Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 5, № 3/4, с. 228–249

Конформные субмерсии кэлеровых многообразий. I

С.И. Окрут

*Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 25 мая 1997 года

Кэлеровы многообразия, допускающие голоморфные римановы субмерсии, с необходимостью являются приводимыми. Поэтому в статье в основном рассматриваются конформные субмерсии, которые не являются римановыми. Получено описание строения тензора кривизны кэлерова многообразия E, допускающего голоморфную конформную субмерсию на другое кэлерово многообразие. Слои субмерсии предполагаются вполне геодезическими. Для субмерсий указанного типа, слои которой имеют комплексную размерность, равную 1, получено описание строения кэлеровой метрики многообразия E. Приведены конкретные примеры. В дальнейшем будет предложен метод конструирования расслоений, проекция которых является голоморфной конформной (неримановой) субмерсией с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Метод позволяет конструировать полные, в том числе компактные, кэлеровы расслоенные пространства с проекцией указанного типа. Будет показано, что для существования таких расслоений необходимо и достаточно, чтобы база была ходжевым многообразием.

Введение

Объектом изучения в этой работе являются кэлеровы многообразия, допускающие голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности (определение 1.1) и вполне геодезическими слоями. Метрику таких многообразий можно рассматривать как кэлеров аналог скрещенного произведения римановых многообразий. Мотивация такой аналогии имеется в [1]. В примерах 1.2 и 4.6 приведено семейство неприводимых кэлеровых многообразий, допускающих описанную выше субмерсию. В теореме 2.4 показано, что кэлеровы метрики, допускающие голоморфные римановы субмерсии, с необходимостью являются приводимыми. Поэтому в статье в основном рассматриваются конформные субмерсии, которые не являются римановыми. В теореме 2.5 получено описание строения тензора кривизны кэлерова многообразия с заданной на нем голоморфной конформной субмерсией. Основной целью представленнной статьи является описание локального строения метрики кэлерова многообразия, допускающего голоморфную конформную субмерсию ν указанного выше типа в окрестностях точек общего положения (некритические точки показателя конформности). Для субмерсии с одномерными слоями такое описание получено в теореме 3.6. В § 4 рассматривается строение множества критических точек показателя конформности. В теореме 5.4 получено окончательное, в том числе и в особых точках показателя конформности, описание строения кэлеровой метрики многообразия, допускающего указанную субмерсию.

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). Если не оговорено иное, то величина размерности указывается над $\mathbb{C}$. Основные понятия и обозначения соответствуют принятым (например, в [3, 4]).

§ 1. Определения и локальный пример

Для всякой субмерсии ν риманова многообразия E на риманово многообразие M в каждой точке $\Xi \in E$ имеется прямое ортогональное разложение касательного пространства $T_\Xi E = V_\Xi + H_\Xi$ на вертикальное и горизонтальное подпространства. Соответствующие им символы V и H будут одновременно служить для обозначения операторов ортогонального проектирования на одноименно обозначенные распределения. Операторы V и H стандартным образом [3, гл. 1, предложение 2.13] продолжаются на всю алгебру тензоров в каждой точке многообразия E. Тензор K, в том числе вектор или форма, будет называться вертикальным (горизонтальным), если его горизонтальная (вертикальная) компонента равна нулю $HK = 0$ ($VK = 0$, соответственно). Будем называть также функцию невырожденной, если она не имеет критических значений.

Определение 1.1. *Пусть имеется субмерсия ν из E на M и пусть g и g_M — римановы метрические тензоры в E и M, соответственно. Субмерсия ν из E на M называется конформной, если существует функция f на E такая, что $Hg = \exp(2f)\nu^* g_M$.*

При этом f называется *вертикальным показателем* конформности субмерсии, если f вертикальная функция, т.е. $Xf = 0$ $\forall X$ горизонтального вектора.

П р и м е р 1.2. Пусть кэлерова 2-форма Φ_M, определенная на M, обладает кэлеровым потенциалом F_M, т.е. $\Phi_M = -2i\partial\overline{\partial} F_M$. Пусть $y(t)$ — вещественная функция, определенная на некотором вещественном интервале (a, b)

(допустимо и $a=-\infty$, $b=+\infty$), с отрицательной производной $\dot y(t)=\frac{dy}{dt}$. Множество E, определенное формулой (1.3), является открытым подмногообразием комплексного многообразия, и потому само является комплексным многообразием. Равенством (1.2) и формулой $f=y(t)$ определим на E пару функций t и f. Тогда 2-форма Φ из (1.1)

$$\Phi=e^{2f}(\frac{2i}{\pi}\dot y^{-1}(t)\partial f\wedge\overline{\partial}f+\Phi_M), \tag{1.1}$$

где

$$t=\frac{1}{2}(\zeta+\overline{\zeta})-2\pi F_M, \tag{1.2}$$

$$E=\left\{(\zeta,z)\in\mathbb{C}\times M|a<\frac{1}{2}(\zeta+\overline{\zeta})-2\pi F_M(z,\overline{z})<b\right\}, \tag{1.3}$$

определенная на комплексном многообразии E, превращает E в кэлерово многообразие. Действительно, так как Φ является формой типа (1,1), то ее инвариантность относительно почти комплексной структуры, $J\Phi=\Phi$, очевидна. Покажем замкнутость этой формы.

$$d\Phi=2e^{2f}df\wedge\left(\frac{2i}{\pi}\dot y^{-1}\partial f\wedge\overline{\partial}f+\Phi_M\right)$$

$$-\frac{2i}{\pi}e^{2f}\left(\dot y^{-3}\ddot y df\wedge\partial f\wedge\overline{\partial}f-\dot y^{-1}\overline{\partial}\partial f\wedge\overline{\partial}f+\dot y^{-1}\partial f\wedge\partial\overline{\partial}f\right)$$

$$=2e^{2f}df\wedge\Phi_M-\frac{2i}{\pi}e^{2f}\dot y^{-1}df\wedge\partial\overline{\partial}f=2e^{2f}df\wedge\left(\Phi_M+2i\partial\overline{\partial}F_M\right)=0\,.$$

Здесь многократно использовалось разложение $d=\partial+\overline{\partial}$ из [3, гл. IX, § 2], а также следующее преобразование:

$$df\wedge\partial\overline{\partial}f=\ddot y df\wedge\partial t\wedge\overline{\partial}t+\dot y df\wedge\partial\overline{\partial}t=-2\pi\dot y df\wedge\partial\overline{\partial}F_M\,.$$

Так как для любого вектора Z типа (1,0) выполняется $\overline{\partial}f(\overline{Z})=\partial f(Z)$, то положительная определенность симметрической 2-формы $g(P,Q)=\Phi(JP,Q)$, ассоциированной с формой Φ, очевидна в силу равенства

$$g(Z,\overline{Z})=i\Phi(Z,\overline{Z})=e^{2f}\left(-\frac{1}{\pi}\dot y^{-1}(Zf)^2+g_M(Z,\overline{Z})\right) \tag{1.4}$$

и положительной определенности эрмитовой метрики базы, ассоциированной с Φ_M. Покажем вполне геодезичность слоев построенного расслоения. Положим $W=\partial/\partial\zeta$ и $\overline{W}=\partial/\partial\overline{\zeta}$. Используя формулы (9.12) [3, гл. IX, § 5], получим

$$\nabla_W\overline{W}=0,\quad \nabla_W W=qW\,,$$

где $q = -2\pi(\dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y}\dot{y}^{-1})$. А так как связность — кэлерова, то этим показано, что слои вполне геодезические.

Обозначим через $\varphi = -dF_M$, $\varphi^c = J\phi$ 1-формы, локально определенные в некоторой окрестности любой точки базы. И пусть комплексная координата из формулы (1.2) имеет следующее разложение: $\zeta = \xi + i\eta$. Как известно, горизонтальный лифт X^H любого вектора базы X определяется единственным образом из системы уравнений (1.5):

$$VX^H = 0, \qquad \nu_* X^H = X\,, \tag{1.5}$$

$$\Phi = e^{2f}\left(\frac{1}{\pi}\dot{y}^{-1} df \wedge d^c f + \Phi_M\right), \tag{1.6}$$

$$X^H = X - 2\pi\left(\varphi(X)\frac{\partial}{\partial\xi} + \varphi^c(X)\frac{\partial}{\partial\eta}\right). \tag{1.7}$$

Используя стандартные свойства дифференциального оператора d^c, [4, п. 2.16], вещественную часть формы (1.1) можно представить в виде (1.6). При непосредственной проверке можно убедиться, что вектор вида (1.7) ортогонален слоям субмерсии и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений (1.5). Действительно,

$$g(\frac{\partial}{\partial\xi}, X^H) = \Phi(\frac{\partial}{\partial\eta}, X^H) = \frac{e^{2f}}{\pi}(\dot{y}\,((d\xi + 2\pi\varphi)$$

$$\wedge(d\eta + 2\pi\varphi^c)(\frac{\partial}{\partial\eta}, X - 2\pi\varphi(X)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$= -\frac{e^{2f}}{2\pi}\dot{y}(d\xi + 2\pi\varphi)(-2\pi\varphi(X)\frac{\partial}{\partial\xi} + X)\cdot(d\eta + 2\pi\varphi^c)(\frac{\partial}{\partial\eta}) = 0\,.$$

На основании полученного выше, а также из голоморфности субмерсии следует, что и $g(\partial/\partial\eta, X^H) = 0$.

Из способа задания кэлеровой формы Φ формулой (1.1) видно, что проекция $\nu(\zeta; z^1, \ldots, z^n) = (z^1, \ldots, z^n)$ на M^n является голоморфной конформной субмерсией с показателем конформности, равным f. Вычислим координатные представления градиента $\operatorname{gr} f$ и c-градиента $\operatorname{gr}^c f = J \operatorname{gr} f$ показателя конформности. Так как $g(\operatorname{gr} f, X^H) = \dot{y}(d\xi + 2\pi\varphi)(X^H) = 0$, то $\operatorname{gr} f$ – вертикальное векторное поле, и, значит, показатель конформности является вертикальным. Из голоморфности субмерсии следует, что $\operatorname{gr}^c f$ – также вертикальное векторное поле. Далее вычислим $g(\operatorname{gr}^c f, \partial/\partial\xi) = -g(\operatorname{gr} f, \partial/\partial\eta) = -\partial f/\partial\eta = 0$. Поэтому из эрмитовости метрики g получаем такие равенства: $g(\operatorname{gr} f, \partial/\partial\xi) = \partial f/\partial\xi = \dot{y}(t)$. Ввиду взаимной ортогональности векторных полей $\partial/\partial\xi$ и $\partial/\partial\eta$ градиент вычисляется по формуле $\operatorname{gr} f = \dot{y}(t)\partial/\partial\xi/\|\partial/\partial\xi\|^2$.

Форма Φ из (1.6) ассоциирована с кэлеровой метрикой (ее вещественной частью) вида (1.8). Из формулы (1.8) следует равенство $\|\partial/\partial\xi\|^2 = -\exp(2f)\dot{y}(t)/(2\pi)$. Таким образом, первая формула в (1.9) доказана, а вторая следует из первой:

$$g = e^{2f}\left(-\frac{\dot{y}}{2\pi}(dt^2 + d^c t^2) + g_M\right), \tag{1.8}$$

$$\operatorname{gr} f = -2\pi\exp(-2f)\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \operatorname{gr}^c f = -2\pi\exp(-2f)\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{1.9}$$

В итоге построено кэлерово многообразие E, допускающее голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным невырожденным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Кроме того, на основании формул (1.7) и (1.9) можно заключить, что горизотальное рапределение субмерсии ν содержится в распределении, которое образовано касательными пространствами к слоению, составленному из поверхностей уровня $f = \text{const}$.

Определение 1.3. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную субмерсию ν на базу, кэлерово многообразие M ($\dim_c M + 1 = \dim_c E$), а также вертикальную (относительно субмерсии ν) невырожденную функцию $t : E \mapsto \mathbb{R}$. Пусть любая точка базы обладает такой окрестностью U, что открытое множество $\nu^{-1}(U)$ изоморфно кэлерову многообразию из примера 1.2. Многобразие E будем называть кэлеровым продолжением базы M, отображение ν – проекцией продолжения, y – функцией продолжения, а t – несущей функцией продолжения.*

§ 2. Субмерсии с произвольной размерностью слоя

Если не оговорено противное, то далее вертикальные векторные поля субмерсии обозначаются через U, W, а базисные, т.е. проектируемые и горизонтальные, – через X, Y, Z. Последние также часто называются в литературе горизонтальными лифтами. Когда же одновременно рассматриваются горизонтальные лифты векторных полей базы и векторные поля базы, то базисное поле, которое получено из векторного поля X, заданного на базовом многообразии M, будет обозначаться через X^H. Локальная проектируемость векторного поля P эквивалентна свойству (2.1), т.е. производная Ли поля P вдоль любого вертикального векторного поля есть также вертикальное векторное поле:

$$L_U P = [U, P] \in V\,. \tag{2.1}$$

Голоморфность субмерсии немедленно влечет инвариантность относительно комплексной структуры вертикального распределения, а эрмитовость метрики g на E (т.е. $g(JP,Q) = -g(P,JQ)$) – инвариантность горизонтального распределения:

$$\nu_* J = J\nu_* \quad JV = V, \quad JH = H\,. \tag{2.2}$$

Инвариантность горизонтального распределения и первое равенство в (2.2) приводят к тому, что операторы горизонтального лифта и действия комплексной структуры перестановочны между собой, $J(X^H) = (JX)^H$, поэтому в таких случаях скобки будут опускаться.

Напомним, что инвариант О'Нейла A [4, п. 9.20]

$$A_P Q = H\nabla_{HP} VQ + V\nabla_{HP} HQ,$$

где P, Q — произвольные векторные поля тотального пространства субмерсии, является тензорным полем типа (2,1) и определен для любой, не обязательно римановой, субмерсии.

Лемма 2.1. *Пусть ν голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий из E на M с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда*

$$A_X U = \nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX\,,$$

где A — инвариант О'Нейла субмерсии ν, а вертикальные 1-формы ω, ω^c определяются так: $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X, Y — базисные векторные поля, а U — вертикальное векторное поле. Воспользуемся свойством замкнутости кэлеровой формы Φ многообразия E. Так как $d\Phi(JU, X, JY) = 0$, то отсюда следует формула (2.3),

$$JU\Phi(X, JY) + \Phi(JU, [X, JY]) = 0\,, \tag{2.3}$$

$$2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) + JU\Phi(X, JY)\,. \tag{2.4}$$

Из формулы Кошуля для связности Леви–Чивита [3, гл. IV, предложение 2.3], свойства проектируемости (2.1) и определения кэлеровой формы получаем выражение $2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) - \Phi(JU, [X, JY])$. Формула (2.4) следует из (2.3) и полученного выражения. Снова используя связь между кэлеровой метрикой и ассоциированной с ней кэлеровой формой, $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$, а также конформность субмерсии и определение 1.1, получим равенство

$$(L_U\Phi)(X, Y) = 2\omega(U)\Phi(X, Y)\,. \tag{2.5}$$

Из свойства проектируемости (2.1) полей X, Y следует, что $L_U\Phi(X, Y) = U\Phi(X, Y)$. Поэтому, подставляя в формулу (2.4) выражение вида (2.5), получим равенство

$$\Phi(\nabla_U X, Y) = \omega(U)\Phi(X, Y) + \omega(JU)\Phi(X, JY)\,. \tag{2.6}$$

Из невырожденности кэлеровой формы, ее эрмитовости, $\Phi(X, JY) = -\Phi(JX, Y)$, и определения результата действия почти комплексной структуры на 1-форму, т.е. $J\omega(U) = -\omega(JU)$, следует $H\nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX$. Вполне геодезичность слоев влечет равенство $H\nabla_U X = \nabla_U X$, и второе равенство леммы доказано. Первое равенство леммы теперь следует из определения инварианта О'Нейла A. ■

Предложение 2.2. *Пусть E — кэлерово многообразие, допускающее голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, являющуюся кэлеровым многообразием. Тогда для любых векторных полей X, Y базы M выполняется следующее равенство:*

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + 2\Phi(X^H, Y^H)\mathrm{gr}^c f, \tag{2.7}$$

где $\mathrm{gr}^c f = J\,\mathrm{gr}\, f$, а $\mathrm{gr}\, f$ — градиент показателя конформности.

Доказательство. Требуемое утверждение вытекает из вышеприведенной леммы 2.1 и леммы 4.9 в [1]. ■

Субмерсию римановых многообразий называют *плоской*, если ее горизонтальное распределение вполне интегрируемо.

Теорема 2.3. *Пусть ν голоморфная субмерсия кэлеровых многообразий. Субмерсия ν является римановой тогда и только тогда, когда она является плоской.*

Доказательство. Из формулы (2.3) и свойства проектируемости (2.1) следует формула

$$(L_W g)(X, JY) = \Phi([X, Y], W)\,, \tag{2.8}$$

справедливая для любой голоморфной субмерсии. Критерием того, что субмерсия является римановой, служит равенство нулю левой части приведенного равенства для любых горизонтальных векторных полей X, Y и вертикального вектора W [5, теорема 5.19]. Теперь теорема следует из равенства (2.11) и теоремы Фробениуса. ■

Теорема 2.4. *Если ν голоморфная риманова субмерсия, определенная на кэлеровом многообразии E, то кэлерово многообразие E локально приводимое, а ν локально является проекцией на один из сомножителей.*

Доказательство. Из теоремы 2.3 следует, что субмерсия ν — плоская. Ввиду голоморфности субмерсии выполняются равенства (2.2), и слои полученного горизонтального слоения $\mathcal{H}$ субмерсии ν являются комплексными подмногообразиями. Более того, порожденная слоением, локальная субмерсия μ_{loc} вдоль слоев $\mathcal{H}$ на локальный фактор $E/\mathcal{H}$ [6, с. 15] также является голоморфной. Снова применим теорему 2.3, но теперь уже к локально определенной субмерсии μ_{loc}. Так как эта субмерсия является плоской (ее горизонтальным распределением служит вертикальное распределение исходной субмерсии ν), то μ_{loc} является римановой субмерсией. ■

Теорема 2.5. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, кэлерово многообразие, и $\dim_c M > 1$. Тогда тензор кривизны многообразия E удовлетворяет следующим равенствам:*

а) $R(U,W)X = 2d\omega^c(U,W)JX$,

б) $R(X,Y)U = g(JX,Y)(\nabla_U \operatorname{gr}^c f + \nabla_{JU} \operatorname{gr} f)$,

в) $R(U,X)W = d\omega^c(U,JW)X + d\omega^c(U,W)JX$,

г) $R(X,U)Y = g(X,Y)\nabla_U \operatorname{gr} f + g(JX,Y)\nabla_U \operatorname{gr}^c f + (\omega(U)g(X,Y)$
$+\omega^c(U)g(JX,Y)) \operatorname{gr} f + (\omega(U)g(JX,Y) - \omega^c(U)g(X,Y)) \operatorname{gr}^c f$,

где, как и прежде, U,W — вертикальные векторы, X,Y — горизонтальные, а $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$.

Доказательство. Сформулированная теорема следует из вышеприведенной леммы 2.1 и леммы 4.12 в [1]. ■

§ 3. Субмерсии с одномерными слоями

Напомним, что вполне вещественная бисекционная кривизна $B(p)$ определяется так: $B(p) = g(R(Q,JQ)JS,S)$, где p — вполне вещественная плоскость в касательном пространстве, натянутая на ортонормальные векторы Q и S, т.е. $g(Q,JS) = g(Q,S) = 0$, $\|Q\| = \|S\| = 1$.

Лемма 3.1. *Пусть E и M — кэлеровы многообразия и $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$. Если E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на базу M с вертикальным невырожденным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями, то*

$$d\omega^c = -\frac{\kappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c - e^{2f}\|\operatorname{gr} f\|^2 \nu^* \Phi_M,$$

где $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$, Φ_M — кэлерова форма для многообразия M, а $\kappa = B(X \wedge W)$ – вполне вещественная бисекционная кривизна в смешанных двумерных направлениях, являющаяся функцией на E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из вышеприведенной леммы 2.1 и леммы 4.14 в [1]. ■

Лемма 3.2. *В предположениях леммы 3.1 верно следующее:*

а) $d\|\operatorname{gr} f\|^2 = -(\kappa + 2\|\operatorname{gr} f\|^2)\omega$,

б) *дифференциал функции смешанной бисекционной кривизны κ коллинеарен форме ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из вышеприведенной леммы 2.1 и следствия 4.15 в [1]. ■

Лемма 3.3. *Пусть выполнены предположения леммы 3.1. Тогда существует вертикальная невырожденная функция t на E (единственная с точностью до константы) такая, что $dt = -2\pi \exp(-2f)\|\operatorname{gr} f\|^{-2} df$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию функция f невырожденная на E. А по лемме 3.2 квадрат нормы градиента $\|\operatorname{gr} f\|^2$ является функцией лишь от f. Поэтому любая первообразная

$$t = -2\pi \int e^{-2f} \|\operatorname{gr} f\|^{-2} df$$

определяет вещественную функцию $t = t(f)$, а суперпозиция $t = t \circ f$, где в качестве f уже выступает показатель конформности, задает функцию, определенную всюду на E. Вертикальность t следует из вертикальности показателя конформности f. ■

Следствие 3.4. *В предположениях леммы 3.1 показатель конформности допускает представление $f = y(t)$ в виде суперпозиции функции t из леммы 3.3 и вещественной функции y.*

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия леммы 3.3 и t — функция из этой леммы. Если U открытое множество базы M такое, что функция F_M является кэлеровым потенциалом для Φ_M в U, то функция $\xi = t + 2\pi F_M$, определенная на множестве $\nu^{-1}(U)$, является плюригармонической.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В нижеприведенных вычислениях последовательно используются леммы 3.3, 3.2 а) и 3.1:

$$dd^c(t + 2\pi F_M) = d\left(-2\pi e^{-2f}\|\operatorname{gr} f\|^{-2} d^c f + 2\pi d^c F_M\right)$$

$$= \left(4\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2} - 2\pi e^{-2f}(\kappa + 2\|\mathrm{gr}\, f\|^2)\|\mathrm{gr}\, f\|^{-4}\right)\omega\wedge\omega^c + 2\pi dd^c F_M$$

$$= -\frac{2\pi\kappa\exp(-2f)}{\|\mathrm{gr}\, f\|^{-4}}\omega\wedge\omega^c - 2\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}d\omega^c - 2\pi\nu^*\Phi_M$$

$$= -2\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}\left(\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr}\, f\|^2}\omega\wedge\omega^c + d\omega^c + \exp(-2f)\|\mathrm{gr}\, f\|^2\nu^*\Phi_M\right) = 0\,.$$

Теорема 3.6. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M, $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$, с невырожденным вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда E локально изоморфно кэлерову продолжению, причем $f = y(t)$, где t — несущая функция продолжения, которая удовлетворяет уравнению $dt = -2\pi\exp(-2f)\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}df$, а ν — проекция продолжения.*

Доказательство. Обозначим $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$. Известно, что J – ортогональный оператор и слои субмерсии — вещественно двумерные подмногообразия, поэтому $Vg = \left(\omega^2 + (\omega^c)^2\right)/\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2$, где g кэлерова метрика на E. Из условия конформности субмерсии и предыдущего равенства находим метрику на E: $g = \left(\omega^2 + (\omega^c)^2\right)/\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2 + e^{2f}\nu^* g_M$. Полученное равенство перепишется для ассоциированных с g и g_M кэлеровых форм в следующем виде:

$$\Phi = -\frac{2}{\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2}\omega\wedge\omega^c + e^{2f}\nu^*\Phi_M\,. \tag{3.1}$$

Из следствия 3.4 вытекает, что $f = y(t)$, т.е. показатель конформности f является суперпозицией некоторой вещественной функции y и функции t из леммы 3.3. Нетрудно посчитать, что

$$\|\mathrm{gr}\, f\|^2 = -2\pi\exp(-2f)\dot{y}(t)\,. \tag{3.2}$$

Поэтому равенство (1.1) для кэлеровой формы многообразия E, суженной на $\nu^{-1}(U)$, теперь следует из определения конформной субмерсии и вертикальности показателя конформности. Из леммы 3.5 следует, что в некоторой окрестности O каждой точки Ξ_0 существует голоморфная функция ζ такая, что $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$ и выполняется равенство (1.2). Следует отметить, что в отличие от ξ мнимая часть $\eta = \mathrm{Im}\,\zeta$ этой функции может быть определена (как однолистная функция) не всюду в $\nu^{-1}(U)$. По лемме 3.3 t является невырожденной вертикальной функцией. Поэтому ζ является комплексной координатой вдоль слоя. Очевидно, окрестность O можно выбрать голоморфно эквивалентной множеству из правой части равенства (1.3). ■

§ 4. Субмерсии с вырождениями показателя конформности

Рассмотрение кэлеровых многообразий с определенными на них голоморфными конформными субмерсиями, показатель конформности которых тождественно постоянный, малосодержательно, так как в отличие от вещественного случая, всякое кэлерово многообразие, допускающее такую субмерсию, локально изометрично просто прямому произведению некоторой окрестности базы и слоя, что следует из теоремы 2.4. Поэтому в последующем изложении под голоморфными конформными субмерсиями понимаются только субмерсии с *непостоянным* показателем конформности. С этого момента, поми мо сделанных предположений, положим, что все произвольно выбираемые многообразия являются связными. Введем обозначение $\mathrm{gr}^{1,0} f = (\mathrm{gr}\, f - i\, \mathrm{gr}^c f)/2$.

Лемма 4.1. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M, $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$, с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда $W = \exp(2f)\, \mathrm{gr}^{1,0} f$ — это голоморфное векторное поле.*

Доказательство. Пусть D — множество точек E, где показатель конформности невырожденный. По теореме 3.6 D локально изометрично кэлерову продолжению базы с функцией продолжения y. Из формулы (1.9) примера 1.2 следует, что всюду определенное на E векторное поле W, приведенное выше в формулировке леммы, является голоморфным на D, так как $W = -2\pi \frac{\partial}{\partial \zeta}$, где ζ — комплексная координата вдоль слоев на D из формулы (1.3). Во внутренности дополнения D в E, т.е. на множестве $\mathrm{Int}\, CD$, поле W является тождественно нулевым, а следовательно, также голоморфным. Итак, на всюду плотном множестве $D \cup \mathrm{Int}\, CD$ векторное поле W голоморфно. Согласно [7, гл. 3, предложение 4.1], критерием голоморфности произвольного векторного поля W типа (1,0) является тождественное равенство нулю тензорного (1,1)-поля $\nabla'' W$, которое определяется как проекция тензорного (1,1)-поля ∇W на второе слагаемое относительно разложения $T^1_1 M = T^1_{1,0} M + T^1_{0,1} M$, порожденного комплексной структурой. Так как по определению тензорного (1,1)-поля $\nabla'' W$ оно непрерывно на E, то из равенства его нулю на построенном выше всюду плотном множестве следует, что оно равно нулю тождественно на E. Отсюда по указанному выше критерию следует голоморфность векторного поля W всюду на E. ■

Замечание. На самом деле, и это будет следовать из доказываемой ниже леммы 4.3, одно из множеств D или $\mathrm{Int}\, CD$ обязательно пустое, так как E — связное многообразие и, кроме того, аналитическое продолжение вдоль любого пути ростка постоянной голоморфной функции дает постоянную голоморфную функцию.

Следствие 4.2. *В предположениях леммы 4.1 векторные поля $U = e^{2f}\,\mathrm{gr}\,f$ и $V = e^{2f}\,\mathrm{gr}^c f$ являются инфинитезимальными автоморфизмами комплексной структуры на E.*

Доказательство. Поля U и V с точностью до константы являются вещественной и мнимой частями голоморфного векторного поля W из леммы 4.1. ∎

Лемма 4.3. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M, $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$, с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда показатель конформности, суженный на любой слой, может иметь лишь изолированные особенности.*

Доказательство. Особыми точками показателя конформности служат нули голоморфного поля W из леммы 4.1. По теореме единственности для голоморфных функций одной переменной множество нулей векторного поля W в одном слое, в случае непостоянства функции f, не может иметь предельных точек ввиду голоморфности компонент координатного разложения поля W. ∎

Предложение 4.4. *Пусть кэлерово многообразие E, $\dim_c E > 2$, допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями. Тогда сужение на каждый слой формы $\mu = 4\pi \exp(-2f)\|\mathrm{gr}\,f\|^{-2}\partial f$ является мероморфной формой.*

Доказательство. Используем равенство $\partial = (d + id^c)$ [4, п. 2.17]. Вне дискретного множества точек слоя, где показатель конформности вырожден, сужение $\mu = -d\zeta$ на слой согласно теореме 3.6 и формулам (1.9) и (1.2) есть голоморфная форма, так как $\mu(W) = 2\pi$, где $W = h(w)\partial/\partial w$ — голоморфное вертикальное векторное поле из леммы 4.1, определенное в окрестности особой точки Ξ_0 показателя конформности, а w — комплексная координата слоя через Ξ_0 в окрестности Ξ_0. При этом голоморфная функция h в точке Ξ_0 обращается в 0. Поэтому на основании установленного выше равенства в координатах w будет иметь место представление $\mu = 2\pi dw/h(w)$. ∎

Лемма 4.5. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M, $\dim_c M+1=\dim_c E>2$, с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда вертикальное векторное поле $V=e^{2f}\,\mathrm{gr}^c f$ является инфинитезимальной изометрией.*

Доказательство. Согласно лемме 4.3 открытое множество E_0, где показатель f невырожденный, всюду плотное множество. Из теоремы 3.6 и формулы (1.9) следует, что V на E_0 является киллинговым полем. Действительно, вычисления в локальных координатах из формулы (1.2) приводят к равенству $V=-2\pi\frac{\partial}{\partial\eta}$, где $\eta=\mathrm{Im}\zeta$. Из формулы (1.1), задающей по теореме 3.6 в конечном счете кэлерову метрику на E_0, видно, что метрические коэффициенты зависят лишь от базовых координат и координаты $\xi=\mathrm{Re}\zeta$, но не зависят от η. Используя критерий киллинговости векторного поля, можно утверждать, что гладкое тензорное поле $L_V g$, производная Ли метрики E, является почти всюду нулевым. А следовательно, оно всюду нулевое и, по тому же критерию, V — киллингово векторное поле на всем E. ■

Пример 4.6. Здесь будет построено семейство кэлеровых многообразий E, допускающих голоморфную конформную субмерсию со вполне геодезическими слоями и с вертикальным показателем конформности. В этом примере в отличие от примера 1.2 показатель конформности будет иметь точки вырождения. Пусть, как и в примере 1.2, $(M,\ \Phi_M)$ — кэлерово многообразие, а F_M его кэлеров потенциал, и пусть $l(s):[0;B)\mapsto\mathbb{R}$ гладкая (в 0 — справа) невырожденная (в том числе, невырожденная и в нуле) функция. Кроме того, пусть выполняется неравенство (4.1), в котором λ некоторая вещественная константа. Формулой (4.2), в которой $p_0\neq 0$, определим гладкую положительную функцию $p(s)$:

$$2\lambda\int\limits_0^B \sigma\left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma < p_0^2\,, \tag{4.1}$$

$$p^2(s)=p_0^2-2\lambda\int\limits_0^s \sigma\left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\,, \tag{4.2}$$

$$\frac{dp^2}{dl}=-2\lambda s\frac{dl}{ds}\,, \tag{4.3}$$

$$E=\{(w,z)\in\mathbb{C}\times M\ \mid\ |w|\exp(-2\pi\lambda F_M)<B\}\,. \tag{4.4}$$

Многообразие E, определенное равенством (4.4), относительно проекции на M является тривиальным голоморфным расслоением. С помощью формул

(4.5), (4.6) определим на нем гладкую 2-форму Φ:

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi}\partial l(s) \wedge \overline{\partial} l(s) + p^2(s)\Phi_M\,, \tag{4.5}$$

где

$$s = |w|e^{-2\pi\lambda F_M} : E \mapsto \mathbb{R}\,. \tag{4.6}$$

Покажем, что если исключить из множества E комплексную гиперповерхность $w = 0$, на которой функция p^2 вырождается, и сделать разрез вдоль подмногообразия $\arg w = \pi$ вещественной коразмерности 1, то получим расслоенное пространство из примера 1.2. Вещественная функция y из формулы (4.7)

$$y = \ln p(s)\,, \tag{4.7}$$

$$s = \exp(\lambda t), \quad w = \exp(\lambda\zeta)\,, \tag{4.8}$$

после замены переменных, определяемой первой формулой из (4.8), имеет на вещественном интервале $(-\infty; \frac{1}{\lambda}\ln B)$ отрицательную производную по t . Это следует из формулы (4.2). По-прежнему будем обозначать точкой производную по t. Если теперь рассматривать t как функцию на E, определенную формулой (1.2) при замене голоморфных координат, которые соответствуют второй формуле из (4.8), причем $|\mathrm{Im}\lambda\zeta| < \pi$, то для дифференциалов, определенных на E из формул (4.7), (4.2) и (4.3), получим (знаки $\pm$ выбираются одинаковыми и равными $\mathrm{sgn}(-\lambda dl/ds)$)

$$dl = \pm e^f\,(-\dot{y})^{-\frac{1}{2}}\,df, \quad d^c l = J dl = \pm e^f\,(-\dot{y})^{-\frac{1}{2}}\,d^c f. \tag{4.9}$$

А так как для любой функции l на комплексном многообразии выполняется равенство $2i\partial l \wedge \overline{\partial} l = dl \wedge d^c l$, то равенства (4.9) позволяют заключить, что форма Φ из (4.5) и (1.1) — это одна и та же форма. Таким образом, E без гиперповерхности $w = 0$ есть расслоенное пространство из примера 1.2. Точки исключенной гиперповерхности являются предельными точками открытого множества, которое, как теперь установлено, есть кэлерово продолжение. Проекция продолжения является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности. А так как форма (4.5) гладко определена всюду на E, то для того, чтобы показать, что E целиком является кэлеровым многообразием, достаточно, в силу соображений непрерывности, доказать лишь положительную определенность в точках гиперповерхности $w = 0$ симметрической 2-формы g, ассоциированной с Φ. Если обозначить через g_M риманову метрику на M, ассоциированную с Φ_M, то для g получаем выражения

$$g = \frac{1}{2\pi}\left(dl^2 + d^c l^2\right) + p^2(s) g_M\,, \tag{4.10}$$

$$g\,|_{w=0} = \frac{1}{2\pi}(dl^2 + d^c l^2) + p_0^2 g_M\,. \tag{4.11}$$

Так как $p_0 \neq 0$, то из формулы (4.11) следует положительная определенность g в точках рассматриваемой гиперповерхности и конформность субмерсии. Кроме того, из выражения (4.10) становится прозрачным геометрический смысл функции l на E. С точностью до деления на константу $\sqrt{2\pi}$ она является расстоянием между гиперповерхностями $l = \mathrm{const}$.

Точки гиперповерхности $w = 0$ соответствуют точкам, где функция s из (4.6) обращается в нуль. Из выражения f через l, полученного с помощью равенств (4.7) и (4.3), следует равенство (4.12). А так как f есть ничто иное, как показатель конформности, то равенство (4.12) приводит к тому, что в точках рассматриваемой гиперповерхности $w = 0$ имеется вырождение показателя конформности, т.е. $df\,|_{s=0} = 0$.

$$df = -\lambda s \frac{dl}{ds} p^{-2}(s)dl\,. \tag{4.12}$$

Выясним геометрический смысл параметра λ. Пусть Ξ_0 — критическая точка показателя конформности. Рассмотрим некоторую нормальную окрестность в слое через Ξ_0, геодезический круг с центром в точке Ξ_0. Так как показатель конформности является вертикальной функцией, то из леммы 4.5 и ортогональности почти комплексной структуры J следует, что точка Ξ_0 является экстремальным значением показателя конформности. Геодезический круг D_r достаточно малого радиуса r будет представлять из себя множество точек

$$D_r = \{\Xi \in \nu^{-1}\nu(\Xi_0) \mid\ |f(\Xi) - f(\Xi_0)| \leq \delta\}\,, \tag{4.13}$$

где $\delta = |f(\Xi_r) - f(\Xi_0)|$, и точка Ξ_r лежит на расстоянии r от центра круга Ξ_0. Обозначим $p_r = p(\Xi_r)$. Из формул (4.9) найдем площадь S_r геодезического круга. Полученное выражение (4.14) содержит параметр λ в качестве коэффициента:

$$S_r = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_r} dl \wedge d^c l = \frac{|\lambda|}{2}\left|p_r^2 - p_0^2\right|\,. \tag{4.14}$$

§ 5. Метрика голоморфных конформных субмерсий

Пусть ν — голоморфная субмерсия кэлеровых многообразий, E на M, с одномерными слоями. Пусть любая точка Ξ_0 из E обладает такой окрестностью O, которая отображается субмерсией ν на открытое множество U. При этом множество U таково, что на U определен кэлеров потенциал F_M. А множество O голоморфно эквивалентно некоторому открытому подмножеству множества, определяемого в правой части включения (5.1), при некотором

$\lambda \in \mathbb{R}$ и при некоторых A и B таких, что $0 \le A < B$:

$$O \subseteq \{(w,z) \in \mathbb{C} \times U \ \mid \ A \le |w| \exp(-2\pi\lambda F_M) < B\}\,, \tag{5.1}$$

$$2\lambda \int_A^B \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma < p_0^2\,, \tag{5.2}$$

$$p^2(s) = p_0^2 - 2\lambda \int_A^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\,, \tag{5.3}$$

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi}\partial l(s) \wedge \overline{\partial} l(s) + p^2(s)\Phi_M\,, \tag{5.4}$$

где

$$s = |w| e^{-2\pi\lambda F_M} : E \mapsto \mathbb{R}\,. \tag{5.5}$$

Если кэлерова форма Φ многообразия E во внутренности O допускает координатное представление вида (5.4), (5.5) при выполнении равенств (5.2), (5.3), в которых $l(s)$ — некоторая гладкая невырожденная функция на полусегменте $[A; B)$, то многообразие E будет называться ***кэлеровым продолжением*** многообразия M вдоль кривой, а отображение ν — проекцией продолжения.

Из данного определения и примера 4.6 видно, что введенное ранее понятие кэлерова продолжения, определение 1.3, является частным случаем приведенного. Кроме того, из примера 4.6 видно, что среди кэлеровых продолжений имеются примеры многообразий, допускающих голоморфную конформную субмерсию с вырождающимся показателем конформности.

Лемма 5.1. *Если ν — голоморфная субмерсия кэлерова многообразия E со вполне геодезическими слоями, а u — вертикальная функция, то $[\operatorname{gr} u, X] = [\operatorname{gr}^c u, X] = 0$ для любого базисного векторного поля.*

Доказательство. Так как субмерсия голоморфная, $\operatorname{gr}^c u = J \operatorname{gr} u$ и выполняются равенства (2.2), то достаточно доказать равенство леммы для градиента $\operatorname{gr} u$. Из свойства проектируемости (2.1) следует, что векторное поле $[\operatorname{gr} u, X]$ является вертикальным. Пусть V — произвольное вертикальное векторное поле, а g — кэлерова метрика E. Тогда

$$g([\operatorname{gr} u, X], V) = g(\nabla_{\operatorname{gr} u} X, V) - g(\nabla_X \operatorname{gr} u, V) = g(\nabla_V \operatorname{gr} u, X) = 0\,,$$

так как слои субмерсии вполне геодезические. ■

Предложение 5.2. *Пусть ν голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий E^{n+1} на M^n, $n > 1$, с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда для гессиана показателя конформности:*

а) собственные векторы $\operatorname{gr} f$ *и* $\operatorname{gr}^c f$ *в некритических точках показателя конформности принадлежат собственным значениям* $-\frac{\kappa}{2} - \|\operatorname{gr} f\|^2$ *и* $-\frac{\kappa}{2} + \|\operatorname{gr} f\|^2$*, соответственно;*

б) горизонтальное подпространство субмерсии принадлежит собственному значению $\|\operatorname{gr} f\|^2$.

Доказательство. По определению гессиана $\forall Q \ \operatorname{Hes} f(Q) = \nabla_Q \operatorname{gr} f$. Рассмотрим открытое всюду плотное множество E_0, где показатель конформности — невырожденный. К E_0 применим теорему 3.6.

а) Из вычислений в примере 1.2 и формулы (1.9) следует, что

$$\nabla_{\operatorname{gr} f} \operatorname{gr} f = (-\frac{\kappa}{2} - \|\operatorname{gr} f\|^2) \operatorname{gr} f, \quad \nabla_{\operatorname{gr}^c f} \operatorname{gr} f = (-\frac{\kappa}{2} + \|\operatorname{gr} f\|^2) \operatorname{gr}^c f \,.$$

б) Гессиан является самосопряженным оператором в касательном пространстве. Из пункта (а) следует, что вертикальное подпространство инвариантное. Следовательно, горизонтальное подпространство также является инвариантным.

Формулы (1.9) приводят к равенству $[\operatorname{gr} f, \operatorname{gr}^c f] = 4\pi \dot{y} e^{-2f} \operatorname{gr}^c f = -2\| \operatorname{gr} f\|^2 \operatorname{gr}^c f$. Возьмем произвольные горизонтальные векторы X, Y и продолжим их до базисных векторных полей, и пусть W — произвольное вертикальное векторное поле. У ковариантной производной $\nabla_W X$ отсутствует вертикальная компонента. Вычислим ее горизонтальную компоненту из формулы для ковариантной производной связности Леви–Чивита:

$$\begin{aligned} 2\Phi(\nabla_W X, Y) &= 2\omega(W)\Phi(X,Y) - \Phi(JW, 2\Phi(X, JY)\operatorname{gr}^c f) \\ &= 2\omega(W)\Phi(X,Y) + 2g(W, \operatorname{gr}^c f)\Phi(JX, Y)\,. \end{aligned}$$

Здесь использовалось также предложение 2.2. Так как ω^c — это форма, двойственная c-градиенту функции f,

$$g(\operatorname{gr} f, Q) = \omega(Q), \quad g(\operatorname{gr}^c f, Q) = \omega^c(Q)\,,$$

то из невырожденности кэлеровой формы и свойства проектируемости базисных полей можно извлечь следующее: $\nabla_X \operatorname{gr} f = \nabla_{\operatorname{gr} f} X = \omega(\operatorname{gr} f) X$. ■

Рассматривая далее замкнутые подмногообразия, будем подразумевать их замкнутость как замкнутость множеств в топологическом пространстве. Кроме того, по-прежнему действует соглашение, принятое в § 2, о том, что голоморфная конформная субмерсия имеет обязательно *непостоянный* показатель конформности.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия предложения 5.2. Тогда множество критических точек N показателя конформности f является объединением $N = \cup N_i$ комплексных вполне геодезических замкнутых горизонтальных подмногообразий, причем каждое N_i – поверхность уровня экстремального значения для f комплексной коразмерности, равной 1.*

Доказательство. Пусть W есть голоморфное векторное поле из леммы 4.1, а V — векторное поле из леммы 4.5. Они связаны между собой так: $2iW = V + iU$. Воспользовавшись лемой 4.5, видим, что вещественной частью голоморфного векторного поля является инфинитезимальная изометрия. Известно [7, гл. 2, теорема 5.3], что в этом случае множество $N = \cup N_i$ нулей поля V представляет из себя объединение связных компонент N_i, каждая из которых есть вполне геодезическое комплексное подмногообразие, замкнутое подмножество в E. Если вполне вещественная бисекционная кривизна κ отлична от 0 на N_i, то комплексная коразмерность N_i, как показывает предложение 5.2, равна 1, и N_i является горизонтальным подмногообразием. Рассмотрим случай, когда κ на N_i принимает нулевое значение. Из леммы 4.3 следует, что внутренность N_i — пустое множество, поэтому $\dim N_i \leq \dim E - 1$. Из леммы 5.1 следует, что под действием локальной однопараметрической группы изометрий, порожденной киллинговым полем $V = \operatorname{gr}^c u$, каждый горизонтальный вектор в критической точке Ξ_0 остается неподвижным. А следовательно, неподвижно и все горизонтальное подпространство в каждой точке N_i. Из доказательства теоремы 5.1, гл. 4 в [7] следует, что $H_\Xi \subset T_\Xi N_i$. Учитывая предыдущее ограничение на размерность N_i, можем заключить, что $T_\Xi N_i = H_\Xi$.

Осталось показать, что N_i является поверхностью уровня для экстремального значения. По лемме 4.3 в слое через Ξ_0 критическая точка Ξ_0 для f является изолированной. Хорошо известно, например [7, с. 89], что индекс киллингова поля в изолированном нуле равен 1. Таким образом, Ξ_0 может служить для сужения f на слой лишь экстремальной критической точкой: либо минимумом, либо максимумом. Непосредственным вычислением с использованием формулы (1.9) можно найти 1-форму Jdu, двойственную полю V, как в [7, гл. 3, следствие 4.6, п. 3]. Здесь $u = \exp(2f)/2$. Так как функция f вертикальная и постоянная вдоль интегральных линий поля V, то экстремальное значение $f(\Xi_0)$ будет таковым в окрестности всей поверхности N_i, содержащей точку Ξ_0. ∎

Теорема 5.4. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным (непостоянным) показателем конформности на кэлерово многообразие M, Φ_M ($n = \dim_c M > 1$). И пусть слои субмерсии являются вполне геодезическими подмногообразиями комплексной* *размерности, равной 1. Тогда многообразие E является кэлеровым продолжением многообразия M вдоль кривой, а субмерсия служит проекцией продолжения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3.6 открытое множество E_0, состоящее из некритических точек показателя конформности, локально является кэлеровым продолжением базы M с некоторой функцией продолжения y. Таким образом, необходимо лишь доказать, что некоторая окрестность каждой критической точки Ξ_0 показателя конформности изоморфна кэлерову продолжению.

Пусть N_0 — это связная компонента поверхности уровня, содержащая критическую точку Ξ_0. По лемме 5.3 множество N_0 является комплексным подмногообразием коразмерности 1. Следовательно, его нормальное расслоение является голоморфным линейным расслоением. Кроме того, N_0 является горизонтальным подмногообразием, и поэтому сужение ν на N_0 устанавливает голоморфную эквивалентность N_0 на открытое множество базы. Так как экспоненциальное отображение является голоморфным [4, с. 100], то в некоторой трубчатой окрестности N_ε подмногообразия N_0 можно ввести комплексные координаты $(z, w) = (z^1, \dots, z^n; w)$ такие, что z — координаты на M, а w — комплексная координата вдоль слоев, $|w| < \varepsilon$. Координатам $(z; w)$ соответствует точка

$$\exp\big|_{T^\perp N_0} (\mathrm{Re} w \cdot e + \mathrm{Im} w \cdot Je) \ ,$$

где e – единичное нормальное векторное поле вдоль N_0, которое в силу вполне геодезичности N_0 можно выбрать параллельным вдоль N_0. Для малого ε функции $(z; w)$ определяют систему координат, и расстояние точки из N_ε до N_0 определяется лишь величиной $|w|$.

Определенная на $N_\varepsilon \backslash N_0$ функция ξ из леммы 3.5 инвариантна под действием локальной однопараметрической группы, порожденной векторным полем V из леммы 4.5. Это видно хотя бы из полученного в доказательстве леммы 4.5 координатного представления $V = -2\pi\partial/\partial\eta$ в локальных координатах $(z; \zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ и определения кэлерова продолжения. По лемме 4.5 векторное поле V является полем Киллинга. А так как ξ является вещественной координатой вдоль слоев, то $\xi = \xi(|w|)$ зависит лишь от расстояния до N_0, т.е. от модуля $|w|$. Координату w вдоль слоя можно сжать — растянуть с некоторым коэффициентом. Поэтому плюригармоничность функции ξ, т.е. $dJd\xi = 0$, влечет представление $\xi = \ln|w|/\lambda$, где λ — это вещественная константа. Координата η для кэлерова продолжения из теоремы 3.6, $d\eta = Jd\xi$, определена в некоторой окрестности любой точки из $N_\varepsilon \backslash N_0$. Отсюда следует, что $d \arg w = Jd\ln|w| = \lambda d\eta$. Согласно следствию 4.2 и лемме 4.5 поле V

является инфинитезимальным автоморфизмом кэлеровой структуры. Имея в виду указанное выше координатное представление для V, определим последней формулой в (5.6) при $|\lambda\eta| < \pi$ замену координат:

$$|w| = e^{\lambda\xi}, \quad \arg w = \lambda\eta, \quad w = e^{\lambda\zeta}, \tag{5.6}$$

где ζ — локальная координата вдоль слоев из определения 1.3 кэлерова продолжения. Зададим в трубчатой окрестности N_ε функцию s следующим образом: $s = \exp(\lambda t)$, где t — несущая функция кэлерова продолжения E_0. Если точка Ξ из N_ε стремится к N_0, то $\lambda\xi(\Xi) \to -\infty$. Когда точка Ξ из E_0 стремится к N_0, для вещественной координаты $\xi(\Xi)$ возможны два варианта. Если $\lambda > 0$, то $\xi \to -\infty$. Если же $\lambda < 0$, то $\xi \to +\infty$. А так как функция продолжения $y(t)$ является монотонно убывающей по t, то это приводит к двум возможным случаям:

1) $\lambda > 0$, при этом на N_0 показатель конформности f достигает локального максимума;

2) $\lambda < 0$, при этом на N_0 показатель конформности f достигает локального минимума.

Сравнивая последнюю формулу в (5.6) и формулу (1.2), приходим к заключению, что существует трубчатая окрестность подмногообразия N_0, которая голоморфно эквивалентна множеству такого вида, как в правой части включения (5.1) при $A = 0$. Из формулы (3.7) следует, что расстояние от N_0 до точек, в которых введенная выше функция s принимает фиксированное значение, одинаковая, и она вычисляется по второй формуле в (5.7):

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = -\frac{e^{2f}}{\lambda s}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{l(s)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\lambda|}\int\limits_0^s \frac{e^f\sqrt{-\dot{y}}}{\sigma}d\sigma\,. \tag{5.7}$$

При этом для кэлеровой формы в указанной окрестности точки Ξ_0 будут выполняться формулы (5.3)–(5.5). Таким образом, и в окрестности критической точки показателя конформности многообразие E также является кэлеровым продолжением. ■

З а м е ч а н и е. Если кэлерову метрику базы растянуть в λ раз, т.е. положить $F_M := |\lambda|F_M$, то на основании леммы 3.5 в формулах (5.6) будет иметь место $\lambda = \pm 1$.

Следствие 5.5. *Пусть форма $\mu = 4\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}\partial f$ такова, как в предложении 4.4. Тогда вычет мероморфной формы, сужения μ на слой, в критической точке Ξ_0 показателя конформности равен $\mathrm{Res}_{\Xi_0}\mu = -1/\lambda$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственные вычисления μ в окрестности слоя любой точки из $N_\varepsilon \backslash N_0$, как и в предложении 4.4, приводят к равенству

$d\mu = -d\zeta$. Учитывая третье равенство в (5.6), получаем $\mu = -dw/(\lambda w)$, где w является комплексной координатой в окрестности Ξ_0 в слое через Ξ_0. ■

Следствие 5.6. *В условиях теоремы 5.4 порядок производной dy/ds относительно s при $s \to 0$ (в критической точке) равен 1.*

Можно показать, что метрики кэлеровых продолжений, полученные в заключении теорем 3.6 и 5.4, локально представляют из себя частный случай метрик Калаби [2, формула 3.2].

Список литературы

[1] *С.И. Окрут*, Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии. — Мат. физика, анализ, геом. (1997), т. 4, № 1/2, с. 145–188.

[2] *E. Calabi*, Metriques kähleriennes et fibres holomorphes. — Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup., 4^e Serie (1979), t. 12, p. 269–294.

[3] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. В 2-х т. Наука, Москва (1981), т. 1 — 344 с., т. 2 — 461 с.

[4] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. В 2-х т. Мир, Москва (1990), 703 с.

[5] *Ph. Tonder*, Foliations on Riemannian manifolds. Springer–Verlag, New York (1988), 247 p.

[6] *P. Molino*, Riemannian Foliations. Birkhäuser, Boston (1988), 337 p.

[7] *Ш. Кобаяси*, Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Наука, Москва (1986), 224 с.

The conformal submersions of Kählerian manifolds. I

S.I. Okrut

The Kählerian manifolds permitting holomorphic Riemannian submersions are necessary reducible. The paper therefore analyzes mainly the conformal submersions which are not Riemannian. A description is obtained for the structure of the curvature tensor of the Kählerian manifold E permitting a holomorphic conformal submersion onto another Kählerian manifold. The fibers of a submersion are assumed to be totally geodesic. The structure of the Kählerian metric of the manifold E is described for this type of submersions whose fibers have the complex dimension equal to 1. Particular examples will be given. A method will be proposed later on to construct bundles whose projection is a holomorphic conformal (non-Riemannian) submersion with vertical exponent of conformality and totally geodesic fibers. The method allows construction of the complete (including compact) Kählerian fiber space with the project of the above indicated type. It will be shown that the Hodge base is the necessary and sufficient condition for existence of such bundles.

Конформні субмерсії келерових многовидів. I

С.І. Окрут

Келерові многовиди, що допускають голоморфні ріманові субмерсії, з необхідністю є звідними. Тому у статті в основному розглядаються конформні субмерсії, які не є рімановими. Отримано опис будови тензора кривини келерова многовиду E, що допускає голоморфну конформну субмерсію на інший келеров многовид. Шари субмерсії припускаються цілком геодезичними. Для субмерсії зазначеного типу, шари якої мають комплексну вимірність, рівну 1, отримано опис будови келерової метрики многовиду E. Доведено конкретні приклади. В дальшому буде запропоновано метод конструювання розшарувань, проекція яких є голоморфною конформною (неріманововою) субмерсією з вертикальним показником конформності та цілком геодезичними шарами. Метод дозволяє конструювати повні, у тому числі компактні, келерові розшаровані простори з проекцією зазначеного типу. Буде показано, що для існування таких розшарувань необхідно та достатньо, щоб база була ходжевим многовидом.