

## Главный вектор локального искривления линий при конформном отображении и его применение

М.А. Шакиров

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Статья поступила в редакцию 14 октября 1996 года

Геометрическое свойство однолистных конформных отображений — кривизны линий, получаемых при отображении пучка прямых, полностью определяются одним вектором — используется для явного описания электромагнитных сил, действующих на заряды и токи, в плоских задачах электродинамики.

При конформном отображении  $\omega: C \rightarrow C$  малая окрестность точки  $z \in C$  с точностью первого порядка подвергается повороту и гомотетии, определяемыми значением первой производной  $\omega'_z$ . В данной работе рассматриваются локальные свойства отображения  $\omega(z)$  с учетом величин второго порядка, определяемые свойствами первых двух производных  $\omega'_z$  и  $\omega''_z$ . Оказывается, что пучок прямых, проходящих через точку  $z_0$ , переходит в пучок проходящих через точку  $\omega_0 = \omega(z_0)$  кривых, кривизны которых полностью определяются *одним* вектором, названным *главным вектором локального искривления* линий при отображении  $\omega: C \rightarrow C$ . Показано, что этот вектор играет роль при определении взаимосвязей между электромагнитными силами, действующими на линейные заряды и токи конформно связанных полей. Это приводит к необходимости введения понятия о *стрикционной* составляющей пондеромоторной силы при конформных преобразованиях.

1. Пусть  $\omega: D_z \rightarrow D_\omega$  — однолистное конформное отображение области  $D_z$  плоскости  $z$  на область  $D_\omega$  плоскости  $\omega$ . Область  $D_z$  может быть областью любой связности: односвязной, двусвязной и т.д., в том числе бесконечно связной (предполагаем, что конформное отображение  $\omega: D_z \rightarrow D_\omega$  существует и фиксировано). Прямолинейному отрезку  $ab$ , проведенному через точку  $z_0$  области  $D_z$ , соответствует в общем случае дуга  $AB$ , проходящая через

точку  $\omega_0$  области  $D_\omega$ , как показано на рис. 1, где для простоты изображены односвязные области. *Направление* отрезка  $ab$  характеризуется углом  $\alpha$ , который отрезок образует с вещественной осью плоскости  $z$ . Через  $k_{\omega_0}(\alpha)$  обозначен вектор кривизны дуги  $AB$  в точке  $\omega_0$  для направления  $\alpha$  в точке  $z_0$  плоскости  $z$ . Напомним, что вектором кривизны плоской кривой называют вектор, по модулю равный кривизне дуги и (если этот модуль не равен нулю) направленный ортогонально кривой в ту сторону, в которую кривая отклоняется вблизи рассматриваемой точки от касательной  $A'B'$ . Нам потребуется зависимость кривизны дуги  $AB$  в точке  $\omega_0$  от изменения  $\alpha$ . Для обозначения сопряженных величин будем использовать знак  $*$ .

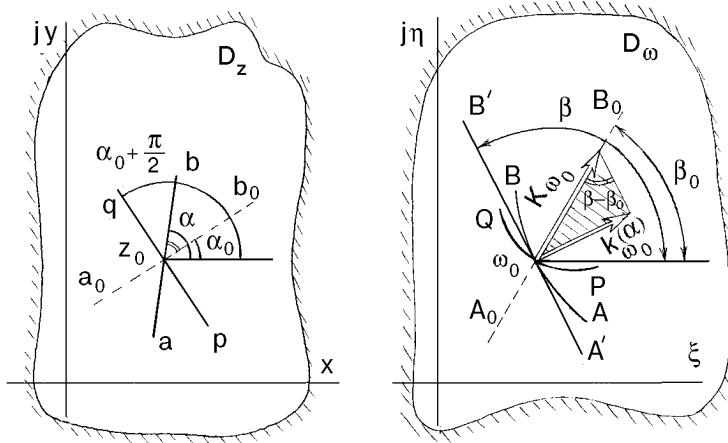


Рис. 1.

**Теорема 1.** Вектор кривизны в точке  $\omega_0$  плоскости  $\omega$  для направления  $\alpha$  в точке  $z_0$  плоскости  $z$  при преобразовании  $\omega(z)$  равен

$$k_{\omega_0}(\alpha) = i(e^{i\alpha}/\omega_0'^*) \operatorname{Im}(e^{i\alpha}\omega_0''/\omega_0') = -ie^{i\alpha}z_0'^* \operatorname{Im}(e^{i\alpha}z_0''/z_0'^2), \quad (1)$$

где  $\omega: D_z \rightarrow D_\omega$ , а  $z = \omega^{-1}: D_\omega \rightarrow D_z$ .

Доказательство теоремы можно получить многими способами, например на основании известной формулы для модуля кривизны образа окружности из [1, с. 133]. Используя эту формулу, нетрудно показать, что при отображении  $\omega(z)$  кривизна образа окружности  $|z - z_c| = \rho$  (где  $z_c$  — центр окружности, а  $\rho$  — ее радиус) выражается равенством

$$k = \frac{1 + \operatorname{Re}[(z - z_c)\omega''/\omega']}{|(z - z_c)\omega'|}.$$

Центр окружности, касающейся *направления*  $\alpha$  в точке  $z_0$ , удовлетворяет условию  $(z - z_c) = -i\rho e^{i\alpha}$ . Это позволяет представить кривизну образа окружности в точке  $\omega_0 = \omega(z_0)$  в виде

$$k = \frac{1 + \operatorname{Re}(-i\rho e^{i\alpha} \omega_0''/\omega_0')}{|-i\rho e^{i\alpha} \omega_0'|} = \frac{1 + \rho \operatorname{Im}(e^{i\alpha} \omega_0''/\omega_0')}{\rho |\omega_0'|}.$$

Когда  $\rho \rightarrow \infty$ , величина  $k \rightarrow |k_{\omega_0}(\alpha)|$ , что и приводит при учете обычно принимаемого направления вектора кривизны к выражению (1). ■

Из формулы (1) следует

$$|k_{\omega_0}(\alpha)| = |\omega_0''/\omega_0'^2| |\sin[\arg(\omega_0''/\omega_0') + \alpha]| = |z_0''/z_0'^2| |\sin[\arg(-z_0''/z_0'^2) + \alpha]|. \quad (2)$$

**Определение 1.** Назовем  $\alpha_0$  *неискривляемым направлением* в точке  $z_0$  плоскости  $z$ , если

$$|k_{\omega_0}(\alpha)| = 0. \quad (3)$$

Ввиду непрерывной зависимости  $k_{\omega_0}(\alpha)$  от  $\alpha$ , хотя бы одно неискривляемое направление в точке  $z_0$  обязательно существует. На рис. 1 неискривляемое направление на  $z$ -плоскости представлено прямой  $a_0b_0$ . Ему соответствует направление  $A_0B_0$  на  $\omega$ -плоскости.

**Лемма 1.** *Неискривляемое направление в точке  $z_0$  плоскости  $z$  при отображении  $\omega(z)$  характеризуется углом  $\alpha_0$  (с точностью до  $\pm\pi$ ):*

$$\alpha_0 = \arg(\omega_0''/\omega_0')^* = \arg(-z_0''/z_0'^2)^*. \quad (4)$$

Доказательство нетрудно получить приравниванием нулю правых частей (1) или (2).

**Примечание 1.** Если  $\omega_0'' = 0$ , то все направления в точке  $z_0$  неискривляемые. В остальных случаях неискривляемое направление единственно.

**Примечание 2.** Обозначим единственное неискривляемое направление в точке  $\omega_0$  плоскости  $\omega$  для обратного отображения  $z(\omega)$  через  $\beta_0$  (рис. 2). Используя определение 1 и лемму 1 применительно к  $\omega$ -плоскости, можем написать (с точностью до слагаемого  $\pm\pi$ ):

$$\beta_0 = \arg(z_0''/z_0')^* = \arg(-\omega_0''/\omega_0'^2)^*. \quad (5)$$

Как и следовало ожидать, в силу конформности преобразований (с точностью до слагаемого  $\pm\pi$ ),

$$\beta_0 - \alpha_0 = \arg(\omega_0'). \quad (6)$$

Из выражения (2) следует, что при изменении угла  $\alpha$  (рис. 1) значение модуля вектора кривизны  $|k_{\omega_0}(\alpha)|$  меняется в пределах от нуля до наибольшего значения  $|k_{\omega_0}(\alpha)|_{max} = |\omega_0''/\omega_0'^2| = |z_0''/z_0'|$ .

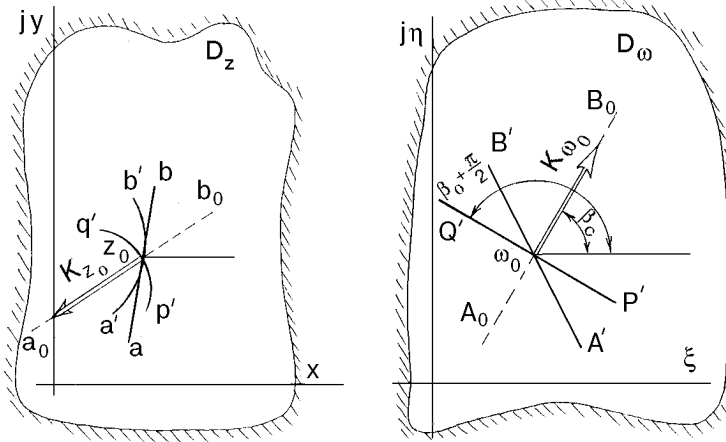


Рис. 2.

**Определение 2.** Назовем вектор кривизны в точке  $\omega_0$  плоскости  $\omega$  с наибольшим по модулю значением главным вектором локального искривления линий в точке  $\omega_0$  при отображении  $\omega(z)$ .

Обозначим его через  $K_{\omega_0}$ . Из определения следует  $|K_{\omega_0}| = |k_{\omega_0}(\alpha)|_{max}$ .

**Теорема 2.** Главный вектор локального искривления в точке  $\omega_0$  при отображении  $\omega(z)$  идет вдоль неискривляемого направления в этой точке  $\beta_0$  (рис. 1) и равен

$$K_{\omega_0} = k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2) = -(\omega_0''/\omega_0'^2)^* = (z_0''/z_0')^*. \quad (7)$$

**Доказательство.** Заменяя в (1)  $\alpha$  на  $(\alpha + \pi/2)$ , получаем

$$k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2) = -(e^{i\alpha}/\omega_0'^*) \operatorname{Re}(e^{i\alpha} \omega_0''/\omega_0') = z_0'^* e^{i\alpha} \operatorname{Re}(e^{i\alpha} z_0''/z_0'^2). \quad (8)$$

Сложив левые и правые части (8) и (1), убеждаемся, что вектор

$$k_{\omega_0}(\alpha + \pi/2) + k_{\omega_0}(\alpha) = (-\omega_0''/\omega_0'^2)^* = (z_0''/z_0')^* \quad (9)$$

не зависит от угла  $\alpha$ . Векторы  $k_{\omega}(\alpha)$  и  $k_{\omega}(\alpha + \pi/2)$  взаимно перпендикулярны. Согласно (9) и (3) при  $\alpha = \alpha_0$  имеем

$$k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2) + k_{\omega_0}(\alpha_0) = k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2) + 0 = (-\omega_0''/\omega_0'^2)^*,$$

откуда следует

$$|k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2)| = |\omega_0''/\omega_0'^2| = |k_{\omega_0}(\alpha)|_{max},$$

$$\arg[k_{\omega_0}(\alpha_0 + \pi/2)] = \arg(-\omega_0''/\omega_0'^2)^* = \beta_0.$$

■

**Лемма 2.** Главные векторы локального искривления  $K_{\omega_0}$  в точке  $\omega_0 = \omega(z_0)$  плоскости  $\omega$  и главный вектор локального искривления  $K_{z_0}$  в точке  $z_0$  плоскости  $z$  связаны соотношением

$$K_{\omega_0} = -K_{z_0}/\omega_0'^* . \quad (10)$$

Действительно, согласно (7) имеем

$$K_{z_0} = -(z_0''/z_0'^2)^* = -(z_0''/z_0')^*/z_0'^* = -\omega_0'^* K_{\omega_0},$$

откуда следует (10). ■

**Теорема 3.** Вектор кривизны  $k_{\omega_0}(\alpha)$  в точке  $\omega_0$  плоскости  $\omega$  для произвольного направления  $\alpha$  в точке  $z_0$  плоскости  $z$  при отображении  $\omega(z)$  выражается через главный вектор локального искривления  $K_{\omega_0}$  равенством

$$k_{\omega_0}(\alpha) = -iK_{\omega_0}e^{i(\alpha-\alpha_0)}\sin(\alpha-\alpha_0). \quad (11)$$

**Доказательство.** Из (1) имеем

$$k_{\omega_0}(\alpha) = i(e^{i\alpha}/\omega_0'^*)\operatorname{Im}(e^{i(\alpha-\alpha_0)}e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0')$$

$$= i(e^{i\alpha}/\omega_0'^*)\left[\sin(\alpha-\alpha_0)\operatorname{Re}(e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0') + \cos(\alpha-\alpha_0)\operatorname{Im}(e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0')\right].$$

Поскольку второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю (см. доказательство леммы 1), то выполняется цепочка равенств

$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0') \equiv e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0' \equiv (e^{i\alpha_0}\omega_0''/\omega_0')^* = e^{-i\alpha_0}(\omega_0''/\omega_0')^*,$$

и, следовательно,

$$k_{\omega_0}(\alpha) = i(e^{i\alpha}/\omega_0'^*)\left[\sin(\alpha-\alpha_0)e^{-i\alpha_0}(\omega_0''/\omega_0')^*\right] = i(\omega_0''/\omega_0'^2)^*e^{i(\alpha-\alpha_0)}\sin(\alpha-\alpha_0),$$

что при учете (7) приводит к (11). ■

Для модуля кривизны получаем

$$|k_{\omega_0}(\alpha)| = |K_{\omega_0}|\sin(\alpha-\alpha_0) = |K_{\omega_0}|\sin(\beta-\beta_0) \quad (12)$$

или, что то же,

$$|k_{\omega_0}(\alpha)| = |K_{\omega_0}| |\cos(k_{\omega_0}(\alpha), K_{\omega_0})|. \quad (13)$$

Эти соотношения иллюстрируются на рис. 1 заштрихованным треугольником. Выделенный в нем угол  $(\beta - \beta_0) = (\alpha - \alpha_0)$ .

Для суперпозиции  $\omega_2(\omega_1(z))$  есть три главных вектора локальных искривлений:  $K_{\omega_2,z}$  (для  $\omega_2: D_z \rightarrow D_{\omega_2}$ ),  $K_{\omega_2,\omega_1}$  (для  $\omega_2: D_{\omega_1} \rightarrow D_{\omega_2}$ ), и  $K_{\omega_1,z}$  (для  $\omega_1: D_z \rightarrow D_{\omega_1}$ ).

**Лемма 3.** *Главный вектор локального искривления суперпозиции отображений  $\omega_2: D_z \rightarrow D_{\omega_1} \rightarrow D_{\omega_2}$  равен*

$$K_{\omega_2,z} = K_{\omega_2,\omega_1} + (d\omega_1/d\omega_2)^* K_{\omega_1,z}. \quad (14)$$

Из леммы 3 следует, что в случае  $\omega_1 = az + b$  имеем  $K_{\omega_2,z} = K_{\omega_2,\omega_1}$ , т.е., главный вектор локального искривления суперпозиции отображения  $\omega_2: D_z \rightarrow D_{\omega_1} \rightarrow D_{\omega_2}$  инвариантен относительно линейного преобразования  $\omega_1: D_z \rightarrow D_{\omega_1}$ . Если  $\omega_2 = \lambda\omega_1 + b$ , то, как следует из (14),  $K_{\omega_2,z} = (1/\lambda^*)K_{\omega_1,z}$ .

**2.** Перейдем к рассмотрению силовых взаимодействий в плоскопараллельных электромагнитных полях. Пусть в односвязной или многосвязной однородной с проводящими границами области  $D_z$  возбуждено электростатическое поле, причем одним из его источников является заряженная с линейной плотностью заряда  $\tau_0$  нить, проходящая через точку  $z_0$  ортогонально рассматриваемой  $z$ -плоскости, как показано на рис. 3 на примере двусвязной области. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = \text{const}$ . Функция  $\omega(z)$  отображает  $D_z$  на область  $D_\omega$  той же связности. В области  $D_\omega$  нить  $\tau_0$  проходит через точку  $\omega_0 = \omega(z_0)$ .

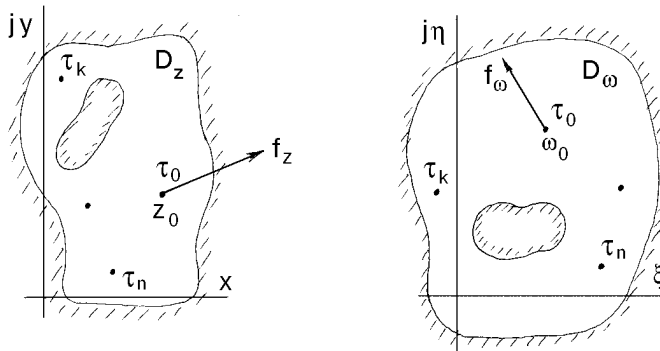


Рис. 3.

Обозначим механическую (пондеромоторную) силу, с которой поле действует на единицу длины заряженной нити  $\tau_0$  в области  $D_z$ , через

$$f_{z_0} = (f_x + if_y)_{z=z_0} = \tau_0 E_{z_0}^e, \quad (15)$$

где  $E_{z=z_0}^e$  — напряженность *внешнего* (по отношению к заряженной нити  $\tau_0$ ) поля в точке  $z_0$  области  $D_z$  [2]. Если  $W_z^e$  — комплексный потенциал этого поля, то согласно [3]

$$E_{z_0}^e = -i(dW_z^e/dz)_{z=z_0}^*. \quad (16)$$

Аналогичное соотношение имеет место для механической силы, которая действует на единицу длины нити с линейным зарядом  $\tau_0$ , проходящей через точку  $\omega_0 = \omega(z_0)$  области  $D_\omega$ :

$$f_{\omega_0} = (f_\xi + if_\eta)_{\omega=\omega_0} = \tau_0 E_{\omega_0}^e, \quad (17)$$

где

$$E_{\omega_0}^e = -i(dW_\omega^e/d\omega)_{\omega=\omega_0}^*. \quad (18)$$

Следующая теорема устанавливает связь между силами  $f_{z_0}$  и  $f_{\omega_0}$ .

**Теорема 4.** *Механическая сила, действующая на единицу длины нити с зарядом  $\tau_0$  в  $D_z$ -области, равна*

$$f_{z_0} = f_{\omega_0} \omega_0'^* + f_{z_0, \omega}, \quad (19)$$

где

$$f_{z_0, \omega} = (\tau_0^2/4\pi\epsilon) K_{z_0} = (\tau_0^2/4\pi\epsilon) (\omega_0''/\omega_0')^*. \quad (20)$$

Здесь  $K_{z_0}$  — главный вектор локального искривления в точке  $z_0$  плоскости  $z$ .

**Доказательство.** Полные комплексные потенциалы обоих полей с учетом собственного поля нити  $\tau_0$  могут быть представлены в виде

$$W_z = W_z^e + (-i\tau_0/2\pi\epsilon) \ln(z - z_0), \quad W_\omega = W_\omega^e + (-i\tau_0/2\pi\epsilon) \ln(\omega(z) - \omega_0).$$

Из этих соотношений и равенства  $W_z = W_\omega$  в соответствующих точках областей  $D_z$  и  $D_\omega$  следует

$$W_z^e = W_\omega^e + (-i\tau_0/2\pi\epsilon) \ln[(\omega(z) - \omega_0)/(z - z_0)].$$

Разложив  $\omega(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $(z - z_0)$ , можем записать:

$$W_z^e = W_\omega^e + (-i\tau_0/2\pi\epsilon) \ln[\omega_0' + \omega_0''(z - z_0)/2 + \omega_0'''(z - z_0)^2/6 + \dots].$$

Продифференцировав это выражение по  $z$  и подставив  $dW_z^e/dz$  в (16), получаем выражение для *внешней* напряженности поля в точке  $z_0$ :

$$E_{z_0}^e = \omega_0'^* (-i) (dW_\omega^e/d\omega)_{\omega=\omega_0}^* + (\tau_0/4\pi\epsilon) (\omega_0''/\omega_0')^* = \omega_0'^* E_{\omega_0}^e + (\tau_0/4\pi\epsilon) K_{z_0}.$$

Учитывая теперь равенство (15), приходим к формулам (19), (20). ■

**З а м е ч а н и е 1.** *С геометрической точки зрения* входящую в (19) составляющую  $f_{z_0,\omega}$  можно рассматривать как следствие внутреннего искривления  $z$ -плоскости в точке  $z_0$  при отображении  $z(\omega)$  (поскольку равенство (19) не зависит от того, как возбуждается поле и какова форма границы рассматриваемой области).

**З а м е ч а н и е 2.** *Физический смысл* составляющей  $f_{z_0,\omega}$  можно получить из менее строгого доказательства теоремы 4 на основе энергетического подхода, принципиально отличающегося от рассмотренного тем, что вместо заряженной нити  $\tau_0$  в  $\omega$ -плоскости рассматривается заряженный проводник с исчезающе малым круглым сечением радиуса  $a_{z_0}$ , центр которого проходит через точку  $z_0$ . В  $\omega$ -плоскости центр этого проводника проходит через точку  $\omega_0$ , и его радиус (при достаточно малом  $a_{z_0}$ ) равен  $a_{\omega_0} = a_{z_0} |\omega_0'|$ . Работа силы  $f_{z_0}$  в  $z$ -плоскости при перемещении провода  $\tau_0$  из точки  $z_0$  в точку  $(z_0 + \Delta z)$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  описывается соотношением

$$\Delta A = \operatorname{Re} (f_z^* \Delta z), \quad (21)$$

а адекватная этому процессу работа в  $\omega$ -плоскости — выражением

$$\Delta A = \Delta A_\omega^l + \Delta A_\omega^s, \quad (22)$$

в котором первое слагаемое обусловлено перемещением центра проводника из  $\omega_0$  в  $(\omega_0 + \Delta\omega)$ :

$$\Delta A_\omega^l = \operatorname{Re} (f_\omega^* \Delta\omega) = \operatorname{Re} (f_\omega^* \omega_0' \Delta z), \quad (23)$$

тогда как второе является следствием *стрикционного эффекта*, т.е. работы радиальных сил, действующих на поверхности проводника, при изменении радиуса проводника от значения  $a_{\omega_0} = a_{z_0} |\omega_0'|$  в точке  $\omega_0$  до значения  $a_{z_0} |\omega_0' + \omega_0'' \Delta z|$  в точке  $(\omega_0 + \Delta\omega)$ . Рассматриваемые силы при  $a_{\omega_0} \rightarrow 0$  определяются *собственным* полем проводника, поэтому их абсолютное значение, приходящееся на единицу поверхности проводника в  $\omega$ -плоскости, можно представить в виде

$$|p_\omega| = \epsilon |\tau_0 / (2\pi \epsilon a_{\omega_0})|^2 / 2,$$

а их работу после ряда несложных преобразований — выражением

$$\Delta A_\omega^s = \operatorname{Re} [(\tau_0^2 / 4\pi\epsilon) (\omega_0'' / \omega_0') \Delta z], \quad (24)$$



что справедливо с точностью до  $O(|\Delta z|^2)$ . В результате подстановки (23) и (24) в (22) и последующего приравнивания (22) и (21) получим (19), из чего следует, что компоненту  $f_{z_0, \omega}$  можно рассматривать как *стрикционную составляющую силы при конформном преобразовании*.

**З а м е ч а н и е 3.** Теорема 4 имеет смысл и в случае, когда область поля  $D_z$  ограничена идеальным, т.е. *электронепроницаемым*, диэлектриком.

**З а м е ч а н и е 4.** Лемма 2 позволяет представить формулы теоремы 4 с общим множителем  $\omega'_0{}^*$ :

$$f_{z_0} = [f_{\omega_0} - (\tau_0^2/4\pi\epsilon)K_{\omega_0}]\omega'_0{}^* . \quad (25)$$

Работу сил поля в  $D_z$ -области по переносу линейного заряда  $\tau_0$  из точки  $m$  в точку  $n$  (т.е. из точки  $z_m$  в точку  $z_n$ ) можно представить в виде

$$A_z = \operatorname{Re} \int_m^n f_z^* dz , \quad (26)$$

а работу сил поля в  $D_\omega$ -области между соответственными точками  $M$  и  $N$  (т.е. между точками  $\omega_m = \omega(z_m)$  и  $\omega_n = \omega(z_n)$ ) — как

$$A_\omega = \operatorname{Re} \int_M^N f_\omega^* d\omega . \quad (27)$$

Следующая теорема устанавливает связь между  $A_z$  и  $A_\omega$ .

**Теорема 5.** *Работа сил поля  $A_z$  в  $D_z$ -области по переносу линейного заряда  $\tau_0$  из точки  $m$  в точку  $n$  не равна работе  $A_\omega$  по переносу этого заряда между соответствующими точками  $M, N$  в области  $D_\omega$  и связана с ней соотношением*

$$A_z = A_\omega + (\tau_0^2/4\pi\epsilon) \ln |\omega'_n/\omega'_m| . \quad (28)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} A_z &= \operatorname{Re} \int_m^n f_z^* dz = \operatorname{Re} \int_m^n [f_\omega \omega'^* + (\tau_0^2/4\pi\epsilon)(\omega''/\omega')^*] dz \\ &= \operatorname{Re} \int_m^n [f_\omega^* \omega' + (\tau_0^2/4\pi\epsilon)(\omega''/\omega')] dz \\ &= \operatorname{Re} \int_M^N f_\omega^* d\omega + \operatorname{Re} \int_M^N (\tau_0^2/4\pi\epsilon) d \ln(\omega') = A_\omega + (\tau_0^2/4\pi\epsilon) \operatorname{Re} [\ln(\omega'_n/\omega'_m)] . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 5.** Теорема 5 не противоречит известному положению об инвариантности приращений потенциалов ( $U_{mn} = U_{MN}$ ) при конформных отображениях, поскольку, как следует из (28),  $U_{mn} = (A_z)_{\tau_0 \rightarrow 0} = (A_\omega)_{\tau_0 \rightarrow 0} = U_{MN}$ .

При рассмотрении сил в магнитном поле полагаем, что магнитная проницаемость среды вне идеальных экранов, играющих роль границы области поля, равна  $\mu$ .

**Теорема 6.** *Механическая сила, действующая на единицу длины линейного тока  $I_0$ , который проходит через точку  $z_0$  области  $D_z$ , окруженной идеальным магнитным или идеальным магнитонепроницаемым экраном, равна*

$$f_{z_0} = f_{\omega_0} \omega_0'^* - f_{z_0, \omega} = [f_{\omega_0} + (\mu I_0^2 / 4\pi) K_{\omega_0}] \omega_0'^*, \quad (29)$$

где

$$f_{z_0, \omega} = (\mu I_0^2 / 4\pi) K_{z_0} = (\mu I_0^2 / 4\pi) (-\omega_0'^* K_{\omega_0}) = (\mu I_0^2 / 4\pi) (\omega'' / \omega')^*, \quad (30)$$

причем  $f_{\omega_0}$  — сила, действующая на ток  $I_0$  в области  $D_\omega$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4, при этом используется понятие *комплексного магнитного потенциала*.

**З а м е ч а н и е 6.** В отличие от (19) в формулу (29) стрикционная составляющая  $f_{z_0, \omega}$  входит со знаком минус. Это объясняется тем, что в магнитном поле силы, действующие на поверхности тонкого проводника, стремятся *сжать* его сечение, тогда как в электрическом поле — наоборот, *расширить*. Соотношения (20) и (30) показывают, что в обоих случаях стрикционная составляющая  $f_{z_0, \omega}$  пропорциональна главному вектору локального искривления  $z$ -плоскости в точке  $z_0$  при отображении  $z(\omega)$ .

**Теорема 7.** *Пусть  $W(z) = V(x, y) + iU(x, y)$  — комплексный потенциал поля в односвязной области  $D_z$ . Тогда векторы кривизны линии напряженности поля  $k_{z_0}^V$  и линии равного потенциала  $k_{z_0}^U$  в точке  $z_0$  равны*

$$k_{z_0}^V = iE_{z_0} \operatorname{Re} (W_0'' / W_0'^2) = -iE_{z_0} \operatorname{Re} (z_{W_0}'' / z_{W_0}'), \quad (31)$$

$$k_{z_0}^U = iE_{z_0} \operatorname{Im} (W_0'' / W_0'^2) = -iE_{z_0} \operatorname{Im} (z_{W_0}'' / z_{W_0}'), \quad (32)$$

где  $E_{z_0} = (E_x + iE_y)_{z=z_0} = -iW_0'^*$  — напряженность поля в точке  $z_0$ .

Доказательство базируется на представлении  $W(z)$  как функции, отображающей  $D_z$ -область на верхнюю полуплоскость  $D_W$  (в которой все линии напряженности поля направлены под углом  $\beta = \pi/2$ , а все линии равного потенциала — под углом  $\beta = 0$  к вещественной оси), и на использовании формулы (1).

Автор глубоко благодарен Ю.Д. Максимова, И.Ю. Рыжакову — сотрудникам кафедры высшей математики СПбГТУ и сотруднику ПОМИ им. Стеклова РАН В.А. Залгаллеру за полезные обсуждения.

### Список литературы

- [1] Г. Поля, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа. Часть 1. Наука, Москва (1978), 318 с.
- [2] И.Е. Тамм, Основы теории электричества. Наука, Москва (1989), 504 с.
- [3] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва (1965), 716 с.

### The principal vector of line local distortion under the conformal mapping and its application

M.A. Shakirov

A schlicht conformal mappings have the following geometrical property. A curvatures of lines which is obtained under the mapping of straight line bundle is determined completely by a one vector. This property is utilized for explicit description of electromagnetic powers which act on charges and currents in a flat problems of electrodynamics.

### Головний вектор локального викривлення ліній при конформному відображенні та його застосування

М.А. Шакиров

Геометрична властивість одношарових конформних відображень — кривини ліній, які здобуто при відображенні пучка прямих, цілком визначаються одним вектором — використовується для явного опису електромагнітних сил, що діють на заряди та струми в площинних задачах електродинаміки.