Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 30–54

Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I

Ю.М. Дюкарев

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 5 декабря 1996 года

Пусть в гильбертовых пространствах G_1 и G_2 заданы два неотрицательных оператора $K_1 \geq 0$ и $K_2 \geq 0$, связанные *Основным Тождеством* $L_2K_2 - K_1L_1 = v_1u_2^*$. Здесь L_2 и L_1 — ограниченные операторы из G_2 в G_1, а v_1 и u_2 — ограниченные операторы из некоторого гильбертова пространства H в G_1 и G_2 соответственно. В работе поставлена и изучена задача о *согласованных* интегральных представлениях операторов K_1 и K_2 следующего вида:

$$K_r = \int_0^\infty R_{T_r}(t) v_r t^{r-1}\, d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t) + W_r + (r-1)FF^*, \quad r = 1, 2\,.$$

Здесь $T_1 = L_2L_1^*, T_2 = L_1^*L_2, v_2 = L_1^*v_1, W_1 \geq 0, W_1L_1 = 0, L_2F = v_1\gamma^{1/2}$, $W_2 \geq 0$, $L_2W_2 = 0$, $R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}$, $R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}$, $\sigma(t)$ — возрастающая функция со значениями во множестве эрмитовых операторов в H, $\gamma \geq 0$ — оператор в пространстве H. Показано, что эта задача содержит в себе проблему моментов Стилтьеса, задачи Неванлинны–Пика и Каратеодори в классе Стилтьеса.

1. Введение

В статьях [1–4] были предложены общие схемы метода В.П. Потапова [5] решения интерполяционных задач в классах неванлинновских функций. Подход В.П. Потапова был распространен на случай интерполяционных задач в классе стилтьесовских функций [6].

В данной статье предложена общая схема решения интерполяционных задач в классе стилтьесовских функций. Наши построения близки к аналогичным конструкциям для интерполяционных задач в классе неванлинновских функций, которые были предложены в [1]. При этом, поскольку всякое решение интерполяционной задачи в классе стилтьесовских функций является и решением соответствующей интерполяционной задачи в классе неванлинновских функций, в статье имеются прямые аналоги некоторых результатов из [1]. Вместе с тем постоянно проявляется специфика интерполяционных задач для стилтьесовских функций. Так, вместо задачи об интегральном представлении одного неотрицательного оператора (см. [1]) появляется задача о согласованном интегральном представлении пары неотрицательных операторов. Основой для обобщений будет некоторое тождество, которое не имеет аналога при решении интерполяционных задач для неванлинновских функций. Имеются и другие специфические особенности интерполяционных задач для стилтьесовских функций, которые приводят к необходимости их отдельного изучения.

Общие построения проиллюстрированы тремя конкретными интерполяционными задачами: задачами Неванлинны–Пика и Каратеодори в классе Стилтьеса и проблемой моментов Стилтьеса. Каждая из этих задач своим специфическим способом укладывается в общую схему. Вместе эти три задачи с достаточной полнотой представляют широкий класс *дискретных* интерполяционных задач для стилтьесовских функций. В общую схему вкладываются и *континуальные* аналоги интерполяционных задач. Но их рассмотрение невозможно без существенного увеличения объема статьи. Поэтому континуальные аналоги будут рассмотрены во второй части статьи.

2. Постановка задачи

Пусть G_1, G_2 — сепарабельные и H — конечномерное гильбертовы пространства. Пусть символ $\{G_1, G_2\}$ обозначает множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из G_1 в G_2, а символ $\{G_1, G_1\}_+$ — множество ограниченных эрмитовых и неотрицательных операторов в G_1.

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{G_1, G_1\}_+$, $K_2 \in \{G_2, G_2\}_+$, L_1, $L_2 \in \{G_2, G_1\}$, $v_1 \in \{H, G_1\}$, $u_2 \in \{H, G_2\}$. Будем считать, что введенные операторы удовлетворяют *Основному Тождеству* (ОТ)

$$L_2K_2 - K_1L_1 = v_1u_2^*. \tag{2.1}$$

Введем операторы

$$T_1 = L_2L_1^* \in \{G_1, G_1\},\ T_2 = L_1^*L_2 \in \{G_2, G_2\}, \tag{2.2}$$

$$u_1 = L_2u_2 \in \{H, G_1\},\ v_2 = L_1^*v_1 \in \{H, G_2\}. \tag{2.3}$$

Непосредственно из определений операторов T_1 и T_2 имеем

$$T_1L_2 = L_2T_2, \quad T_2L_1^* = L_1^*T_1. \tag{2.4}$$

Будем считать, что мероморфны в $\mathbb{C}$ операторнозначные функции

$$R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}, \quad R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}. \tag{2.5}$$

Пусть в окрестности точки z_0 голоморфны обе введенные оператор-функции. Тогда обе оператор-функции $R_{T_1}(z)$ и $R_{T_2}(z)$ разлагаются по степеням операторов T_1 и T_2 в ряд Тейлора. Отсюда, в силу (2.4), в окрестности z_0 имеем

$$R_{T_1}(z)L_2 = L_2R_{T_2}(z), \quad R_{T_2}(z)L_1^* = L_1^*R_{T_1}(z). \tag{2.6}$$

Вследствие аналитичности последнее соотношение имеет место во всех точках, где голоморфны обе оператор-функции $R_{T_1}(z)$ и $R_{T_2}(z)$. Непосредственно из определений получаются тождества

$$R_{T_r}(z)T_rR_{T_r}(t) = \frac{R_{T_r}(t) - R_{T_r}(z)}{t - z}, \;\; r = 1, 2. \tag{2.7}$$

Из основного тождества следуют еще два тождества

$$T_rK_r - K_rT_r^* = v_ru_r^* - u_rv_r^*, \; r = 1, 2. \tag{2.8}$$

Пусть $\sigma(t)$ — определенная при $t \geq 0$ возрастающая оператор-функция со значениями во множестве эрмитовых операторов в H, $\gamma \in \{H, H\}_+$, $F \in \{H, G_2\}$, $W_1 \in \{G_1, G_1\}_+$, $W_2 \in \{G_2, G_2\}_+$. Будем считать, что выполнены условия

$$W_1L_1 = 0, \;\; L_2W_2 = 0, \;\; L_2F = v_1\gamma^{1/2}, \;\; \int\limits_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(1+t)} - \text{ существует.} \tag{2.9}$$

Все интегралы в этой работе считаем существующими в слабом смысле.

Перечисленые выше объекты $\{\sigma(t),\ \gamma,\ F,\ W_1,\ W_2\}$ называются *решением задачи о согласованном интегральном представлении*, если операторы K_1, K_2 и u_2, участвующие в основном тождестве (2.1), допускают следующие представления:

$$K_r = \int\limits_0^\infty R_{T_r}(t)v_rt^{r-1}\, d\sigma(t)v_r^*R_{T_r}^*(t) + W_r + (r-1)FF^*, \;\; r = 1, 2,$$

$$u_2 = -\int\limits_0^\infty R_{T_2}(t)v_2d\sigma(t) + F\gamma^{1/2}\,. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Если имеют место интегральные представления* (2.10), *то выполнено основное тождество* (2.1).

Эта теорема проверяется непосредственными вычислениями.

Основной целью статьи является доказательство утверждения, обратного сформулированной теореме. Покажем, что при некоторых условиях из того, что два неотрицательных оператора удовлетворяют тождеству (2.1), следуют интегральные представления (2.10).

3. Система основных матричных неравенств В.П. Потапова

Определение 3.1. *Оператор-функция $w(z)$, определенная и голоморфная в полуплоскости $\mathrm{Im}\ z > 0$ и принимающая значения во множестве ограниченных операторов, которые действуют в некотором гильбертовом пространстве H, называется неванлинновской, если $(w(z) - w^*(z))/2i \geq 0$.*

Класс всех таких оператор-функций обозначим $\mathbf{R}$.

Определение 3.2. *Неванлинновская оператор-функция $s(z)$ называется стилтьесовской, если она определена, непрерывна и неотрицательна при $x < 0$.*

Класс всех таких оператор-функций обозначим через $\mathbf{S}$. Ясно, что $\mathbf{S} \subset \mathbf{R}$.

Всякая стилтьесовская оператор-функция $s(z)$ по принципу симметрии $s(z) = s^*(\bar{z})$ продолжается из верхней полуплоскости через полуось $(-\infty, 0)$ в нижнюю полуплоскость. Поэтому стилтьесовские оператор-функции фактически определены в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Лемма 3.1. *Для того чтобы оператор-функция $s(z)$ принадлежала классу $\mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место интегральное представление вида*

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t - z}, \qquad \int_0^\infty (1+t)^{-1} d\sigma(t) - \textit{сходится}, \qquad \gamma \geq 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\sigma(t)$ — монотонно возрастающая оператор-функция со значениями во множестве эрмитовых операторов в H.

Доказательство этой леммы для скалярных функций имеется в [7]. Операторный вариант теоремы получается из скалярного варианта по схеме, приведенной в [8, с. 228–230] при получении спектрального разложения унитарных операторов с помощью скалярной тригонометрической проблемы моментов.

Операторный вариант теоремы можно получить и по другой схеме, изложение которой имеется в [9, с. 31–42]. При этом используются операторные аналоги теорем Хелли. Это замечание будет подразумеваться и при других аналогичных ситуациях в этой статье.

Определение 3.3. *Пусть γ и $\sigma(t)$ участвуют в интегральных представлениях (2.10). Стилтьесовская оператор-функция*

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z} \tag{3.2}$$

называется ассоциированной с задачей об интегральном представлении (в силу (2.9) и леммы 3.1 определение корректно).

Всюду в дальнейшем считаем, что оператор-функция $\sigma(t)$ нормирована условиями $\sigma(0) = 0$ и $(\sigma(t+0) + \sigma(t-0))/2 = \sigma(t)$, $t > 0$. Тогда из формулы обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [10]) следует, что формула (3.2) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\sigma(t)$ и γ, участвующими в решении задачи об интегральном представлении, и ассоциированными оператор-функциями.

Теорема 3.1. *Если оператор-функция $s(z)$ ассоциирована с решением $\sigma(t)$ задачи об интегральном представлении, то при $\operatorname{Im} z \neq 0$ она удовлетворяет системе Основных Матричных Неравенств (ОМН) В.П. Потапова*

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z)\,[\,v_r z^{r-1} s(z) - u_r\,] \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar z^{r-1} s^*(z)\}/\{z - \bar z\} \end{array}\right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию имеем

$$K_1 = \int_0^\infty R_{T_1}(t) v_1 d\sigma(t) v_1^* R_{T_1}^*(t) + W_1.$$

Из определения ассоциированной оператор-функции

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar z} = \frac{1}{z - \bar z}\left\{\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z} - \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t - \bar z}\right\} = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(t-z)(t-\bar z)}.$$

И далее,

$$R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1] = \int_0^\infty \frac{R_{T_1}(t)}{t-z} v_1 d\sigma(t).$$

С учетом полученных представлений блоков первого из неравенств (3.3) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_{T_1}(z)\,[\,v_1 s(z) - u_1\,] \\ \hline * & \{s(z) - s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right]$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\begin{array}{c} R_{T_1}(t)v_1 \\ (t-\bar{z})^{-1}I \end{array}\right] d\sigma(t) \left[v_1^* R_{T_1}^*(z) \quad (t-z)^{-1}I\right] + \left[\begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \geq 0,$$

так как $\sigma(t) \nearrow$ и $W_1 \geq 0$. Первое из ОМН (3.3) доказано.

Аналогичные преобразования для второго из ОМН (3.3) приводят к результату:

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T_2}(z)\,[\,v_2 z s(z) - u_2\,] \\ \hline * & \{zs(z) - \bar{z}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F \\ -\gamma^{1/2} \end{array}\right] [F^* \quad -\gamma^{1/2}]$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left[\begin{array}{c} R_{T_2}(t)v_2 \\ (t-\bar{z})^{-1}I \end{array}\right] t d\sigma(t) \left[v_2^* R_{T_2}^*(z) \quad (t-z)^{-1}I\right] + \left[\begin{array}{c|c} W_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \geq 0.$$

Теорема 3.1 доказана.

Преобразуем систему ОМН к виду, удобному для получения интегральных представлений операторов K_1 и K_2 (см. [11]).

Теорема 3.2. *Если оператор-функция $s(z)$ удовлетворяет системе ОМН* (3.3) *при* $\operatorname{Im} z \neq 0$*, то построенные по $s(z)$ оператор-функции*

$$S_r(z) = K_r T_r^* R_{T_r}^*(\bar{z}) + R_{T_r}(z)[v_r z^{r-1} s(z) - u_r] v_r^* R_{T_r}^*(\bar{z}), \quad r = 1, 2\,, \tag{3.4}$$

удовлетворяют при $\operatorname{Im} z \neq 0$ *системе Преобразованных Основных Матричных Неравенств (ПОМН)*

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & S_r(z) \\ \hline S_r^*(z) & \{S_r(z) - S_r^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \tag{3.5}$$

Функции $S_1(z)$ и $S_2(z)$ связаны соотношением

$$S_2(z) = L_1^*[K_1 + zS_1(z)]L_1. \tag{3.6}$$

Доказательство. Умножим первое из ОМН (3.3) слева и справа соответственно на операторы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R_{T_1}(\bar{z})T_1 & R_{T_1}(\bar{z})v_1 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c|c} I & T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) \\ \hline 0 & v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) \end{array}\right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_1 T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) + R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1]v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) \\ \hline & R_{T_1}(\bar{z})T_1 K_1 T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) + R_{T_1}(\bar{z})v_1[s^*(z)v_1^* - u_1^*]R_{T_1}^*(z)T_1^* \\ * & \times R_{T_1}^*(\bar{z}) + R_{T_1}(\bar{z})T_1 R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1]v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) \\ & +R_{T_1}(\bar{z})v_1\{s(z) - s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\}v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) \end{array}\right] \geq 0.$$

С помощью оператор-функции $S_1(z)$, определенной по формуле (3.4), последнее неравенство записывается в виде (3.5). Аналогичным образом доказывается второе из неравенств. Соотношение (3.6) проверяется непосредственно. Теорема 3.2 доказана.

4. Адекватность системы ОМН задаче об интегральном представлении

Основной целью этого раздела будет доказательство утверждений, обратных теореме 3.1 (см. теоремы 4.4–4.7).

Определение 4.1. *Обозначим* $\mathbf{R}_0$ *класс всех неванлинновских оператор-функций* $S(z)$*, удовлетворяющих условию* $y\|S(iy)\| = O(1), \quad y > 0.$

Будем использовать следующие три теоремы, доказательство которых имеется в [7, 10].

Теорема 4.1. *Для того чтобы* $S(z) \in \mathbf{R}_0$*, необходимо и достаточно, чтобы имело место интегральное представление*

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - z)^{-1} d\sigma(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) = K, \ \|K\| < +\infty.$$

Теорема 4.2. *Для того чтобы* $S(z) \in \mathbf{S}$*, необходимо и достаточно, чтобы* $S(z) \in \mathbf{R}$ *и* $zS(z) \in \mathbf{R}$.

Теорема 4.3. *Если оператор-функция* $S(z)$ *принадлежит классу* $\mathbf{R}_0$*, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) = \lim_{y \to +\infty} y \mathrm{Im} S(iy) = -i \lim_{y \to +\infty} y S(iy).$$

Лемма 4.1. *Пусть оператор-функция $S(z)$ принимает значения во множестве ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве H, голоморфна в $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяет там матричному неравенству*

$$\left[\begin{array}{c|c} K & S(z) \\ \hline S^*(z) & \{S(z) - S^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0, \tag{4.1}$$

где K — ограниченный оператор в H. Тогда

1. Существует возрастающая оператор-функция $\Sigma(t)$ со значениями во множестве ограниченных эрмитовых операторов в H такая, что в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет место интегральное представление

$$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t - z}, \qquad K^\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma(t) \leq K. \tag{4.2}$$

2. Имеет место асимптотическое соотношение

$$\|S(iy)\| = o(1), \; y > 0, \; y \to +\infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. 1. Оператор-функция $S(z)$ голоморфна в $\operatorname{Im} z > 0$. В силу (4.1) имеем $\{S(z) - S^*(z)\}/\{2i\} \geq 0$. Поэтому $S(z) \in \mathbf{R}$.

Покажем, что на самом деле $S(z) \in \mathbf{R}_0$. Для этого положим в (4.1) $z = iy$, $y > 0$. Для любых векторов e и g из H имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} (e, Ke) & (e, S(iy)g) \\ \hline (S(iy)g, e) & (g, \{S(iy) - S^*(iy)\}/\{2iy\}g) \end{array}\right] \geq 0\,.$$

Пусть теперь $\|e\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$. Тогда справедливы оценки

$$(e, Ke) \leq \|K\|, \;\; (g, \{S_1(iy) - S_1^*(iy)\}/\{2iy\}g) \leq \|S(iy)\|/y\,.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{c|c} \|K\| & (e, S(iy)g) \\ \hline (S(iy)g, e) & \|S(iy)\|/y \end{array}\right] \geq 0\,.$$

Следовательно,

$$|(e, S(iy)g)|^2 \leq \|K\| \cdot \|S(iy)\|/y.$$

Пусть в этом неравенстве вектор $e = S(iy)g/\|S(iy)\|$. Получим

$$|(S(iy)g/\|S(iy)\|, S(iy)g)|^2 \leq \|K\| \cdot \|S(iy)\|/y.$$

Поэтому

$$y\|S(iy)\| \leq \|K\|. \tag{4.4}$$

Это неравенство показывает, что $S(z) \in \mathbf{R}_0$. Значит, по теореме 4.3 имеем

$$S(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-z}, \qquad K^{\Sigma} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma(t), \quad \|K^{\Sigma}\| < +\infty\,. \tag{4.5}$$

Осталось доказать, что $K^{\Sigma} \leq K$. Прежде всего отметим, что в силу (4.5) и теоремы 4.3 имеем

$$-\lim_{y\to+\infty} iyS(iy) = \lim_{y\to+\infty} iyS^*(iy) = \lim_{y\to+\infty} y\{S(iy) - S^*(iy)\}/\{2i\} = K^{\Sigma}\,. \tag{4.6}$$

Теперь умножим (4.1) слева и справа соответственно на операторы, которые в естественных матричных представлениях имеют вид

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -iyI \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & iyI \end{array}\right], \quad y > 0\,,$$

а затем перейдем к пределу при $y \to +\infty$. В силу (4.6) получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K & K^{\Sigma} \\ \hline K^{\Sigma} & K^{\Sigma} \end{array}\right] \geq 0\,.$$

Отсюда следует, что $K^{\Sigma} \leq K$.

2. Асимптотика (4.3) очевидным образом следует из (4.4). Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $s(z)$ является решением системы ОМН* (3.3). *Тогда*

1. $s(z) \in \mathbf{S}$.

2. Если $\sigma(t)$ — оператор-функция из представления стилтьесовской оператор-функции $s(z)$ в виде (3.1), то существуют интегралы

$$K_r^{\sigma} = \int\limits_{0}^{\infty} R_{T_r}(t) v_r t^{r-1} d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t), \; r = 1, 2, \tag{4.7}$$

и имеют место неравенства

$$K_1^{\sigma} \leq K_1, \quad K_2^{\sigma} \leq K_2. \tag{4.8}$$

Доказательство. 1. Из ОМН (3.3) имеем

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad \frac{zs(z) - \bar{z}s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0\,.$$

По теореме 4.2 $s(z) \in \mathbf{S}$.

2. По формулам (3.4) и по заданной $s(z)$ построим оператор-функции $S_1(z)$ и $S_2(z)$. Эти оператор-функции удовлетворяют неравенствам (3.5). По лемме 4.1 (см. (4.2)) существуют эрмитовы монотонно возрастающие оператор-функции $\Sigma_1(t)$ и $\Sigma_2(t)$ такие, что

$$S_r(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma_r(t)}{t-z}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_r(t) \le K_r,\ r = 1, 2. \tag{4.9}$$

Применим теперь к левым и правым частям равенств (3.4) формулу обращения преобразования Стилтьеса. С учетом (4.9) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_r(t) = \int\limits_0^{\infty} R_{T_r}(t) v_r t^{r-1} d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t) = K_r^\sigma \le K_r,\ r = 1, 2.$$

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть $\sigma(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда в слабом смысле существует интеграл*

$$u_2^\sigma = -\int\limits_0^{\infty} R_{T_2}(t) v_2 d\sigma(t). \tag{4.10}$$

Доказательство (см. также [12]). Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$, состоящее из вектор-функций $g(t)$, $f(t)$ со значениями в H и скалярным произведением

$$[g(t), f(t)] = \int\limits_0^{\infty} (g(t), t d\sigma(t) f(t)).$$

Из сходимости интегралов (4.7) и (3.1) следует, что $\forall g \in G_2$ и $\forall f \in H$

$$g(t) = v_2^* R_{T_2}^*(t) g \in \mathcal{H}, \quad f(t) = f/(1+t) \in \mathcal{H}.$$

Поэтому

$$[g(t), f(t)] = \int\limits_0^{\infty} \left(v_2^* R_{T_2}^*(t) g, t d\sigma(t) f/(1+t)\right)$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left(g, R_{T_2}(t) v_2 t d\sigma(t) f/(1+t)\right) < +\infty\,.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\int\limits_0^{\infty} (g, R_{T_2}(t) v_2 d\sigma(t) f) < +\infty,$$

а это и означает слабую сходимость интеграла (4.10). Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть оператор-функция $s(z)$ является решением системы ОМН* (3.3). *Тогда имеет место асимптотика*

$$\left\| \frac{zs(z) - \bar{z}s^*(z)}{z - \bar{z}} \right\| = O(1), \;\; z \in \Omega_+ \cup \Omega_-. \tag{4.11}$$

Здесь Ω_+ и Ω_- — произвольные области следующего вида:

$$\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : \delta < \arg z < \pi - \delta, \;\; 0 < \delta < \pi/2, \;\; |z| > \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0\},$$

$$\Omega_- = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega_+\}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Имеем

$$\left\| \frac{zs(z) - \bar{z}s^*(z)}{z - \bar{z}} \right\| \leq \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{td\sigma(t)}{(t - \bar{z})(t - z)} \right\| + \|\gamma\|. \tag{4.13}$$

Для $t \geq 0$ и $z \in \Omega_+$ получаем

$$|t - z| \geq |z| \sin\delta, \quad |t - z| \geq |t| \sin\delta.$$

Поэтому

$$\left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{td\sigma(t)}{(t - \bar{z})(t - z)} \right\| \leq \frac{1}{|z|^2 \sin^2\delta} \int\limits_0^{A} \|td\sigma(t)\| + \frac{1}{\sin^2\delta} \int\limits_A^{+\infty} \frac{\|d\sigma(t)\|}{t}.$$

Причем $\int_A^{+\infty} \|d\sigma(t)\|/t$ сходится, так как сходится интеграл $\int_0^{+\infty} (1+t)^{-1} d\sigma(t)$ (см. (3.1)). Поэтому правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора $|z|$ и A достаточно большими. Отсюда, из (4.13), следует (4.11) для $z \in \Omega_+$. В силу принципа симметрии $s(z) = s^*(\bar{z})$ асимптотика (4.11) имеет место в $\Omega_+ \cup \Omega_-$. Лемма 4.4 доказана.

Теорема 4.4. *Пусть для любых векторов $e_2 \in G_2$, $\|e_2\| \leq 1$ и для фиксированных $f_2, g_2 \in G_2$ из асимптотики*

$$|(e_2, R_{T_2}(z)[f_2 z + g_2])| = O(1), \;\; z \in \Omega_+, \;\; \textit{следует, что } f_2 = -T_2 g_2.$$

Здесь Ω_+ — некоторая область вида (4.12). Пусть нуль не принадлежит спектру оператора T_2 и пусть $\ker L_2^* = \{0\}$.

Если $s(z) = \gamma + \int_0^{+\infty} (t-z)^{-1} d\sigma(t)$ является решением системы ОМН (3.3), то из условия $L_2 F = v_1 \gamma^{1/2}$ однозначно определяется оператор $F \in \{H, G_2\}$ такой, что u_2 допускает интегральное представление (2.10).

Доказательство. Пусть $e_2 \in G_2$, $\|e_2\| \le 1$ — произвольный вектор, а $g \in H$ — любой фиксированный вектор. Из второго неравенства (3.3), как и при доказательстве леммы 4.1, получим

$$|(e_2, R_{T_2}(z)[v_2 z s(z) - u_2]g)|^2 \le \|K_2\| \left\| \frac{z s(z) - \bar{z} s^*(z)}{z - \bar{z}} \right\| \cdot \|g\|^2 .$$

По лемме 4.4

$$|(e_2, R_{T_2}(z)[v_2 z s(z) - u_2]g)| = O(1), \ z \in \Omega_+ .$$

Из доказательства теоремы 3.1 видно, что второе из неравенств (3.3) остается справедливым, если в нем заменить K_2 на K_2^σ, u_2 на u_2^σ и $s(z)$ на $s^\sigma(z) = \int_0^{+\infty}(t-z)^{-1} d\sigma(t)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получим

$$|(e_2, R_{T_2}(z)[v_2 z s^\sigma(z) - u_2^\sigma]g)| = O(1), \ z \in \Omega_+ .$$

Из двух последних асимптотик имеем

$$|(e_2, R_{T_2}(z)[v_2 \gamma z - u_2 + u_2^\sigma]g)| = O(1), \ z \in \Omega_+ .$$

Отсюда $v_2 \gamma g = T_2(u_2 - u_2^\sigma)g$. В силу произвольности g имеем $v_2\gamma = T_2(u_2 - u_2^\sigma)$. Поэтому $u_2 = u_2^\sigma + T_2^{-1} v_2 \gamma$. Таким образом, $F = T_2^{-1} v_2 \gamma^{1/2} \in \{H, G_2\}$ и определен однозначно. По определению v_2 и T_2 имеем $L_1^* L_2 F = L_1^* v_1 \gamma^{1/2}$. Так как $\ker L_1^* = \{0\}$, отсюда следует, что из соотношения $L_2 F = v_1 \gamma^{1/2}$ однозначно определяется F. Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5. *Пусть при $r = 1, 2$ для любых векторов $e_r \in G_r$, $\|e_r\| \le 1$ и для фиксированного $g_r \in G_r$ из асимптотики*

$$|(e_r, R_{T_r}(\bar{z}) g_r)| = O(1), \ z \in \Omega_-, \ \textit{следует, что } g_r = 0. \tag{4.14}$$

Здесь Ω_- — некоторая область вида (4.12). И пусть выполнены условия теоремы 4.4 и $s(z) = \gamma + \int_0^{+\infty}(t-z)^{-1} d\sigma(t)$ является решением системы ОМН. Пусть нуль не принадлежит спектру оператора T_1. Тогда операторы K_1 и K_2 допускают интегральные представления (2.10), причем $W_1 = 0$ и $W_2 = 0$.

Доказательство. По решению $s(z)$ системы ОМН построим две оператор-функции

$$S_1(z) = K_1 T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) + R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1] v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}),$$

$$S_1^\sigma(z) = K_1^\sigma T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}) + R_{T_1}(z)[v_1 s^\sigma(z) - u_1^\sigma] v_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}).$$

Здесь $u_1 = L_2 u_2$, $u_1^\sigma = L_2 u_2^\sigma$. Поэтому

$$v_1 s(z) - u_1 - v_1 s^\sigma(z) + u_1^\sigma = v_1\gamma - u_1 + u_1^\sigma = v_1\gamma - L_2(-u_2 + u_2^\sigma)$$
$$= v_1\gamma - L_2 F\gamma^{1/2} = 0.$$

Отсюда следует формула

$$S_1(z) - S_1^\sigma(z) = (K_1 - K_1^\sigma)T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}). \tag{4.15}$$

Оператор-функция $S_1(z)$ удовлетворяет первому из неравенств (3.5) по условию, а $S_1^\sigma(z)$ удовлетворяет тому же неравенству по построению (см. доказательство теорем 3.1 и 3.2). Из леммы 4.1 следует, что обе эти функции принадлежат классу $\mathbf{R}_0$ и, следовательно, ограничены по норме в любой области вида (4.12). Отсюда $\forall e_1, g_1 \in G_1$

$$|(g_1, S_1(z)e_1)| = O(1),\ |(g_1, S_1^\sigma(iy)e_1)| = O(1),\ z \in \Omega_-\,.$$

Из этих асимптотик имеем

$$|(g_1, (S_1(z) - S_1^\sigma(z)e_1)| = O(1),\ z \in \Omega_-\,.$$

Отсюда, в силу (4.15), получаем

$$|(e_1, R_{T_1}(\bar{z})T_1(K_1 - K_1^\sigma)g_1)| = O(1),\ z \in \Omega_-\,.$$

В этой асимптотике можно считать $\|e_1\| \le 1$ произвольным вектором, а g_1 — фиксированным. В силу (4.14) $T_1(K_1 - K_1^\sigma) = 0$. Отсюда $K_1 = K_1^\sigma$. Доказано интегральное представление для K_1 с $W_1 = 0$.

Теперь получим интегральное представление для оператора K_2. Пусть $S_2(z)$ определена формулой (3.4), а $S_2^\sigma(z)$ — по аналогии с $S_1^\sigma(z)$. Имеем

$$S_2(z) - S_2^\sigma(z) = (K_2 - K_2^\sigma - FF^*)T_1^* R_{T_1}^*(\bar{z}).$$

Далее, рассуждая как и при получении интегрального представления для K_1, получим $K_2 = K_2^\sigma + FF^*$. Теорема 4.5 доказана.

В последних теоремах было сделано предположение, что нуль не принадлежит спектру оператора T_2. Это условие выполняется для задачи Неванлинны–Пика и ее аналогов. Но в проблеме моментов Стилтьеса и ее аналогах нуль принадлежит спектру оператора T_2. В этом случае требуется несколько иной подход.

Теорема 4.6. *Пусть для любых векторов $e_2 \in G_2$, $\|e_2\| \le 1$ и для фиксированного $g_2 \in G_2$ из асимптотики*

$$|(e_2, R_{T_2}(iy)g_2)| = o(1),\ y > 0,\ y \to +\infty,\ \textit{следует, что}\ g_2 = 0. \tag{4.16}$$

Если некоторое решение ОМН $s(z)$ допускает специальное интегральное представление $s(z) = \int_0^{+\infty} (t-z)^{-1} d\sigma(t)$, $(\gamma = 0)$, то оператор u_2 допускает интегральное представление (2.10), в котором отсутствует "внеинтегральное" слагаемое.

Доказательство. При $\gamma = 0$ в условиях леммы 4.4 легко получается асимптотика

$$\left\| \frac{zs(z) - \bar{z}s^*(z)}{z - \bar{z}} \right\| = o(1),\ z = iy,\ y > 0,\ y \to +\infty. \tag{4.17}$$

Дальнейшее доказательство основано на асимптотиках (4.16) и (4.17) и проводится по аналогии с теоремой 4.4. Теорема 4.6 доказана.

Теорема 4.7. *Пусть при $r = 1, 2$ для любых векторов $e_r \in G_r$, $\|e_r\| \le 1$ и для фиксированного $g_r \in G_r$ из асимптотики*

$$|(e_r, R_{T_r}(-iy)g_r)| = o(1),\ y > 0,\quad y \to +\infty \text{ следует, что } g_r = 0.$$

И пусть выполнены условия теоремы 4.6. Тогда

$$K_1 = K_1^\sigma + W_1, \quad K_2 = K_2^\sigma + W_2.$$

Здесь W_1 и W_2 ограниченные и неотрицательные операторы в G_1 и G_2 соответственно, причем $T_1W_1 = 0$ и $T_2W_2 = 0$.

Если операторы L_1 и L_2 удовлетворяют условиям

$$\ker L_2 \cap \operatorname{im} L_1^* = \{0\}, \quad \ker L_1^* \cap \operatorname{im} L_2 = \{0\}, \tag{4.18}$$

то $W_1L_1 = 0$ и $L_2W_2 = 0$.

Доказательство. Повторяя рассуждения из теоремы 4.6, получим $T_r(K_r - K_r^\sigma) = 0$, $r = 1, 2$. Введем операторы $W_1 = K_1 - K_1^\sigma$ и $W_2 = K_2 - K_2^\sigma$. По самому определению эти операторы ограничены и удовлетворяют условиям $T_1W_1 = 0$, $T_2W_2 = 0$. Они неотрицательны по (4.8).

Пусть, например, выполнено первое из условий (4.18). Тогда из $T_1W_1 = 0$ следует, что и $W_1L_1 = 0$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что $L_2W_2 = 0$. Теорема 4.7 доказана.

Таким образом, пусть заданы два неотрицательных оператора K_1 и K_2, удовлетворяющие ОТ (2.1). Поставим им в соответствие систему ОМН (3.3). Если окажутся выполненными условия теоремы 4.5 (или 4.7), то всякое решение системы ОМН задает интегральное представление (2.10), т.е. в этом случае из ОТ следуют интегральные представления. Вопрос о существовании решений у системы ОМН остался открытым. Он будет изучен в двух следующих разделах.

5. Экстремальные решения системы матричных неравенств

В этом разделе приведем явные формулы для двух замечательных решений системы ОМН. Эти решения связаны с мягкими и жесткими расширениями операторов.

Теорема 5.1. *Пусть* $K_1 \geq 0$ *и* $K_2 \geq 0$. *Если оператор-функции*

$$s^{\mu}(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]}u_2, \;\; s^M(z) = \{v_1^*(L_2K_2L_2^* - z^{-1}K_1)^{[-1]}v_1\}^{[-1]} \tag{5.1}$$

голоморфны хотя бы в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, *то они являются решениями системы ОМН (3.3).*

Доказательство. Имеем

$$\frac{s^{\mu}(z) - s^{\mu^*}(z)}{z - \bar{z}}$$

$$= \left[-u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]^*}L_1^*\right] K_1 \left[-L_1(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]}u_2\right].$$

И далее,

$$R_{T_1}(z)[v_1 s^{\mu}(z) - u_1] = K_1[-L_1(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]}u_2].$$

С учетом полученных представлений первое из ОМН (3.1) записывается в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_{T_1}(z)\,[\,v_1 s^{\mu}(z) - u_1\,] \\ \hline * & \{s^{\mu}(z) - s^{\mu^*}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]^*}L_1^* \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_1 \\ \hline K_1 & K_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -L_1(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]}u_2 \end{array}\right] \geq 0,$$

так как $K_1 \geq 0$. Показано, что $s^{\mu}(z)$ удовлетворяет первому из ОМН (3.3).

При доказательстве того факта, что $s^{\mu}(z)$ удовлетворяет и второму из ОМН (3.3), действуем аналогичным образом и получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T_2}(z)\,[\,v_2 z s^{\mu}(z) - u_2\,] \\ \hline * & \{z s^{\mu}(z) - \bar{z} s^{\mu^*}(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]^*} \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} K_2 & K_2 \\ \hline K_2 & K_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & (K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{[-1]}u_2 \end{array}\right] \geq 0.$$

Итак, доказано, что $s^{\mu}(z)$ является решением системы ОМН (3.3).

Покажем, что и $s^M(z)$ является решением системы ОМН (3.1). По аналогии с предыдущим имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_{T_1}(z)\,[\,v_1 s^M(z) - u_1\,] \\ \hline * & \{s^M(z) - s^{M^*}(z)\}/\{z-\bar z\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -s^{M^*}(z) v_1^*(zL_2K_2L_2^* - K_1)^{[-1]^*} \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_1 \\ \hline K_1 & K_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -(zL_2K_2L_2^* - K_1)^{[-1]} v_1 s^M(z) \end{array}\right] \geq 0,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T_2}(z)\,[\,v_2 z s^M(z) - u_2\,] \\ \hline * & \{z s^M(z) - \bar z s^{M^*}(z)\}/\{z-\bar z\} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -\bar z s^{M^*}(z) v_1^*(zL_2K_2L_2^* - K_1)^{[-1]^*} L_2 \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} K_2 & K_2 \\ \hline K_2 & K_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -L_2^*(zL_2K_2L_2^* - K_1)^{[-1]} v_1 z s^M(z) \end{array}\right] \geq 0.$$

Теорема 5.1 доказана.

6. Описание всех решений задачи о согласованном интегральном представлении во вполне неопределенном случае

Определение 6.1. *Задача о согласованном интегральном представлении называется* <u>*вполне неопределенной*</u>*, если операторы K_1 и K_2 имеют ограниченные обратные операторы и $v_1 e = 0 \leftrightarrow e = 0$.*

Ради простоты в этом разделе в основном будем рассматривать вполне неопределенный случай задачи о совместном интегральном представлении.

Рассмотрим оператор-функции двух комплексных переменных z и λ:

$$\Gamma_r(z,\lambda) = \left[\begin{array}{c} v_r^* \\ u_r^* \end{array}\right] R_{T_r^*}(z) K_r^{-1} R^*_{T_r^*}(\lambda)[v_r,\ u_r], \quad r = 1,2. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *1. Определенные формулами* (6.1) *оператор-функции допускают представления*

$$\Gamma_r(z,\lambda) = \frac{J - U_r(z) J U_r^*(\lambda)}{i(z-\bar\lambda)}, \quad r = 1,2. \tag{6.2}$$

Здесь

$$U_1(z) = \left\{ I_2 - iz \left[\begin{array}{c} v_1^* \\ u_1^* \end{array}\right] R_{T_1^*}(z) K_1^{-1}[v_1,\ u_1] J \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_1 & I \end{array}\right], \tag{6.3}$$

$$U_2(z)=\left\{I_2-iz\begin{bmatrix}v_2^*\\ u_2^*\end{bmatrix}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}[v_2,\ u_2]J\right\}\left[\begin{array}{c|c}I & -M_2\\ \hline 0 & I\end{array}\right], \tag{6.4}$$

$$J=\left[\begin{array}{c|c}0 & -iI\\ \hline iI & 0\end{array}\right],\quad I_2=\left[\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline 0 & I\end{array}\right],\quad M_1=u_2^*K_2^{-1}u_2,\ M_2=v_1^*K_1^{-1}v_1. \tag{6.5}$$

2. Наряду с представлениями (6.3) *и* (6.4) *оператор-функции* $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *допускают представления*

$$U_1(z)=\left[\begin{array}{c|c}I+zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & -zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\\ \hline u_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & I-zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\end{array}\right], \tag{6.6}$$

$$U_2(z)=\left[\begin{array}{c|c}I+zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & -v_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\\ \hline zu_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & I-zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\end{array}\right]. \tag{6.7}$$

3. Функции $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *связаны соотношением*

$$U_2(z)=\left[\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline 0 & zI\end{array}\right]U_1(z)\left[\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline 0 & z^{-1}I\end{array}\right]. \tag{6.8}$$

Доказательство. 1. Равенства (6.2) проверяются непосредственными вычислениями (см. аналогичные вычисления в [6]). При этом используются (2.2)–(2.8).

2. Докажем (6.5). Имеем

$$\begin{aligned}U_1(z)&\\ &=\left\{I_2-iz\begin{bmatrix}v_1^*\\ u_1^*\end{bmatrix}R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}[v_1,\ u_1]J\right\}\left[\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline M_1 & I\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{c|c}I+zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1 & -zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\\ \hline zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1 & I-zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline M_1 & I\end{array}\right].\end{aligned}$$

Преобразуем 11-блок оператор-функции $U_1(z)$.

$$I+zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1-zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1M_1=I+zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2.$$

Преобразуем 21-блок оператор-функции $U_1(z)$.

$$zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1+M_1-zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1M_1=u_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2.$$

Поэтому

$$U_1(z)=\left[\begin{array}{c|c}I+zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & -zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\\ \hline u_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 & I-zu_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1\end{array}\right].$$

Равенство (6.6) доказано. Аналогичным образом устанавливается равенство (6.7).

3. Формула (6.8) очевидным образом следует из (6.6) и (6.7).

Теорема 6.1 доказана.

Лемма 6.1. *Определенные формулами* (6.3) *и* (6.4) *оператор-функции* $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *обратимы в* $\mathbb{C}$. *Обратные оператор-функции могут быть вычислены по формулам*

$$U_1^{-1}(z) = JU_1^*(\bar{z})J, \quad U_2^{-1}(z) = JU_2^*(\bar{z})J. \tag{6.9}$$

Доказательство. Из (6.2) следует, что $J - U_1(z)JU_1^*(\lambda) = i(z-\bar{\lambda})\Gamma_1(z,\lambda)$. Положим в этой формуле $\lambda = \bar{z}$. Получим $J-U_1(z)JU_1^*(\bar{z}) = 0$. Умножим это равенство справа на J. Получим $U_1(z)\cdot[JU_1^*(\bar{z})J] = I$. Отсюда следует первое из равенств (6.9). Второе из этих равенств доказывается аналогичным образом.

Лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2. *Во вполне неопределенном случае система ОМН (3.3) эквивалентна системе*

$$\begin{bmatrix} I & \bar{z}^{r-1}s^*(z) \end{bmatrix} \frac{U_r^{-1*}(z)JU_r^{-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \ r = 1,2. \tag{6.10}$$

Доказательство. Умножим первое из неравенств (3.3) слева и справа соответственно на операторы в $G_1 \oplus H$, которые задаются матрицами

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -[s^*(z)v_1^* - u_1^*]R_{T_1}^*(z)K_1^{-1} & I \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1] \\ \hline 0 & I \end{array}\right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar{z}} - [s^*(z)v_1^* - u_1^*]R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1] \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar{z}} - [s^*(z)v_1^* - u_1^*]R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1 s(z) - u_1] \geq 0.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{[I\ s^*(z)]\,J\begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix}}{i(\bar z - z)}$$
$$-(-i)[I\ s^*(z)]J\begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1\ u_1]J\begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix}(i) \geq 0.$$

Или

$$[I\ s^*(z)]\frac{J - i(\bar z - z)J\begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1\ u_1]J}{i(\bar z - z)}\begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (6.11)$$

Из формул (6.1) и (6.2), записанных для $\bar z$ и $\lambda = \bar z$, получим

$$J - U_1(\bar z)JU_1^*(\bar z) = i(\bar z - z)\begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(\bar z)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(\bar z)[v_1\ u_1].$$

Умножим это равенство слева и справа на J. В результате имеем

$$J - JU_1(\bar z)JJJU_1^*(\bar z)J = i(\bar z - z)J\begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(\bar z)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(\bar z)[v_1\ u_1]J.$$

В силу формулы (6.9) и того факта, что $R_{T_1^*}^*(\bar z) = R_{T_1}(z)$,

$$J - U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z) = i(\bar z - z)J\begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)[v_1\ u_1]J.$$

С учетом последнего равенства неравенство (6.11) принимает вид первого из неравенств (6.10).

Итак, доказано, что из первого неравенства (3.3) следует первое неравенство (6.10). Аналогичным образом показываем, что из второго неравенства (3.3) следует второе неравенство (6.10). Таким образом, система (6.10) является следствием системы (3.3). Отметим, что все применявшиеся преобразования обратимы, и поэтому (3.3) является следствием (6.10). Тем самым установлена эквивалентность (3.3) и (6.10). Лемма 6.2 доказана.

Определение 6.2. *Пара оператор-функций* $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$, *мероморфных в* $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ *со значениями в* H, *называется стилтьесовской, если*

1. $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0$ *всюду в* $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ *за исключением некоторого множества изолированных точек;*

2. $[p^*(z), q^*(z)]\frac{J}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \ \mathrm{Im}\ z \neq 0$*;*

3. $[p^*(z), \bar{z}q^*(z)]\frac{J}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq 0, \ \mathrm{Im}\ z \neq 0.$

На множестве стилтьесовских пар введем отношение эквивалентности: пары $\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{bmatrix}$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ оператор-функция $Q(z)$ такая, что $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$ и $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности стилтьесовских пар обозначим $\bar{\mathbf{S}}$. Естественным образом определено включение $\mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{S}}$.

Теорема 6.2. *Пусть задача о согласованном интегральном представлении является вполне неопределенной и*

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \\ \hline \gamma_1(z) & \delta_1(z) \end{array}\right]$$

определена формулой (6.5). Тогда формула

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\} \cdot \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}^{-1} \tag{6.12}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между ассоциированными с задачей об интегральном представлении оператор-функциями $s(z)$ и классами эквивалентности стилтьесовских пар $\bar{\mathbf{S}}$.

Доказательство этой теоремы опирается на систему ОМН (6.10) и проводится по схеме доказательства соответствующего утверждения в [6].

7. Примеры

П р и м е р 1. Задача Неванлинны–Пика в классе Стилтьеса. По заданным комплексным числам $z_1, ..., z_n$, $\mathrm{Im}\, z_j > 0$, $z_j \neq z_k$, $j \neq k$ и операторам $s_1, ..., s_n$ в унитарном пространстве H требуется описать все оператор-функции $s(z) \in \mathbf{S}$ такие, что

$$s(z_j) = s_j, \ j = 1, ..., n. \tag{7.1}$$

Положим $G = G_1 = G_2 = \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{n}$. С помощью естественных матричных представлений зададим операторы

$$L_2 = \mathrm{diag}\{z_1^{-1}I, \ldots, z_n^{-1}I\}, \ u_2 = L_2^{-1} \cdot \mathrm{col}\ \{s_1, \ldots, s_n\}, \ v_1 = \mathrm{col}\ \{I, \ldots, I\}.$$

L_1 является тождественным оператором в G. Поэтому $T = T_1 = T_2 = L_2$. Операторы K_1 и K_2 имеют вид

$$K_r = T^{-1} \cdot \left\{ \frac{z_j^{r-1} s_j - \bar z_k^{r-1} s_k^*}{z_j - \bar z_k} \right\}_{j,k=1,\dots,n} \cdot T^{-1^*}, \ r = 1, 2.$$

Основное тождество проверяется непосредственно. Если $s(z) = \gamma + \int_0^{+\infty} (t - z)^{-1} d\sigma(t)$ является решением задачи (7.1), то элементарно проверяемые представления $(r = 1, 2)$

$$K_r = T^{-1} \cdot \left\{ \int\limits_0^\infty \begin{bmatrix} \frac{I}{z_1 - t} \\ \vdots \\ \frac{I}{z_n - t} \end{bmatrix} t^{r-1} d\sigma(t) \left[\frac{I}{\bar z_1 - t} \cdots \frac{I}{\bar z_n - t} \right] + (r-1) v_r \gamma v_r^* \right\} \cdot T^{-1^*}$$

показывают, что условия $K_1 \geq 0$ и $K_2 \geq 0$ необходимы для существования решения задачи (7.1). Будем считать их выполнеными.

Итак, имеются два неотрицательных оператора, связанных ОТ. Поставим им в соответствие систему ОМН (3.3). В рассматриваемом случае у нее есть решения (см. 5.1). Выберем параметры ε и δ в (4.12) так, чтобы все особенности оператор-функции $R_T(z)$ попали в область Ω_+. Легко видеть, что в данном случае выполнены условия теоремы 4.5. Поэтому γ и $\sigma(t)$, участвующие в интегральном представлении (3.1) любого решения $s(z)$ системы ОМН, задают интегральные представления (2.10).

Таким образом, задаче (7.1) поставлена в соответствие задача (2.10), имеющая непустое множество решений. Простой анализ показывает, что если γ и $\sigma(t)$ участвуют в интегральных представлениях (2.10), то $s(z) = \gamma + \int_0^{+\infty} (t - z)^{-1} d\sigma(t)$ является решением задачи (7.1). Таким образом, задача (7.1) эквивалентна задаче вида (2.10). Отсюда следует

Теорема 7.1. *Условия $K_1 \geq 0$ и $K_2 \geq 0$ необходимы и достаточны для существования хотя бы одного решения задачи* (7.1) (*см.* (5.1)).

Если же $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$, то существует бесконечно много решений задачи (7.1) *и все они описываются формулой* (6.12).

П р и м е р 2. Задача Каратеодори в классе Стилтьеса. По данному комплексному числу z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ и последовательности линейных операторов $s_0, s_1, \dots, s_n$ в унитарном пространстве H требуется описать все $s(z) \in \mathbf{S}$ такие, что

$$s(z) = s_0 + s_1(z - z_0) + \dots + s_n(z - z_0)^n + \dots . \tag{7.2}$$

Пространство G будет таким же, как и в предыдущей задаче, но в ортогональной сумме H берется $(n+1)$ раз. С помощью матричных представлений зададим операторы

$$L_2 = \begin{bmatrix} z_0 I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ I & z_0 I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I & z_0 I \end{bmatrix}^{-1}, \quad u_2 = L_2^{-1} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оператор L_1 является тождественным оператором в G. Поэтому $T = T_1 = T_2 = L_2$.

Пусть операторы K_1 и K_2 действуют в пространстве G и задаются так:

$$K_1 = T^{-1} \{P_{jk}\}_{1 \le j,k \le n} T^{-1*}, \quad K_2 = T^{-1} \{Q_{jk}\}_{1 \le j,k \le n} T^{-1*}.$$

Матричные элементы P_{jk} оператора K_1 задаются рекуррентными формулами

$$P_{00} = \frac{s_0 - s_0^*}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad P_{0k} = \frac{P_{0\,k-1} - s_k^*}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \le k \le n,$$
$$P_{j0} = \frac{-P_{j-1\,0} + s_j}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \le j \le n, \quad P_{jk} = \frac{P_{j\,k-1} - P_{j-1\,k}}{z_0 - \bar{z}_0}, \quad 1 \le j,k \le n.$$

Матричные элементы Q_{jk} оператора K_2 тоже задаются предыдущими рекуррентными формулами, но операторы $s_0, ..., s_n$ заменяются операторами $S_0, ..., S_n$, которые определяются равенством $\mathrm{col}\,[S_0 ... S_n] = T \mathrm{col}\,[s_0 ... s_n]$.

Основное тождество проверяется непосредственно. Рассуждения, аналогичные тем, что приведены для задачи (7.1), позволяют включить задачу (7.2) в общую схему. В частности, справедлива теорема 7.1, в которой ссылка на задачу (7.1) заменена ссылкой на задачу (7.2).

Пример 3. Проблема моментов Стилтьеса. По последовательности линейных операторов $s_0, s_1, ..., s_k$, $k \ge 1$, в унитарном пространстве H требуется найти все монотонно возрастающие оператор-функции $\sigma(t)$, определенные при $t \ge 0$ и принимающие значения во множестве эрмитовых операторов в H, и операторы $M \ge 0$ такие, что

$$s_j = \int_0^\infty t^j d\sigma(t), \ 0 \le j \le k-1, \ s_k = \int_0^\infty t^k d\sigma(t) + M. \tag{7.3}$$

Здесь оператор $M \ge 0$ позволяет учесть возможный скачок оператор-функции $\sigma(t)$ в точке $t = +\infty$ (подробнее об этом см. [7, с. 235–236]).

а) Случай нечетного числа моментов $k = 2n$. Пространства G_1 и G_2 имеют вид $G_1 = \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{n+1}$, $G_2 = \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{n}$. В очевидных матричных представлениях имеем

$$K_1 = \{s_{j+k}\}_{j,k=0,\ldots,n}, \quad K_2 = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0,\ldots,n-1},$$

$$L_1=\underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & I\\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix}}_{n},\quad L_2=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0\\ I & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & I\end{bmatrix}}_{n},\quad v_1=\begin{bmatrix} I\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix} -s_0\\ -s_1\\ \vdots\\ -s_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Основное тождество проверяется непосредственно.

Умножим первое из неравенств (3.3), записанное для случая проблемы моментов Стилтьеса, слева и справа соответственно на операторы

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & I\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & I\end{bmatrix}^*.$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} s_0 & s(z)\\ \hline s^*(z) & \{s(z)-s^*(z)\}/\{z-\bar z\}\end{array}\right]\ \geq\ 0.$$

Отсюда, по лемме 4.1, всякая ассоциированная с проблемой моментов оператор-функция $s(z)$ допускает специальное интегральное представление $s(z)=\int_0^{+\infty}(1+t)^{-1}d\sigma(t)$. Теперь легко проверить, что выполнены все условия теоремы 4.7 и, как и в случае задачи (7.1), задача (7.3) включена в общую схему. В частности, справедлива теорема 7.1, в которой ссылка на задачу (7.1) заменена ссылкой на задачу (7.3).

b) Случай четного числа моментов $k=2n+1$. Пространства G_1 и G_2 в этом случае совпадают: $G_1=G_2=\underbrace{H\oplus H\oplus\ldots\oplus H}_{n+1}$. Операторы K_1 и v_1 остаются такими же, как и в случае проблемы моментов с нечетным числом моментов. Оператор L_1 является тождественным оператором в G_1. Операторы K_2, L_2, u_2 имеют вид

$$K_2=\begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_{n+1}\\ s_2 & \dots & s_{n+2}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{n+1} & \dots & s_{2n+1}\end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ I & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & I & 0\end{bmatrix} u_2=\begin{bmatrix} -s_0\\ -s_1\\ \vdots\\ -s_n\end{bmatrix}.$$

Основное тождество проверяется непосредственно, и задача включена в общую схему.

Список литературы

[1] *Т.С. Иванченко, Л.А. Сахнович*, Операторный подход к схеме В.П. Потапова исследования интерполяционных задач. — Укр. мат. журн.(1987), т. 39, № 5, с. 573–578.

[2] *T.S. Ivanchenko and L.A. Sakhnovich*, An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems. — Operator Theory: Adv. and Appl. (1994), v. 72, p. 48–86.

[3] *В.Э. Кацнельсон, А.Я. Хейфец, П.М. Юдицкий*, Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов. В кн.: Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев (1987), с. 83–96.

[4] *А.А. Нудельман*, Об одном обобщении классических интерполяционных задач. — ДАН СССР (1981), т. 256, № 4, с. 790–793.

[5] *И.В. Ковалишина*, Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. — Изв. АН СССР. Сер. мат. (1983), т. 47, № 3, с. 455-497.

[6] *Ю.М. Дюкарев, В.Э. Кацнельсон*, Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи. — В сб.: Теория функций, функц. анализи их прил. (1981), вып. 36, с. 13–27.

[7] *М.Г. Крейн, А.А. Нудельман*, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Наука, Москва (1973), 552 с.

[8] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Вища школа, Харьков (1977), 316 с.

[9] *М.С. Бродский*, Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, Москва (1969), 287 с.

[10] *И.С. Кац, М.Г. Крейн*, R-функции. Дополнение 1. В кн.: Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, Москва (1968), с. 629–647.

[11] *В.Э. Кацнельсон*, Основное матричное неравенство задачи о разложении положительно определенного ядра на элементарные ядра. — Деп. в УкрНИИНТИ (1984), № 1189, Ук-84, с. 1–46.

[12] *Л.А. Сахнович*, Метод операторных тождеств. — Алгебра и анализ (1993), т. 5, вып. 1, с. 3–80.

General scheme of solution interpolation problem in Stieltjes class based on consistent representation of the pair of the non-negative operators. I

Yu.M. Dyukarev

Let G_1 and G_2 — Hilbert space and $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$ — two non-negative and bounded operators in G_1 and G_2. Let the operators be connected by the *Fundamental Identity* $L_2K_2 - K_1L_1 = v_1u_2^*$. Here L_2 and L_1 are bounded operators from G_2 to G_1; and v_1 and u_2 are bounded operators from Hilbert space H to G_1 and G_2. We need to find in what conditions operators K_1 and K_2 posses the consistent integral representation having form

$$K_r = \int\limits_0^\infty R_{T_r}(t) v_r t^{r-t} \, d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t) + W_r + (r-1)FF^*, \quad r = 1, 2\,.$$

Here $T_1 = L_2L_1^*$, $T_2 = L_1^*L_2$, $v_2 = L_1^*v_1$, $W_1 \geq 0$, $W_1L_1 = 0$, $L_2F = v_1\gamma^{1/2}$, $W_2 \geq 0$, $L_2W_2 = 0$, $R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}$, $R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}$, $\sigma(t)$ — non-decreasing function defined on interval $[0; +\infty)$ and having values in the set of bounded hermitian operators, acting in H, $\gamma \geq 0$ is operator in space H. This problem is shown to have the Stieltjes moment problem in itself, as well as Nevanlinna–Pick and Carathéodory interpolation problems.

Загальна схема розв'язання інтерполяційних задач у класі Стільтьєса, яку побудовано на погоджених інтегральних зображеннях пар невід'ємних операторів. I

Ю.М. Дюкарев

Нехай у просторах Гільберта G_1 та G_2 задано два невід'ємних оператора $K_1 \geq 0$ та $K_2 \geq 0$, які зв'язані *Основною Тотожністю* $L_2K_2 - K_1L_1 = v_1u_2^*$. Тут L_2 та L_1 — обмежені оператори з G_2 у G_1, а v_1 та u_2 — обмежені оператори з певного простору Гільберта H у G_1 та G_2 відповідно. Поставлено та вивчено задачу про *погоджені* інтегральні зображення операторів K_1 та K_2 у вигляді

$$K_r = \int\limits_0^\infty R_{T_r}(t) v_r t^{r-t} \, d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t) + W_r + (r-1)FF^*, \quad r = 1, 2\,.$$

Тут $T_1 = L_2L_1^*$, $T_2 = L_1^*L_2$, $v_2 = L_1^*v_1$, $W_1 \geq 0$, $W_1L_1 = 0$, $L_2F = v_1\gamma^{1/2}$, $W_2 \geq 0$, $L_2W_2 = 0$, $R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}$, $R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}$, $\sigma(t)$ — зростаюча функція, що набуває значень у множині ермітових операторів в просторі H, $\gamma \geq 0$ — оператор у просторі H. Доведено, що ця задача містить в собі проблему моментів Стільтьєса, задачі Неванлінни–Піка та Каратеодорі у класі Стільтьєса.