}(\tilde{x})\tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j = \varepsilon L^h_{ij}\xi^i\xi^j + o(\varepsilon),\\ \tilde{\xi}_2^h &= \nabla_t\tilde{\xi}_1^h = d\tilde{\xi}_1^h/dt + \Gamma^h_{ij}(\tilde{x})\tilde{\xi}^i\tilde{\xi}_1^j = \varepsilon L^h_{ij,k}\xi^i\xi^j\xi^k + o(\varepsilon)\,,\end{aligned}$$

где $L^h_{ij} = L_\lambda\Gamma^h_{ij}$ — производная Ли коэффициентов римановой связности [6], запятая в $L^h_{ij,k}$ обозначает ковариантную производную относительно этой связности.

Используем далее формулу для геодезической кривизны

$$\tilde{k}_g = \sqrt{Gr(\tilde{\xi},\tilde{\xi}_1)}/\langle\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle^{3/2},$$

в которой $Gr(\tilde{\xi},\tilde{\xi}_1) = \langle\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle\langle\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_1\rangle - \langle\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_1\rangle^2$ — определитель Грама векторов $\tilde{\xi}^h$, $\tilde{\xi}^h_1$. Подставляя необходимые величины и переходя к пределу в соответствии с (2), получим

$$\sqrt{Gr(\xi,L)}/\langle\xi,\xi\rangle^{3/2} = cK\,,$$

$$L^h = L^h_{ij}\xi^i\xi^j\,,$$

$$Gr(\xi,L) = \langle\xi,\xi\rangle\langle L,L\rangle - \langle\xi,L\rangle^2\,. \tag{4}$$

Предположим далее, что в рассматриваемой координатной окрестности $K \neq 0$. Тогда из (4) получим

$$c = \sqrt{Gr(\xi,L)}/\langle\xi,\xi\rangle^{3/2}K\,. \tag{5}$$

Дифференцируя равенство (5) вдоль геодезической $\gamma$, на основании (3) имеем

$$\langle\xi,\xi\rangle\langle L,P\rangle - \langle\xi,L\rangle\langle\xi,P\rangle = 0\,,$$

$$P^h = L^h_1 - L^h K_i\xi^i/K\,,$$

$$L^h_1 = L^h_{ij,k}\xi^i\xi^j\xi^k\,. \tag{6}$$

Условию (6) удовлетворяет всякий вектор вида

$$P^h = a\xi^h\,, \tag{7}$$

где $a$ — некоторая функция параметра $t$ на геодезической $\gamma$. Покажем, что других представителей векторов $P^h$ не существует. Действительно, если в некоторой точке кривой $\gamma$ векторы $\xi^h$ и $L^h$ коллинеарны, то из (5) вытекает, что они должны быть коллинеарны вдоль всей кривой $\gamma$, т.е. при $c = 0$ имеем $L^h = a_1(t)\xi^h$. Дифференцируя последнее равенство вдоль $\gamma$, на основании (3) получим $L^h_1 = a'_1(t)\xi^h$, что в итоге приводит для вектора $P^h$ к представлению вида (7). Если же вдоль кривой $\gamma$ векторы $\xi^h$ и $L^h$ неколлинеарны, то, разлагая по ним вектор $P^h$, получим

$$P^h = a(t)\xi^h + a_1(t)L^h\,.$$

Учитывая это разложение в (6), имеем $a_1(t)Gr(\xi, L) = 0$, т.е. $a_1(t) = 0$.

Исключив теперь из (7) функцию $a$, получаем $\xi^{[r}P^{h]} = 0$ или, в более подробной записи,

$$\xi^{[r}L^{h]}_{ij,k}\xi^i\xi^j\xi^k = \frac{1}{K}\xi^{[r}L^{h]}_{ij}K_k\xi^i\xi^j\xi^k\,.$$

Здесь квадратные скобки означают альтернирование. Последнее соотношение должно иметь место для всякой геодезической $\gamma$, а следовательно, для всякой точки $(x^i) \in U$ и всякого направления $\xi^i$. Поэтому

$$\delta^{[r}_{(l}L^{h]}_{ij,k)} = \frac{1}{K}\delta^{[r}_{(l}L^{h]}_{ij}K_{k)}\,,$$

где круглые скобки означают симметрирование. Свернув последние равенства по индексам $r$, $l$, находим

$$L^h_{(ij,k)} = \frac{1}{K}K_{(i}L^h_{jk)} + a_{(ij}\delta^h_{k)}\,, \tag{8}$$

где $a_{ij}$ — некоторый симметричный тензор.

Соотношения (8) получены как необходимые условия. При обратном ходе рассуждений нетрудно проверить, что они также и достаточны для того, чтобы преобразование $\tau$ было поворотным. Сформулируем результат.

**Теорема 2.** *Для того чтобы инфинитезимальное преобразование $\tau$, порожденное вектором смещения $\lambda^h$, было поворотным в некоторой координатной области $U$ поверхности $M_2 \subset E_3$, где $K \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовал симметричный дважды ковариантный тензор $a_{ij}$, который вместе с вектором $\lambda^h$ удовлетворяет уравнениям (8).*

В силу теоремы 2 соотношения (8) представляют основные уравнения инфинитезимальных поворотных преобразований поверхности. Отметим, что основные уравнения геодезических инфинитезимальных преобразований [5, 6] содержатся в (8), когда

$$L^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i, \quad \psi_i = \partial\psi/\partial x^i\,,$$

$$a_{ij} = \psi_{i,j} + \psi_{j,i} - (K_i\psi_j + K_j\psi_i)/K\,;$$

здесь $\psi_i$ — некоторый градиентный ковектор. В частности, при $\psi_i = 0$ имеем аффинные преобразования, а при $L_\lambda g_{ij} = 2\varphi g_{ij}$, $\varphi =$const имеем гомотетические и изометрические ($\varphi = 0$) инфинитезимальные преобразования. Указанные преобразования в данном случае естественно считать тривиальными поворотными преобразованиями. В общем конформном случае ($\varphi \neq$const) преобразование не является поворотным. В связи с этим общие конформные преобразования представляют интерес с точки зрения поворотных преобразований, и этот вопрос рассмотрим в следующем разделе.

## 3. Инфинитезимальные поворотно-конформные преобразования

Допустим, что инфинитезимальное поворотное преобразование, порожденное вектором $\lambda^h$, является также и конформным, т.е.

$$L_\lambda g_{ij} = \lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} = 2\varphi g_{ij}, \quad \lambda_i = g_{ih}\lambda^h \,, \tag{9}$$

где $\varphi$ — некоторая (опорная) функция.

Из (9) следуют равенства

$$L^h_{ij} = \varphi_i \delta^h_j + \varphi_j \delta^h_i - g_{ij}\varphi^h \,,$$

$$\varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i, \quad \varphi^h = g^{hi}\varphi_i \,. \tag{10}$$

При подстановке (10) в (8) после несложных выкладок получим

$$a_{ij} = b g_{ij}, \quad \varphi_{i,j} = \varphi_i K_j/K + b g_{ij} \,.$$

Из условий интегрируемости последних уравнений находим $b = (c - \varphi)K$, $c =$const. Таким образом, тензор $a_{ij}$, присутствующий в формулировке теоремы 2, имеет вид $a_{ij} = (c - \varphi)g_{ij}$, а опорная функция $\varphi$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi_{i,j} = \varphi_i K_j/K + (c - \varphi)K g_{ij} \,. \tag{11}$$

Как известно [7; 8, с. 192], векторное поле $\varphi_i$, удовлетворяющее уравнению $\varphi_{i,j} = \mu g_{ij} + \varphi_i \beta_j$, было названо К. Яно торсообразующим. В случае, когда $\beta_j$ — градиент, торсообразующее поле называется конциркулярным и за счет подходящего выбора функции $\nu$ заменой $\psi_i = \nu\varphi_i$ может быть приведено к виду $\psi_{i,j} = \rho g_{ij}$. В работе А. Фиалкова [9] показано, что в двумерных пространствах, которые допускают конциркулярное векторное поле, квадратичная метрическая форма в специальных локальных координатах приведена к виду

$$ds^2 = F_1(x^1)dx^{1^2} + F_2(x^1)dx^{2^2} \,.$$

На основании уравнений (11) и приведенного результата А. Фиалкова можно утверждать, что поверхность $M_2$ в $E_3$, допускающая поворотно-конформное преобразование, является локально-изометричной некоторой поверхности вращения. В связи с указанным обстоятельством рассмотрим уравнения (11) на поверхности вращения, которая стандартно вложена в $E_3$:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad z = f(r)\,.$$

Здесь $f(r)$ представляет меридиан поверхности, $\alpha$ — угол его поворота от координатной плоскости $Oxz$, $r$ — расстояние от точки меридиана до оси вращения $Oz$.

Положим $x^1 = r$, $x^2 = \alpha$. Тогда

$$(g_{ij}) = \operatorname{diag}\left(1 + f'^2, r^2\right)\,.$$

Отсюда, после подстановки необходимых величин в (11), их оказывается возможным проинтегрировать:

$$\varphi = c + c_1/\sqrt{1+f'^2}, \quad c_1 - \mathrm{const}\,.$$

Найденную опорную функцию подставим в уравнения (9). Получим следующую систему для компонент вектора смещения:

$$\partial_1\lambda_1 - \lambda_1\frac{f'f''}{1+f'^2} = \left(c + \frac{c_1}{\sqrt{1+f'^2}}\right)(1+f'^2)\,,$$

$$\partial_2\lambda_1 + \partial_1\lambda_2 = \frac{2}{r}\lambda_2\,,$$

$$\partial_2\lambda_2 + \lambda_1\frac{r}{1+f'^2} = \left(c + \frac{c_1}{\sqrt{1+f'^2}}\right)r^2\,. \tag{12}$$

Проведем анализ полученной системы (12). Так, продифференцировав по $\alpha$ первое уравнение системы, находим

$$\partial_2\lambda_1 = \Phi(\alpha)\sqrt{1+f'^2}, \quad \lambda_1 = \sqrt{1+f'^2}\int\Phi(\alpha)d\alpha + q(r)\,.$$

Здесь $\Phi(\alpha)$, $q(r)$ — некоторые функции. Если подставим отсюда $\lambda_1$ во второе и третье уравнения, то получим, что $\lambda_1$ есть функция только от $r$, т.е. $\Phi(\alpha) = 0$. Теперь после интегрирования второго уравнения находим $\lambda_2 = p(\alpha)r^2$, где $p(\alpha)$ — некоторая функция. В свою очередь, подставив $\lambda_2$ в третье уравнение, получим, что производная функции $p(\alpha)$ зависит только от $r$. Поэтому $p'(\alpha) = A$ =const, и

$$\lambda_1 = (1+f'^2)\left[\left(c + c_1/\sqrt{1+f'^2}\right)r - A\right]\,.$$

Найденная функция $\lambda_1$ удовлетворяет второму и третьему уравнению системы (12). После подстановки ее в первое уравнение получим $f'f''(cr-A)=0$. Поскольку в рассматриваемой координатной окрестности $K\neq 0$, то приходим к выводу, что $c=0$ и $A=0$. В итоге $p(\alpha)=c_2$ =const, и общее решение системы (12) имеет вид

$$\lambda_i=\left(c_1r/\sqrt{1+f'^2},c_2r^2\right), \quad c_1,\ c_2=\mathrm{const}\,.$$

Таким образом, опорная функция и вектор смещения

$$\varphi=c_1/\sqrt{1+f'^2}\,; \tag{13}$$

$$\lambda^h=\left(c_1r/\sqrt{1+f'^2},c_2\right)\,. \tag{14}$$

Поворотно-конформное преобразование поверхности вращения при ее стандартном вложении может быть представлено формулами

$$\tau\colon\begin{cases}\tilde r=r+\varepsilon c_1r/\sqrt{1+f'^2},\\ \tilde\alpha=\alpha+\varepsilon c_2.\end{cases} \tag{15}$$

Сформулируем результаты.

**Теорема 3.** *Если поверхность в евклидовом пространстве $E_3$ допускает инфинитезимальное поворотно-конформное преобразование, то она локально изометрична поверхности вращения.*

**Теорема 4.** *При стандартном вложении поверхности вращения в $E_3$ ее всякое инфинитезимальное поворотно-конформное преобразование имеет вид (15).*

Преобразованию (15) поверхности вращения можно дать наглядное геометрическое описание. В самом деле, проведем через точку $P(r,\alpha)$ поверхности ее меридиан и касательную к нему в этой точке. Если $\beta$ — угол этой касательной с плоскостью $Oxy$, то

$$r/\sqrt{1+f'^2}=|r/\cos\beta|=|PT|\,,$$

где $T$ — точка пересечения касательной с осью вращения. Пусть $\tilde P(\tilde r,\tilde\alpha)$ — образ точки $P$ при выбранном значении $\varepsilon$. Тогда формулы (15) говорят о том, что при реализации $\tau$ необходимо сдвинуться по меридиану из точки $P$ в такую точку $P'$, для которой $\tilde r=r+\varepsilon c_1|PT|$. После поворота точки $P'$ вокруг оси $Oz$ на угол $\varepsilon c_2$ получим искомую точку $\tilde P$.

## Список литературы


[1] *С.Г. Лейко*, Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств. — Изв. вузов. Математика (1990), вып. 10, с. 9–17.

[2] *С.Г. Лейко*, Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства. — Мат. заметки (1990), т. 47, вып. 3, с. 52–57.

[3] *С.Г. Лейко*, Теорема существования экстремалей поворота на поверхностях в $E_3$ и поворотные диффеоморфизмы. — Материалы Всесоюз. шк. Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Кемерово (1988), с. 32.

[4] *В. Бляшке*, Дифференциальная геометрия. ОНТИ, Москва–Ленинград (1935), 332 с.

[5] *Л.П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия. Гос. изд-во иностр. лит., Москва (1948), 510 с.

[6] *K. Yano*, The theory of Lie derivatives and its applications. Amst. N-Holland publ. Groningen, Nordhoff (1957), 530 p.

[7] *K. Yano*, On torse-forming directions in Riemannian spaces. — Proc. Imp. Acad. Tokyo (1944), v. 20, p. 701–705.

[8] *Г.И. Кручкович*, О пространствах В.Ф. Кагана. В кн.: Каган В.Ф. Субпроективные пространства. Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1961), 219 с.

[9] *A. Fialkow*, Conformals geodesics. — Trans. Amer. Math. Soc. (1939), v. 45, p. 443–473.


## Rotary transformation of surfaces

S.G. Leiko

A new type of infinitesimal transformations of surfaces in the Euclidean space $E^3$ is defined by virtue of rotary transformation the image of each geodesic curve is an isoperimetric extremal of the rotation (in the general approximation). The paper closer deals with the rotary-conformal transformations.

## Поворотні перетворення поверхонь

С.Г. Лейко

Означено новий тип інфінітезимальних перетворень поверхонь в евклідовому просторі $E^3$. При поворотному перетворенні образ кожної геодезичної кривої є ізопериметричною екстремаллю повороту (в головному наближенні). В даній роботі більш детально розглядаються поворотно-конформні перетворення.